高等学校专科教学用书

高等数学

盛 骤　吴迪光　张光天 编

浙江大学出版社

简　　介

本书是针对大学专科教学要求编写的。全书分十一章，内容侧重于一元函数的微积分及微分方程，并扼要地介绍了函数的幂级数展开、矢量代数与空间解析几何、二重积分和曲线积分。取材适当，便于教学。

本书可用作高等学校专科、业余大学以及招收高中毕业生的中等专业学校高等数学课程的教材。

高等学校专科教学用书

高 等 数 学

盛　骤　　吴迪光　　张光天　编

责任编辑　陈子饶

· · ·

浙江大学出版社出版

浙江大学印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

· · ·

开本787×1092　1/32　印张12.5　字数280,000

1985年8月第一版　1986年3月第二次印刷

印数　10,001　30,000

书号：15337·013　定价：1.90元

目　录

第一章 函　　数

函数是高等数学的一个基本概念。本章我们复习中学学过的函数概念，并进一步介绍函数的有关知识。

第一节 函数概念

（一） 函数的定义

人们在观察、研究某一现象或某一运动过程时，会遇到许多量，这些量的变化不是孤立的，而是相互间存在着某种对应关系的。我们先分析几个例子。

例 1 在货轮的船头下部漆着一列数字，这些数字指明吃水的深度。下表给出了某货轮在不同吃水深度时的排水量：

吃水深度 h（米）	3	4	5	6	7	8	9
排（淡）水量 w（吨）	5020	7225	9275	11475	13750	16125	18525

上表反映了变量w与变量h的对应关系，对于表中给出的吃水深度h，就有一个确定的排水量w与之对应。例如，当$h=4$米时，$w=7225$吨。

例 2 由波义耳定律知道，当温度保持不变时，一定质量的气体的压强P与体积V成反比，即

$$P=\frac{C}{V}\qquad（C\text{为常数}）\qquad V_0\leqslant V\leqslant V_1$$

上式表达了压强P与体积V的对应关系，即质量一定的气体，当它的体积V在范围$V_0\leqslant V\leqslant V_1$内取定一个值时，就有一个确定压强$P$的值与之对应。■

例 3 自动记录仪描绘了某地某一天气温 T（℃）随时间 t（小时）的变化曲线（图 1—1）。时间 t 的变化范围是 $0 \leqslant t \leqslant 24$，对于这个范围内的每一时刻 t，都可以在图形上量出对应的温度 T 的值。例如，当 $t = 13.5$时，$T = 22$℃。

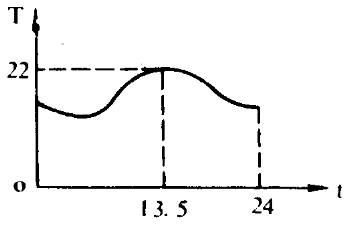

图 1—1

概括以上例子，我们看到，尽管这些问题的具体意义不一样，但从数量关系的角度来看，它们却有着共同的本质的东西，即在变化过程中的两个变量之间存在着某种对应关系，当一个变量取定某一值时，另一变量就有确定的值与之对应。我们引入以下函数的定义：

定义 设A，B是两个实数集，若存在一个法则，按照它，对于每一个实数 $x \in A$，都有确定的实数 $y \in B$ 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为

$$y = f(x), \qquad x \in A$$

A叫做函数的定义域，x 叫自变量，y 也叫因变量。y 与 x 的对应关系叫做函数关系。

函数完全由对应法则和定义域所确定，至于自变量和因变量本身的具体意义，以及用什么记号来表示，那是无关紧要的。例如

$$f(x) = x^2 \qquad 与 \qquad g(t) = t^2$$

是同一个函数。而

$$y = \lg x^2 \qquad 与 \qquad y = 2\lg x$$

是两个不同的函数，因为它们的定义域是不相同的，前者的定义域是 $x \neq 0$ 的任何实数，后者的定义域是 $x > 0$ 的任何

实数。

如果同时考察几个不同的函数，就需用不同的记号以示区别。常用的函数记号除$f(x)$外，还有

$$F(x),\ G(x),\ \varphi(x),\ \phi(x),\ y(x)$$

等等。例如，例1至例3中的函数可分别用记号

$$w=F(h);\ P=\varphi(V);\ T=T(t)$$

来表示。

一般来说，函数的定义域是由所考虑问题的实际意义确定的。但在数学上作一般性讨论时，常常只给出函数的表达式，而没有说明实际背景，这时函数的定义域，就是使表达式有意义的自变量的变化范围。例如函数

$$y=\frac{\log_2(2-x-x^2)}{\sqrt{x+1}}$$

只有当$x+1>0$，且$2-x-x^2>0$时才有意义，所以它的定义域由这两个不等式确定为$-1<x<1$。

在本书中，我们都在实数范围内讨论问题，自变量与因变量所取的数值均为实数。我们知道，全体实数与数轴上所有点之间可以建立一一对应关系，因此，为了方便，我们常把某数x说成是某点x。

有时我们也用所谓区间来表示函数的定义域。设a与b为两实数，且$a<b$，满足不等式

$$a<x<b$$

的实数x的全体叫做**开区间**，记为(a,b)。在几何上，它表示数轴上a与b两点之间（不包括端点a，b）的点的全体（如图1—2$_{(1)}$）。

满足不等式

$$a \leqslant x \leqslant b$$

的实数 x 的全体叫做**闭区间**，记为$[a, b]$，它表示数轴上 a 与 b 两点之间（包括端点）的点的全体（如图1—2$_{(2)}$）。

满足 $a \leqslant x < b$，或 $a < x \leqslant b$ 的实数 x 的全体叫做**半开区间**，分别记为$[a, b)$，$(a, b]$。它们在数轴上的表示如图1—2$_{(3)}$、$_{(4)}$所示。

以上所说的区间都叫**有限区间**。此外，还有所谓无限区间。我们把实数的全体记为$(-\infty, +\infty)$，或写成$-\infty < x < +\infty$，它是一个**无限区间**。这里$-\infty$读作负无穷大，$+\infty$读作正无穷大。正负无穷大都不是数，仅是记号。

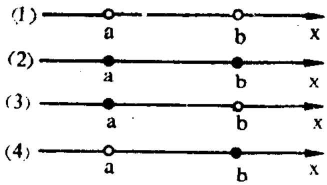

图1—2

另外，满足不等式 $x > a$，$x \geqslant a$，$x < a$，$x \leqslant a$ 的实数 x 的全体分别记为$(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$，$(-\infty, a)$，$(-\infty, a]$，这些都是无限区间。

上面所说的各类区间，可以写成数集的形式，例如

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

引入了区间的表示法以后，例2中函数的定义域可表示为$[V_0, V_1]$，例3中函数的定义域可表示为$[0, 24]$。

在上述三个例子中，例1与例3是分别用表格与图形给出的函数，而例2是用解析式给出的函数，它通过指明运算

的数学式——解析式把函数表示出来。依照它，由自变量的值，可以求出对应的因变量的值。其优点是精确、完整，便于在理论上作分析研究。

函数 $y=f(x)$ 在 $x=a\in A$ 处的值记为 $f(a)$，简称函数值。有时也用记号 $y\big|_{x=a}$ 来表示，即

$$y\big|_{x=a}=f(a)$$

在平面直角坐标系 xoy 中，凡坐标满足方程

$$y-f(x)=0 \quad x\in A$$

的点（x，y）的集合：

$$\{(x,y)\,|\,y=f(x),\quad x\in A\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形（图 1—3）。

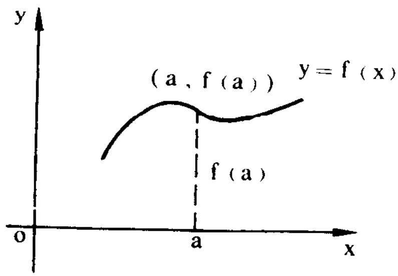

图 1—3

例 4　设　$f(x)=2^x$，求证 $f(a+b)=f(a)f(b)$

证　由于　$f(a)=2^a$，　$f(b)=2^b$

$$f(a+b)=2^{a+b}=2^a\cdot 2^b$$

故得　$$f(a+b)=f(a)f(b)$$ ∎

问题

1．用区间或集合的形式来表示下列函数的定义域

（1）$y=\dfrac{1-x}{x(1+x)}$　　　　（2）$y=\dfrac{x}{\sqrt{\sin x}}$

2．设 $f(x)=2x^3-x+3$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(\frac{1}{2})$，$\frac{1}{f(2)}$，$f(2)+1$，$f(a+1)$。

3．设　$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，试证

$$f(x+t)=f(x)g(t)+g(x)f(t)$$

（二） 几个例子

下面我们再举几个函数的例子

例 5　如图1—4，试将内接于抛物弓形的矩形的面积 A 表示为 x 的函数。

解　由图 1 — 4，内接矩形的宽为$3-x$，高为$2y$，故面积

$$A=2(3-x)y \tag{1.1.1}$$

抛物线的方程为：　$y^2=3x$，将 $y=\sqrt{3x}$代入（1.1.1）得所求函数

$$A=2(3-x)\sqrt{3x}$$
$$0\leqslant x\leqslant 3$$

∎

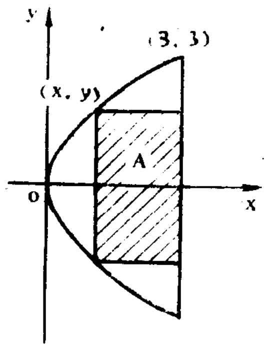

图 1 — 4

例 6　符号函数 sgn x 定义为

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

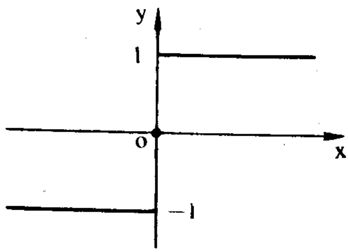

图 1 — 5

如图 1 — 5 所示。由于

$$|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

即得关系式

$$|x|=x\operatorname{sgn}x$$

∎

例 7　锯齿形电压波其波形曲线如图 1—6 所示，当时间 $t \geqslant 0$ 时，电压 V 与时间 t 的函数关系为

$$V = V(t) = \begin{cases} \dfrac{A\omega}{2\pi} t, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{\omega} \\ \dfrac{A\omega}{2\pi} t - A, & \dfrac{2\pi}{\omega} < t \leqslant \dfrac{4\pi}{\omega} \\ \dfrac{A\omega}{2\pi} t - 2A, & \dfrac{4\pi}{\omega} < t \leqslant \dfrac{6\pi}{\omega} \\ \cdots \end{cases}$$

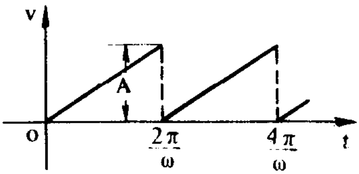

图 1—6

从例 6 与例 7 我们看到，在自变量的不同范围内，因变量与自变量的对应关系要用不同的数学式子来表示。一般，在函数的定义域内，用两个或两个以上的数学式分段表示的函数，叫做**分段函数**。应当指出的是：不要将分段函数误解为是几个函数，它是一个函数，只不过在定义范围内，它的对应关系要用不同的数学式来分段表示而已。

求分段函数的函数值 $f(a)$ 时，要注意自变量的值 a 落在哪一个范围内，以及 a 所在的范围内，表示函数关系的数学式是什么，然后进行计算。

如例 6 中　$\mathrm{sgn}8 = 1$，　$\mathrm{sgn}(-5) = -1$，　$\mathrm{sgn}0 = 0$

又例 7 中　$$V\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{A\omega}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{A}{2}$$

$$V\left(\frac{3\pi}{\omega}\right) = \frac{A\omega}{2\pi} \cdot \frac{3\pi}{\omega} - A = \frac{A}{2}$$

例 8　如图 1—7，设有上底为 1，下底为3，高为 1 的

等腰梯形，E 为底边上任一点，EF 垂直底边，E 与顶点 O 的距离为 x，试把阴影部分的面积 S 表示为变量 x（$0 \leqslant x \leqslant 3$）的函数。

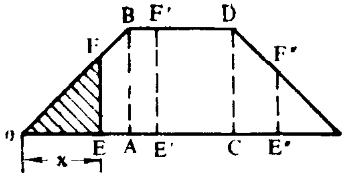

图 1—7

解　当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时

$$S(x) = \triangle OEF\text{面积} = \frac{1}{2}x^2$$

当 $1 < x \leqslant 2$ 时

$$S(x) = \triangle OAB\text{面积} + \text{长方形}AE'F'B\text{面积}$$

$$= \frac{1}{2} + (x - 1)\cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

当 $2 < x \leqslant 3$ 时

$$S(x) = \triangle OAB\text{面积} + \text{正方形}ACDB\text{面积} + \text{梯形}CE''F''D\text{面积}$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1 + (3 - x)}{2}(x - 2)$$

$$= \frac{1}{2}(-x^2 + 6x - 5)$$

综上所述，得

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leqslant 2 \\ \frac{1}{2}(-x^2 + 6x - 5), & 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

第二节　基本初等函数及其图形

在实际问题中遇到的函数是各种各样的，有简单的，也

有复杂的。根据人们长期的社会实践总结出一类最基本的函数，它们是：**幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数**。这五种函数通称为**基本初等函数**。它们好比“砖瓦”一样，人们经常遇到的函数往往都是由这些函数构成的。因此，熟悉这些函数的性质和图形是十分重要的。这五种函数在初等数学里都已讲过，由于它们的重要性，这里进行系统地复习。

1° 幂函数

幂函数： $y=x^{\alpha}$ （ α 为任何实数） (1.2.1)

它的定义域与 α 有关。例如 $y=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$； $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$。但无论 α 为什么值，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上都有定义。它们的图形都过点 $(1,1)$。

2° 指数函数

指数函数： $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ (1.2.2)

它的定义域是整个数轴，即 $(-\infty,+\infty)$。

科学技术中用得最多的是形如

$$y=e^x, \qquad y=\left(\frac{1}{e}\right)^x=e^{-x}$$

的指数函数。其中 $e=2.71828\cdots$。由以 e 为底的指数函数表，可以查到

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
e^x	$\cdots$	0.05	0.14	0.37	1	2.72	7.39	20.09	$\cdots$
e^{-x}	$\cdots$	20.09	7.39	2.72	1	0.37	0.14	0.05	$\cdots$

作出 $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 的图形如图1—8所示。

指数函数 $y=e^x$，$y=e^{-x}$ 有如下特征：

（1）不论x为何值，y总是正数，因此整个曲线位于ox轴上方。

（2）当 $x=0$ 时，$y=e^0=1$ 即图形通过点（0，1）。

（3）$y=e^x$ 的值随x的值增加而增加；$y=e^{-x}$ 的值随 x 的值增加而减少。

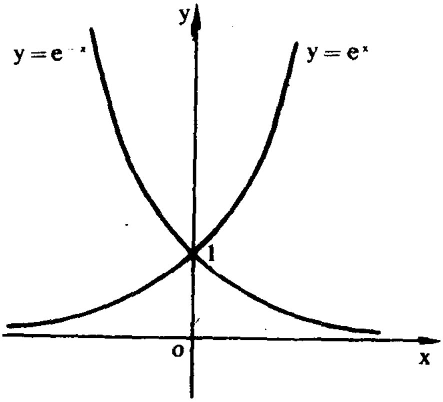

图 1—8

对于一般的指数函数（1.2.2）都具有特征（1）、（2）。且当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 的值随 x 的值增加而增加，当$0<a<1$时，$y=a^x$ 的值随 x 的值增加而减少。

3^0 对数函数

设变量 x、y 有下列关系：

$$y=a^x \qquad (a>0,\ a\neq 1) \qquad (1.2.3)$$

若 x 是自变量，y 是 x 的函数，这个函数是指数函数。现在将 y 作为自变量，由（1.2.3）式确定 x 是 y 的函数，这个函数叫做对数函数，记为

$$x=\log_a y \qquad (a>0,\ a\neq 1) \qquad (1.2.4)$$

这里，我们称对数函数(1.2.4)是指数函数(1.2.3)的反函数。

一般，如果变量 y 在某一实数集内每取一个值，由关系式 $y=f(x)$，变量 x 都有确定的值与之对应，这就确定了变量 x 是变量 y 的一个函数，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=\varphi(y) \tag{1.2.5}$$

习惯上往往用字母 x 表示自变量，用字母 y 表示因变量，为了与习惯一致，常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 中变量 x，y 的记号对换，写成

$$y=\varphi(x) \tag{1.2.6}$$

上面所说的指数函数 $y=a^x$ 的反函数是对数函数 $x=\log_a y$，对换 x，y 的记号后，写成

$$y=\log_a x$$

由对数函数的定义知道，它的定义域是$(0，+\infty)$。

当 $a=10$ 时，$y=\log_{10}x$ 简记为 $y=\lg x$，叫常用对数。

当 $a=e$ 时，$y=\log_e x$，简记为 $y=\ln x$，叫自然对数。

上述两种对数有以下换算公式：

$$\lg x\approx 0.4343\ln x, \qquad \ln x\approx 2.3026\lg x$$

由自然对数表可查得

x	…	0.5	1	2	e	3	4	…
$\ln x$	…	−0.69	0	0.69	1	1.1	1.39	…

作出 $y=\ln x$ 的图形如图 1—9 所示。

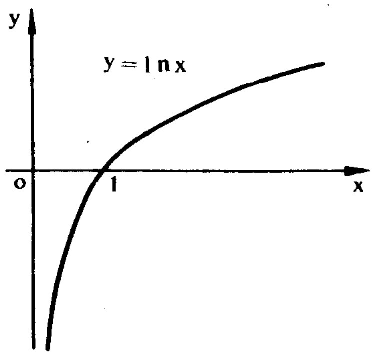

图 1—9

对数函数 $y=\ln x$ 有如下特征：

（1） 由于 $y=\ln x$ 的定义域是$(0,+\infty)$，因此，整个曲线位于 oy 轴右方。

（2） 当 $0<x<1$ 时，$y=\ln x<0$；当

$x>1$ 时，$y=\ln x>0$。当 $x=1$ 时，$y=\ln 1=0$，即图形通过点（1，0）。

（3） $y=\ln x$ 的值随x的值增加而增加。

对于任何$a>1$的对数函数 $y=\log_a x$都具有特征(1)至(3)。

4° 三角函数

$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}\, x$，$y=\mathrm{ctg}\, x$，$y=\sec x$，以及 $y=\csc x$，分别叫做正弦、余弦、正切、余切、正割及余割函数，它们统称三角函数。

函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$；函数 $\mathrm{tg}x$与 $\sec x$ 的定义域是整个数轴除去 $x=(k+\frac{1}{2})\pi$的点，而$\mathrm{ctg}x$ 与 $\csc x$ 的定义域是整个数轴除去 $x=k\pi$的点，其中 $k=0$，±1，±2，…

正弦、余弦函数是周期函数，它们的周期是2π。正切、余切函数也是周期函数，它们的周期是 π。

正弦、余弦、正切、余切函数的图形分别见图 1—10至图 1—13。

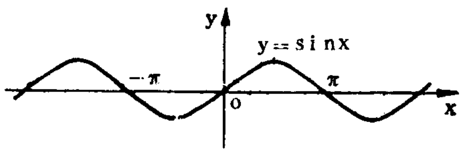

图 1—10

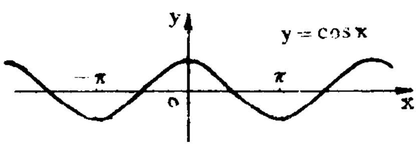

图 1—11