解题思路与方法

JIETISILUYUFANGFA

ETISILUYUFANGFA

初中几何

王 磊 王贵宾 姚晓冬／主编

北方妇女儿童出版社

解题思路与方法

·JIETISILUYUFANGFA·

JIETISILUYUFANGFA

初中几何

思创图书工作室／策划
王 磊　王贵宾　姚晓冬／主编

北方妇女儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

解题思路与方法．初中几何／王磊主编．—长春：北方妇女儿童出版社，2001.6
ISBN 7-5385-1860-6

Ⅰ.解...　Ⅱ.王...　Ⅲ.几何课—初中—解题
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 027490 号

解题思路与方法·初中几何

主　编　王　磊
责任编辑　王振营
出版者　北方妇女儿童出版社
发行者　北方妇女儿童出版社文教图书发展中心
地　址　长春市人民大街 124 号出版大厦 11 层
电　话　0431-5678573
印　刷　**长春市南关文教印刷厂**
开　本　1/32 850×1168(毫米)
印　张　20.25

2001 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN 7-5385-1860-6/G·1153
定价:22.00 元

序

数学——思维的体操。平面几何尤具魅力。中学阶段，结合教学，正确培养和拓展学生的思维能力，对造就新世纪创造型人才，至关重要，有鉴于此，如何以教材为依托，传授知识，导引方法，揭示技巧，教给学生分析，解决问题的金钥匙，使教学生动活泼，更具有开拓性？如何在教师的主导作用下，充分发挥主体作用，优化思维，提高技能，增强能力，培养应用意识，学得轻松愉快，变得更加聪慧？这是我们在长期的实践中探索的问题。

本书根据最新修订版教学、考试大纲和教材编写，依据减负与素质教学培养学生应用、创新和开放探索能力优化设计，分四编阐述教学的内容和思想方法。第一编“内容方法篇”按教材知识结构体系总结内容，抽出问题，提炼方法，内容重点突出，具有一定的延伸性；问题相对集中，具有一定的思考性；方法来路自然，具有较强的思维性，每章都精选了适量的能力提高题使训练具有针对性。第二编“学科方法篇”，方法阐述通俗，具有较好的可接受性，第三编“几何型综合题的解题方法”，第四编“几何应用问题的解题策略与方法”，这两编体现了能力发展的层次性。问题的解法灵活具有一定的开拓性，能力可受到多方面的培养，四编内容构成了一个统一的整体前后呼应，形成了平面几何思想与知识结构相互联系，相互促进的教学整体。

具体说来，本书具有如下特点：

(1)既重视教学内容的归类总结，又注意教材中渗透的数学思想，教学方法的揭示与挖掘，全书涵盖了现行新教材的全部内容，也对主要内容作了适当的延伸和补充，更注重了在这一过程中对数学思想方法功能的系统表达，因此，它既是一本布局新颖的复习参考书，也是一本富有开发

性的数学思想方法的课外读物。

(2)本书取材于平面几何教学实体,讲例主要来自于教材,各省市中考题以及数学竞赛题,通过深入浅出的分析,力图使读者明确和掌握所论述的数学思想方法。

(3)每章配有适量有针对性的训练题,为掌握数学知识、技能、方法进行针对性训练,通过这种针对性训练,开启智慧的大门,克服解题的盲目性,从题海中解脱出来,提高解题能力。

(4)本书知识的归类、思想方法的论析、讲例的安排、训练的布置,在体例上坚持由易到难,由浅入深,由具体到抽象,这种循序渐进的原则,力图使本书成为莘莘学子学习知识和参加中考的有力武器,同时也是沤心沥血的园丁在教学上的有力助手,以满各个层次师生的需要。

本书由王磊、王贵宾、姚晓冬共同主编,参加编写的有:周赫、李杰、齐丽、王贵宾、姚晓冬、李荣君、王贵平、王如芹,池立本、韩丹、宋文君、韩玉梅、马萍、孙丽娟。

由于水平有限,加之时间仓促,书中难免有疏漏和不足之处,敬请广大读者不吝指正。

也真诚希望本书对读者开卷有益,成为您学习的得力助手。

编　者

目　录

第一编　内容方法篇

第一章　三 角 形

☞典型例题解析

☞方法导引与解后评注

☞实战能力测试

☞参考答案

一、合理选择判定公理来判定两个三角形全等的策略与方法.

由于三角形全等的判定公理有4个,所以根据不同的已知条件,合理选择适用的公理是一种重要的能力.

一方面,可以根据已知相等的角的个数来选择公理,也可以根据已知相等的边的条数来选择公理.

一组角对应相等	两组角对应相等	没有对应相等的角
SAS	ASA 或 SAA	SSS

一组对应边相等	两组对应边相等	没有对应相等的边
ASA 或 AAS	SAS	无

确定了判定公理以后,就要把所缺的条件补齐才能做出结论.

典型例题解析

【例 1】 已知如图 1-1，△*ABC* 中，*D*、*E* 都是 *BC* 边上的点，*BD* = *EC*，∠*B* = ∠*C*. ∠*BAE* = ∠*CAD*

求证：(1)△*ABE*≌△*ADC*

(2)△*ABD*≌△*ACE*

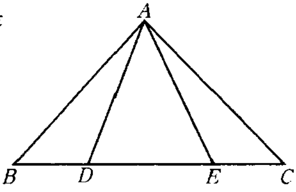


图 1-1

【方法导引】 为证明(1)成立，在选择判定公理时容易发现在△*ABE* 和△*ACD* 中，已有两组角分别对应相等，可考虑的公理有 *ASA* 或 *AAS*；若选 *ASA*，应补条件 *AB* = *AC*；若选 *AAS*. 则应补条件 *AD* = *AE* 或 *BE* = *DC*. 再根据已知条件 *BD* = *EC*. 自然可以推得 *BE* = *DC* 成立，问题就迎刃而解了.

为证明(2)成立，则容易发现在△*ABD* 和△*ACE* 中，只有一组角相等；∠*B* = ∠*C*，应选择定理 *SAS*. 需补足的条件是 *AB* = *AC* 且 *BD* = *EC* 由于本例没有条件 *AB* = *AC*，所以这个选择难以实现，只能重新选择再审视已知条件：由∠*BAE* - ∠*DAE* = ∠*CAD* - ∠*DAE*. 可见有条件∠*BAD* = ∠*CAE*，再考虑选择 *ASA* 或 *AAS*. 最后确定 *AAS* 可用就不是困难的事了.

可见，解题的思路，首先要有一定的规律，按照一定的程序，也要有足够的灵活性，特别是按照某种规律，受阻时，灵活性就是不可缺少的了.

二、寻找全等三角形的解题策略与方法

(一)在对称图形(包括轴对称与中心对称)中寻找是一个十分重要的途径.

典型例题解析

【例 1】 已知：如图 1-2，*PA* = *PC*，*AB* = *CD*. 求证：∠1 = ∠2

【方法导引】 从要证明的结论∠1 = ∠2 分析，所给的图形应是一个轴对称图形，处于轴对称位置的有可能全等的三角形共有四对，即(1)△*PAO* 与△*PCO*；(2)

$\triangle PBO$ 与$\triangle PDO$；

(3)$\triangle ABO$ 与$\triangle CDO$；(4)$\triangle PAD$ 与$\triangle PCB$

这其中(1)、(2)两种情况的三角形中分别含有$\angle 1$ 和$\angle 2$，但它们全等的条件不具备，而只有(4)中的两个三角形具备了全等的条件. 因此，此题宜从证明$\triangle PAD \cong \triangle PCB$ 入手，逐步为含有$\angle 1$ 与$\angle 2$ 的一对三角形创造全等条件，从而证出$\angle 1=\angle 2$.

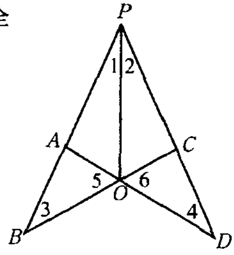


图 1－2

【证明】 $\because PA=PC, AB=CD, \therefore PB=PD$

在$\triangle PAD$ 与$\triangle PCB$ 中

$\because PA=PC, \angle APD=\angle CPB$,

$PD=PB \quad \therefore \triangle PAD \cong \triangle PCB(SAS)$

$\therefore \angle 3=\angle 4$.　在$\triangle ABO$ 与$\triangle CDO$ 中

$\because \angle 5=\angle 6, \angle 3=\angle 4, \quad AB=CD$

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle CDO(AAS) \quad \therefore AO=CO$

在$\triangle PAO$ 与$\triangle PCO$ 中

$\because PA=PC, AO=CO, PO=PO, \therefore \triangle PAO \cong \triangle PCO(SSS), \therefore \angle 1=\angle 2$.

【例 2】 已知：如图 1－3 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$. 求证：$\angle B=\angle C$.

【方法导引】 这是教科书中一个重要定理，即“在一个三角形中等边对等角”. 这是一个简单的轴对称图形，处在对称位置的三角形只有一对，即$\triangle ABC$ 与$\triangle ACB$，而且全等的条件已经具备. 由此，我们得到了这个定理证明的一个简捷方法.

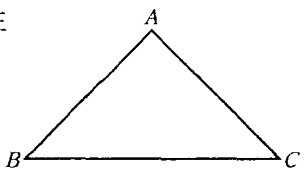


图 1－3

【证明】 在$\triangle ABC$ 与$\triangle ACB$ 中.

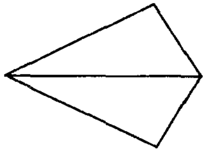
$\because AB=AC, \angle BAC=\angle CAB \quad AC=AB$

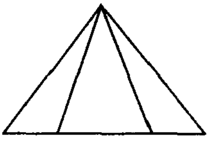
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ACB(SAS)$

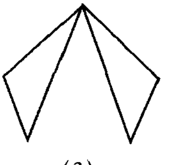
$\therefore \angle B=\angle C$

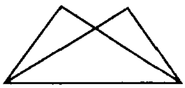
【解后评注】

处于对称位置的两个有可能全等的三角形的基本图形关系大致有下面几种.

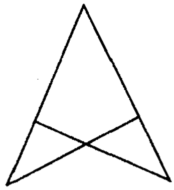

(1)


(2)

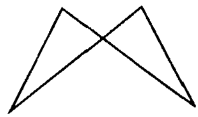

(3)



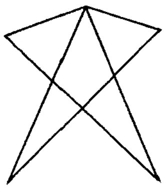
(4)



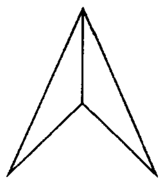
(5)



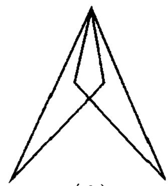
(6)



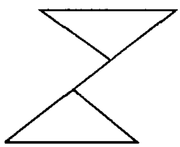
(7)



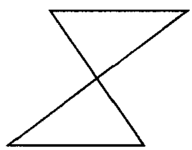
(8)



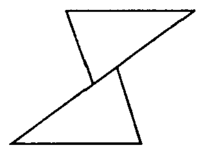
(9)



(10)



(11)



(12)

(二)在旋转图形中寻找全等三角形

【例 3】 已知如图 1－4△ABD、△ACE 都是等边三角形，AE 与 CD 交于 O，BE 交 AC 于 F，CD 交 AB 于 G. 求证：$\angle 1 = 60°$

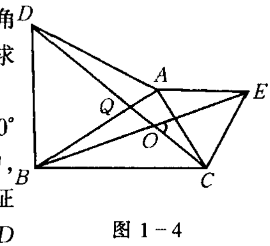


图 1－4

【方法导引】 要证明$\angle 1 = 60°$，而图形中有已知的 60°角. $\angle EAF$ 就是其中的一个. 这样，在△OCF 和△AEF 中，由于有一对对顶角，因此，要证出$\angle 1 = \angle EAC = 60°$只需证明$\angle OCF = \angle AEF$. 而它们所处的另一对三角形△$ACD$ 与△AEB 恰好处于一种旋转状态. 即以 A 为中心，AC 边逆时针旋转 60°，恰好到达 AE 边的位置. 同时，AD 边也经过逆时针旋转 60°到达 AB 边的位置，这样的两个三角形往往是全等的.

【证明】　$\because \triangle ABD$、$\triangle ACE$ 都是等边三角形

$\therefore AD = AB \quad AC = AE, \angle DAB = \angle CAE = 60^\circ$

$\therefore \angle DAC = \angle BAC + 60^\circ = \angle BAE$.

$\therefore \triangle DAC \cong \triangle BAE(SAS) \quad \therefore \angle DCA = \angle BEA$.

即 $\angle OCF = \angle AEF$.

在 $\triangle OCF$ 与 $\triangle AEF$ 中

$\because \angle OCF = \angle AEF, \quad \angle OFC = \angle AFE$.

$\therefore \angle 1 = \angle FAE = 60^\circ$

【解后评注】　本题图形中之所以出现旋转型全等三角形，主要是与存在一组共顶点的等角(即 $\angle BAD$ 和 $\angle EAC$)有关. 通过这个例题的结论，我们还发现：对于 $\triangle ACD$，它的两条边 AD 和 AC 同时以点 A 为中心逆时针旋转 60° 时，它的第三条边 CD 随着转到 EB 的位置，而此时，它们之间的夹角恰好也是 60°，这说明 CD 也旋转了 60°.

【例 4】　已知：如图 1－5，$ABCD$ 是正方形，E 是 AB 延长线上一点，F 是 BC 上一点，且 $BF = BE$　求证：$AG \perp CE$

【方法导引】　要证明 $AG \perp CE$，即要证明 $\angle CGF = 90^\circ$，而图形中有已知的 90° 角，$\angle ABF$ 就是其中的一个. 这样，在 $\triangle CGF$ 与 $\triangle ABF$ 中，由于有了一对对顶角，因此，要证出 $\angle CGF = \angle ABF = 90^\circ$，只需证明 $\angle GCF = \angle BAF$. 而它们所处的另一对三角形 $\triangle ECB$ 与 $\triangle FAB$ 恰好处于一种旋转状态，即以点 B 为中心，BE 边逆时针旋转 90°，恰好到达 BF 边的位置. 同时，BC 边也逆时针旋转 90°，而到达 BA 边的位置. 这样就找到了要证全等的两个三角形.

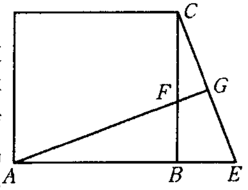


图 1－5

【证明】　$\because ABCD$ 是正方形，　$\therefore \angle ABC = \angle CBE = 90^\circ, AB = BC$

在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle CBE$ 中，$\because AB = CB, \angle ABF = \angle CBE, BF = BE$,

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBE$，$\therefore \angle BAF = \angle BCE$. 即 $\angle BAF = \angle GCF$

在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle CGF$ 中，$\because \angle BAF = \angle GCF, \angle BFA = \angle GFC$

$\therefore \angle ABF = \angle CGF$，$\therefore \angle CGF = 90^\circ$. 即 $AG \perp CE$.

【解后评注】　本例进一步验证了刚才发现的结论，即 EC 边也随着 BE、BC 边的旋转而同时逆时针旋转了 90°.

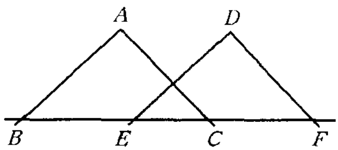
(三)建立一点儿图形变换的观念是寻找全等三角形的另一种途径.

我们知道，能够完全重合的三角形是全等三角形，而在图形中，两个三角形常经

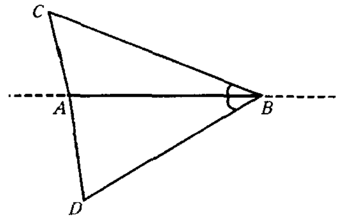
过平移、旋转，翻折才能够做到重合，所以在头脑中想象出图形的平移、旋转、翻折来发现全等关系.或全等形各元素的对应关系是十分重要的直观想象能力.

如以下各图形中(已知条件在括号内注明)就可以想象出图形重合的运动过程

对(1)中，△DEF 向左平移，可以与△ABC 重合



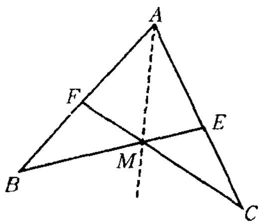
(1)



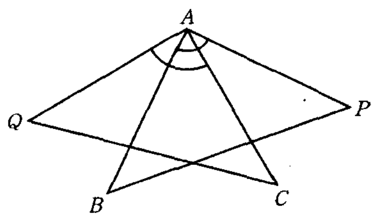
(2)

对(2)中，△ABC 以 AB 为轴翻转 180°，可以与△ABD 重合

对(3)中，△AFC 以 MA 为轴翻转 180°可以与△AEB 重合



(3)



(4)

对(4)中，△ABP 以点 A 为中心沿顺时针方向旋转可以与△AQC 重合

三、全等三角形论证的基本策略与方法

全等三角形的论证，是研究图形性质的重要工具，是进一步学习平面几何知识的基础.这是因为，研究图形的性质，往往要从研究图形中的线段相等关系或角的相等

关系入手.发现和论证全等三角形正是研究这些关系的基本方法.另一方面,论证全等三角形又是训练推理论证的起始,是培养逻辑推理能力的关键一环.

三角形全等的证明的基本模式是:

$$\text{题设}\xrightarrow{\text{全等判定}}\triangle_1\cong\triangle_1'$$

具体的可以分为四步基本格式,下面通过一个例题进行具体的操作.

典型例题解析

【例1】 如图1-6,$AD=AE$,点D,E在BC上,$BD=CE$,$\angle 1=\angle 2$,求证:$\triangle ABD\cong\triangle ACE$

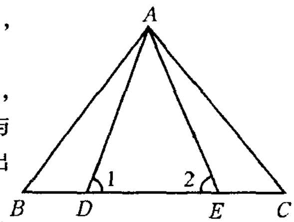


图1-6

【方法导引】 已知条件中已经给出了$AD=AE$,$BD=CE$,要证明$\triangle ABD\cong\triangle ACE$,只需证明$AD$与$BD$,$AE$与$EC$的夹角相等,根据$SAS$公理就可以得出结论.通过分析,我们就可以写出推理的四步格式:

(Ⅰ)证明三角形全等需要有三个条件,三个条件中如有需要预先证明的,应预先证出.例如:

$\because \angle 1=\angle 2$,(已知)

$\angle ADB=180^\circ-\angle 1$,$\angle AEC=180^\circ-\angle 2$(补角定义)

$\therefore \angle ADB=\angle AEC$(等量关系)

(Ⅱ)写出在哪两个三角形中证明全等,格式如:

"在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中"(书写时必须把表示对应顶点的字母写在对应的位置上)

(Ⅲ)按边、角、边顺序列出三个条件,用大括号合在一起,并写上推理的根据,格式如

$$\begin{cases}AD=AE(\text{已知})\\ \angle ADB=\angle AEC(\text{已证})\\ BD=CE(\text{已知})\end{cases}$$

(Ⅳ)写出结论,格式如:

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE(SAS)$

在平面几何中,证明两条线段相等,两个角相等,两条直线互相平行.两条直线互相垂直等问题,常常可以通过证三角形全等来解决,而且在整个证明过程中往往要完