

土 塑 性 力 学

龚晓南 编著



浙江大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了土塑性力学的基本理论。全书分十二章，主要内容包括连续体力学的基本概念，土的变形特性，土的弹性模型，弹塑性模型理论，土的弹塑性模型，粘弹塑性模型的基本概念，内蕴时间塑性理论概要，圆孔扩张问题，滑移线场理论，极限分析法和分叉理论引论等。

本书可作为岩土工程专业研究生教材，也可供土建、水利、交通和力学等专业技术人员参考。

土 塑 性 力 学

龚 晓 南 编 著

责任编辑 李桂云

• • •

浙江大学出版社出版

浙江良渚印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

• • •

开本 850×1168 1/32 印张：10.375 字数：260千字

1990年11月第1版 1990年11月第1次印刷

印数0001—2000

ISBN 7-308-00409-0/O·082 定价：2.65元

前 言

土塑性力学近年来得到了广泛的发展。一方面是工程实践的推动,要求人们重视工程土的实际性状的研究;另一方面是电子计算机和数值计算方法的发展,室内外测试技术的进步,使在分析土工问题时考虑土的真实应力-应变关系成为可能。土是自然历史的产物,是由固体颗粒、水和气体组成的多相组合体,它又是多矿物组合物。这就造成了它的应力-应变关系要比金属材料复杂得多。与金属材料比较,土属于更一般的连续介质。建立在土工试验基础上,以工程土作为研究对象的土塑性力学也具有更大的普遍性。土塑性力学可称为广义连续体塑性力学,传统塑性力学或称金属塑性力学可视为它的一种特殊情况。土塑性力学是一门正在发展的学科。可以相信,土塑性力学的发展一定会促进塑性理论的发展。

土塑性力学是作者的博士课程之一。1984年毕业后,对浙江大学83级以来的岩土工程专业研究生开设了土塑性力学课程,并在读书报告的基础上编写了讲义。1986年秋,在讲义的基础上完成了书稿第一稿。1986年底,作者获联邦德国洪堡奖学金,赴联邦德国Karlsruhe大学土力学与岩石力学研究所工作。1988年回国后结合在联邦德国的研究工作对书稿进行了增删和修改。现在全书分十二章,为:绪论,连续体力学的基本概念,土的变形特性,土的弹性模型,弹塑性模型理论,土的弹塑性模型,粘弹塑性模型的基本概念,内蕴时间塑性理论概要,圆孔扩张问题,滑移线场理论,极限分析法,分叉理论引论。

作者感谢曾国熙等许多教授对于写作本书的热情鼓励和支持，作者在编写过程中还得到许多同行的鼓励和帮助，林钟祥教授在审阅过程中提出许多宝贵的意见。借此机会一并表示感谢。特别是同济大学教授郑大同生前对本书出版的鼓励和关心，内蕴时间塑性理论概要就是根据他的意见而增加的。作者还感谢联邦德国洪堡基金会，在联邦德国的研究工作使本书增添了不少新的内容。由于作者水平有限，书中难免有错误和不当之处，敬请读者批评指正。

作 者

1989年9月于杭州

目 录

第一章 绪 论	(1)
1.1 土塑性力学的研究对象及其特点	(1)
1.2 土塑性力学的发展简史	(5)
第二章 连续体力学的基本概念	(9)
2.1 应力分析	(9)
2.1.1 一点的应力状态, 应力张量	(9)
2.1.2 八面体应力, 应力张量的分解	(13)
2.1.3 应力圆和应力 Lode 参数	(17)
2.1.4 应力空间、应力路径	(20)
2.2 应变分析	(25)
2.2.1 一点的应变状态、应变张量	(25)
2.2.2 应变张量的分解及应变 Lode 参数	(28)
2.2.3 应变空间、应变路径	(29)
2.2.4 应变率张量	(31)
2.2.5 应变增量张量	(32)
2.3 基本方程	(33)
第三章 土的变形特性	(39)
3.1 应力-应变试验与试验曲线	(39)
3.1.1 各向等压力固结试验和土的固结状态	(39)
3.1.2 各向等压力固结三轴试验和加工硬化、加工软化类型 应力-应变关系曲线	(42)
3.2 土的变形特性	(46)
3.3 饱和粘土的归一化性状	(51)
第四章 土的弹性模型	(54)

4.1	引言	(54)
4.2	理想弹性体模型	(56)
4.3	横观各向同性弹性体模型	(56)
4.4	非线性弹性模型	(59)
4.5	一组同时考虑各向异性和非线性的弹性参数实用 方程式	(63)
4.5.1	K_0 固结三轴试验应力-应变曲线	(63)
4.5.2	应力水平和强度发挥度	(66)
4.5.3	正常固结粘土排水切线模量方程式和切线泊松比 方程	(68)
4.5.4	一组考虑各向异性和非线性的弹性参数实用 方程式	(69)
4.6	超弹性模型 (hyperelastic model)	(71)
4.7	次弹性模型 (hypoelastic model)	(73)
第五章	弹塑性模型理论	(74)
5.1	屈服条件的概念	(74)
5.2	几种屈服条件	(78)
5.2.1	Tresca屈服条件	(78)
5.2.2	von Mises屈服条件	(79)
5.2.3	Mohr-Coulomb屈服条件	(80)
5.2.4	双剪应力屈服条件	(82)
5.2.5	广义von Mises屈服条件和广义Tresca屈服 条件	(83)
5.2.6	Zienkiewicz-Pande屈服条件	(84)
5.2.7	Lade屈服条件	(88)
5.2.8	Matsuoka-Nakai屈服条件	(88)
5.2.9	修正剑桥模型屈服条件	(91)
5.3	加载和卸载准则	(93)
5.3.1	理想弹塑性材料的加载和卸载准则	(93)
5.3.2	加工硬化材料的加载和卸载准则	(94)
5.4	Drucker塑性公设和Ильюшин塑性公设	(96)

5.4.1	Drucker塑性公设	(96)
5.4.2	Ильюшин塑性公设	(100)
5.5	塑性位势理论和流动规则	(103)
5.6	加工硬化规律	(105)
5.6.1	等向硬化和运动硬化	(105)
5.6.2	加工硬化规律	(107)
5.7	塑性形变理论和塑性增量理论	(111)
5.7.1	塑性形变理论	(111)
5.7.2	塑性增量理论	(114)
第六章	土的弹塑性模型	(118)
6.1	引言	(118)
6.2	理想弹塑性模型	(119)
6.2.1	本构方程的普遍表达式	(119)
6.2.2	Prandtl-Reuss模型	(121)
6.2.3	Drucker-Prager模型	(122)
6.3	剑桥模型	(124)
6.3.1	临界状态线和Roscoe面	(125)
6.3.2	Hvorslev面	(130)
6.3.3	完全的状态边界面	(133)
6.3.4	能量方程	(133)
6.3.5	剑桥模型屈服面方程	(135)
6.4	修正剑桥模型及其发展	(140)
6.4.1	修正剑桥模型以及状态边界面下的塑性剪切变形	(140)
6.4.2	临界状态模型的发展	(143)
6.5	Lade-Duncan (1975) 模型	(145)
6.6	边界面模型和多重屈服面的基本概念	(149)
6.6.1	边界面模型的基本概念	(149)
6.6.2	多重屈服面的基本概念	(150)
第七章	粘弹塑性模型的基本概念	(153)
7.1	引言	(153)
7.2	粘弹性	(156)

7.2.1	几种简单的粘弹性模型	(157)
7.2.2	粘弹性模型的一般表达式	(164)
7.3	粘塑性、粘弹塑性	(167)
7.3.1	Bingham模型	(167)
7.3.2	三元件弹粘塑性模型	(168)
7.4	蠕变	(170)
第八章	内蕴时间塑性理论概要	(175)
8.1	引言	(175)
8.2	基本概念	(178)
8.2.1	一维塑性本构模型的两种数学描述	(178)
8.2.2	内蕴时间的概念	(180)
8.2.3	本构方程的建立	(181)
8.3	新型内时弹塑性本构方程	(183)
8.3.1	含弱奇异性的内时塑性本构方程	(183)
8.3.2	新型内时弹塑性本构方程	(185)
8.4	内时理论在土力学中应用举例——无粘性土的剪切	(187)
第九章	圆孔扩张问题	(192)
9.1	圆筒形孔扩张问题	(192)
9.1.1	基本方程	(192)
9.1.2	圆筒形孔扩张问题弹性变形阶段解	(194)
9.1.3	Tresca 材料圆筒形孔扩张问题弹塑性解	(195)
9.1.4	Coulomb 材料圆筒形孔扩张问题弹塑性解	(197)
9.2	球形孔扩张问题	(203)
9.2.1	基本方程	(203)
9.2.2	球形孔扩张问题弹性变形阶段解	(204)
9.2.3	Tresca 材料球形孔扩张问题弹塑性解	(205)
9.2.4	Coulomb 材料球形孔扩张问题弹塑性解	(207)
第十章	滑移线场理论	(213)
10.1	基本假设和应力基本方程	(213)
10.2	滑移线的概念	(215)

10.3	应力方程的特征线解法	(217)
10.4	滑移线的性质	(223)
10.5	简单滑移线场	(228)
10.5.1	由两族直线构成的滑移线场	(228)
10.5.2	扇形滑移线场	(229)
10.6	塑性区边界条件	(230)
10.7	基本边值问题	(233)
10.7.1	Cauchy问题	(233)
10.7.2	Riemann 问题	(235)
10.7.3	混合边值问题	(236)
10.8	解的数值方法	(237)
10.8.1	两种基本计算方法	(238)
10.8.2	Cauchy问题的数值方法	(241)
10.8.3	Riemann 问题的数值方法	(241)
10.8.4	混合边值问题的数值方法	(243)
10.9	速度场	(244)
10.10	应力间断线和速度间断线	(248)
10.10.1	应力间断线	(248)
10.10.2	速度间断线	(252)
10.11	楔受单边压力作用时的极限荷载	(253)
10.12	条形基础极限承载力及速度场	(258)
10.12.1	条形基础极限承载力	(259)
10.12.2	速度场	(260)
第十一章	极限分析法	(264)
11.1	基本假定	(264)
11.2	极限荷载的上、下限定理	(265)
11.2.1	静力场和机动场的概念	(265)
11.2.2	虚功方程和虚功率方程	(266)
11.2.3	存在应力间断面和速度间断面的虚功率方程	(267)
11.2.4	上限定理和下限定理	(270)
11.2.5	上下限定理的推论	(274)

11.3	应用上限定理极限分析法	(275)
11.3.1	薄变形层上的刚体滑动	(275)
11.3.2	刚体滑动与均匀压缩相结合	(280)
11.3.3	楔体压缩与刚体滑动相结合	(284)
11.4	应用下限定理极限分析法	(291)
第十二章	分叉理论引论	(301)
12.1	引言	(301)
12.2	分叉分析的基本概念	(305)
12.3	分析实例	(306)
参考文献		(310)

第一章 绪 论

1.1 土塑性力学的研究对象及其特点

物体在外力作用下会产生变形。如果撤除作用在物体上的外力，变形将随之消失，物体完全恢复到原有的形状和尺寸，物体的这种变形称为弹性变形，并认为物体处于弹性变形阶段。如果撤除作用在物体上的外力，物体不能完全恢复到原有的形状和尺寸，而保留一部分变形。恢复的那部分变形称为弹性变形，残留的那部分变形称为塑性变形，并认为物体处于弹塑性变形阶段。

物体在弹性变形阶段，总变形等于弹性变形；在弹塑性变形阶段，总变形等于弹性变形和塑性变形两部分之和。

图1-1 a 表示低碳钢拉伸应力-应变关系曲线，材料在发生屈服（图中 B 点）以前处于弹性变形阶段，发生屈服后处于弹塑性变形阶段。对低碳钢，弹性变形阶段和弹塑性变形阶段有较明确的界限。图1-1 b 表示一组饱和粘土各向等压力固结三轴压缩试验应力-应变关系曲线，曲线上不存在明确的弹性变形阶段和弹塑性变形阶段的界限，或者说不存在弹性变形阶段。在变形很小的时候也伴随着不可恢复的塑性变形。图1-2表示土体加荷至点 A 所产生的弹性变形和塑性变形。

塑性力学是连续体介质力学的一个分支。它研究物体处于弹塑性变形阶段时的应力和变形。它与弹性力学有着密切的关系。弹性力学中大部分基本概念和处理问题的方法都可以在塑性力学中得到应用。塑性力学中应用的平衡方程，几何方程和弹性力学中的相同，不同的是本构方程。本构方程是应力-应变关系的数学表达式。

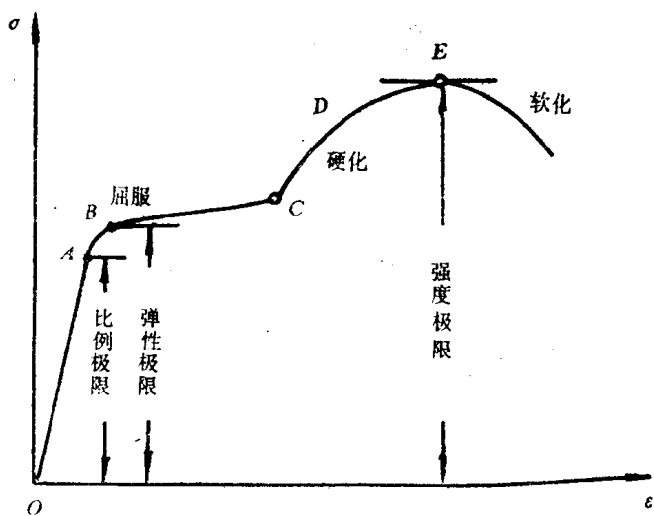


图1-1 a 低碳钢拉伸应力-应变关系

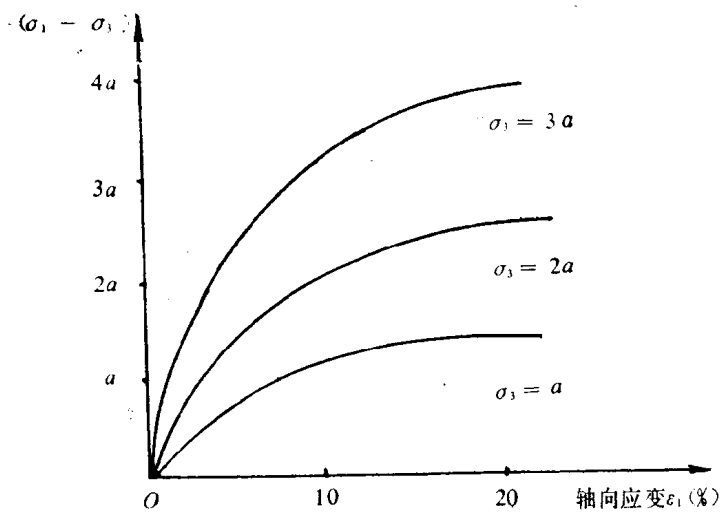


图1 1 b 饱和粘土各向等压力固结排水三轴压缩试验应力-应变关系

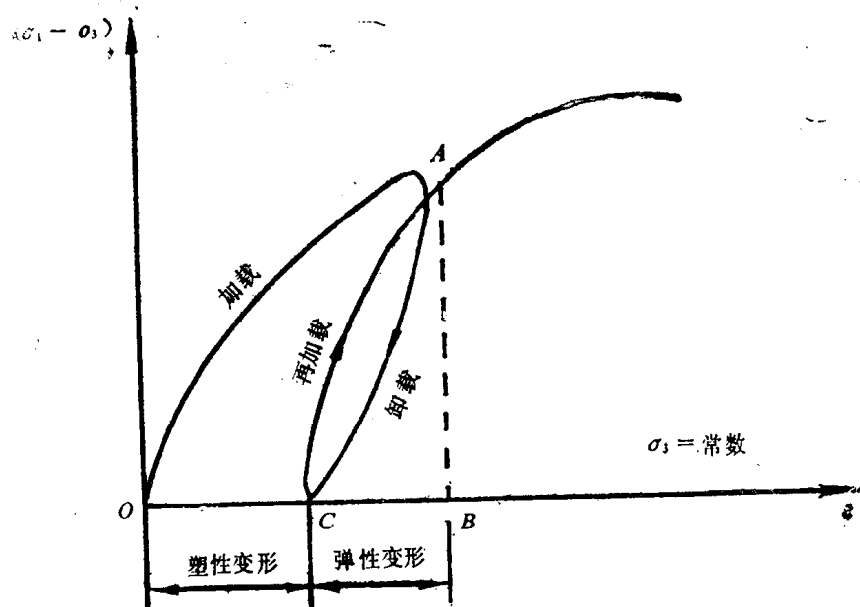


图1-2 弹性变形和塑性变形

弹性变形阶段的本构方程是广义虎克定律。在弹塑性变形阶段，应力与应变的关系要比弹性变形阶段复杂得多。在塑性力学中没有一个象广义虎克定律那样统一的本构方程。物体在弹塑性变形阶段，应力-应变关系具有下列特点：

(1) 应力与应变呈非线性关系。应变增量方向与总应力有关，而不是与应力增量有关（注意：非线性不是弹塑性变形阶段的充分条件，有的弹性材料其应力-应变关系亦呈非线性关系）；

(2) 由于塑性变形是不可逆的，应力与应变之间不再存在单值对应的关系；

(3) 应变不仅与当前的应力状态有关，而且与应力路径（加载历史）有关。

通常，塑性力学是以金属材料试验为基础的，主要研究对象

是金属材料。土塑性力学的试验基础是土工试验，主要研究对象是工程用土。为区别起见，有时前者称为金属塑性力学。

工程用土与金属材料的主要区别是什么呢？金属材料是工厂生产的，土是自然历史的产物，不是工厂的产物。工程用土与金属材料在结构形式上有很大的区别。金属材料是固体，是晶体结构，结构比较均匀；而土体是三相体，且是多矿物组合体，结构比较复杂。固相包括原生岩石矿物，粘土矿物，粒间胶结物和有机质等；液相包括水及溶解的盐类；气相包括空气（有时还有其他气体）以及水蒸汽。对于饱和土，只存在固相和液相。以上这些土的组成部分，都在不同程度上影响着土的力学性质，工程用土的结构形式以及组成成分比金属材料复杂得多，造成了它的本构关系比金属材料也要复杂得多。

工程用土与金属材料在变形特性上有较大的不同，对金属材料进行各向等压力试验可得出以下结论：对于各向同性材料，体积改变是弹性的。而且对于多数金属来说，体积改变是很小的。而对土的试验表明：静水压力也可以引起土体体积的塑性变形，而且剪应力也可能引起土体体积的变化，通常称为剪胀性。金属材料的屈服准则是建立在剪切屈服的基础上，而土体屈服准则不仅要考虑剪切屈服，还要考虑静水压力对屈服的影响。

求解一个具体的工程问题，首先要提出反映这一问题的基本方程的具体表达式，以及边界条件和初始条件。这是一个从实际的工程问题，简化成物理模型，进而抽象成数学模型的过程。通过这一过程，工程问题的求解转化成数学问题的求解。

用塑性力学研究土工问题主要包括下面三个部分：

（1）在试验研究的基础上，建立土体的应力-应变关系模型，即土的本构方程。影响土的本构关系的因素很多。事实上，没有任何一个模型能考虑所有的影响因素，也不可能有一个模型能够适用于所有的土类以及各种土工问题。比较实用的办法是结合具

体的土工问题,建立既能考虑影响材料的应力-应变关系的主要因素,在参数的确定和计算方法的处理上又不太复杂的简化模型。

(2) 模型参数的测定和选用。应该指出:任何一个本构模型的可靠性都是以合适参数的选用为基础的。如果选用的参数不符合具体土工问题的实际情况,理论上再完善的模型也不能提供正确的解答。根据各国学者十多年在这方面的经验,现在已认识到参数的测定和选用相对来说是影响计算结果至为关键的因素。

(3) 选择合理的计算方法。应用塑性理论,采用合理的计算方法,求出在外力作用下,土体处于弹塑性变形阶段的应力、应变和位移。

土体的变形规律很复杂,在土塑性力学中常将处理的问题加以限制,采用以下几点假设:

(1) 连续性假设。假设土体是连续介质,土塑性力学还是属于一般的连续介质力学范围。

(2) 一般情况下,假设土体材料是均质的,各向同性和变形很小的。例外情况将予以说明。

(3) 一般情况下,忽略时间因素的影响,在时间不太长的情况下,可以忽略蠕变和松弛的效应,在应变率不太大的情况下,可以忽略应变率对塑性变形规律的影响。作了这个假设以后,在描述一个塑性变形过程中,时间度量的绝对值对问题的分析没有影响,只要任意取一个单调变化的量作为时间参数,以代表载荷或变形先后次序就可以。例外情况将予以说明。

1.2 土塑性力学的发展简史

对土塑性力学理论的最早贡献是1773年Coulomb 提出 Coulomb屈服准则。他还提出了连续体极限塑性平衡的重要概念,并把它用于挡土墙土压力的计算。后来,在1857年Rankine研究了

半无限体的极限塑性平衡，提出了滑移面的概念。通常认为关于金属塑性力学的研究是从1864年Tresca公布了他的实验报告才开始的。他提出的Tresca屈服准则，实质上是Coulomb屈服准则的一个特例。然而，提出Tresca屈服准则要比Coulomb屈服准则晚了将近100年。土塑性力学初期的发展促进了金属塑性力学的发展。

后来，土塑性力学发展比较缓慢，直到本世纪初期，才取得一些进步。这些进步主要反映在Kötter (1903) 和Fellenius (1926) 出版的著作中。Kötter把直角坐标系换成曲线坐标系去求解塑性平衡的微分方程，建立了滑移线法。Fellenius建立了极限平衡法，他还假设了一些简化的破坏面去求解具体工程问题。Sokolovskii (1965) 把Kötter方程应用于求解土力学中的各种稳定问题。许多学者进一步发展了Fellenius理论，Terzaghi (1925) 在《土力学》一书中对此作了很好的总结和概括。回顾这一阶段土塑性力学的发展情况，可以发现土塑性力学的先驱者没有认识到，应力应变关系在连续介质力学中的重要性。他们无视引入应力-应变关系的必要性，局限于考虑土体的极限平衡，这就限制了土塑性力学理论的迅速发展。

研究金属塑性力学的先驱者没有因袭土塑性力学理论的这个缺陷，而是提出了应力和应变速率之间关系的流动定律，于是金属塑性力学的研究走上了一条独立的道路。后来，金属塑性力学的发展又反过来促进了土塑性力学的发展。

Saint-Venant (1870) 建立了在二维问题中联系应力和应变的方程组，并且认识到，在应力和总塑性应变之间没有一一对应的关系。通过研究，他提出了应变速率主轴和应力主轴相重合的假设。同年，Levy采用了Saint-Venant关于理想塑性材料的概念，提出了应力和塑性应变速率之间的三维关系。此后有一段时期发展也很缓慢。直到本世纪初期提出了许多种屈服条件，其中

最有意义的是Huber (1904) 和 von Mises (1913) 提出的屈服条件。这期间 von Mises还独立地得出了Levy曾提出过的应力-应变关系。1926年Lode证实了Levy-von Mises应力应变关系在一级近似下是准确的。1924年Hencky又采用 von Mises屈服准则提出了另一理论——Hencky理论, 这个理论对于求解塑性微小变形问题很方便。以后, 1930年Reuss依照Prandtl观点, 考虑了弹性应变分量, 把Prandtl所得二维方程式推广到三维表达式, 使Levy-von Mises理论完善化。1937年Nadai考虑了材料的加工硬化, 建立了有限变形情况下的应力应变关系。1944年Ильющин“微小弹塑性变形理论”问世, 由于计算方便而得到欢迎。50年代初, Drucker提出Drucker塑性公设, 对稳定材料, 证明了塑性应变增量与屈服面的正交性, 并提出相关联流动规则的概念。60年代前后, Drucker, Prager等对三维应力状态提出了极值原理, 并且引出上、下限定理, 为极限分析理论的工程应用带来了很大的方便。

金属塑性力学的一般理论为土塑性力学现代理论的发展开辟了一条新的途径。Drucker等 (1957) 提出了静水压力会使岩土材料产生屈服的概念, 因而需要在Mohr-Coulomb锥形屈服面上, 再加上一族强化帽型屈服面, 这是土塑性力学的一大进展。Roscoe和他的学生 (1958~1963) 提出了土的临界状态概念, 并建立了剑桥模型 (Cam-clay模型), 从理论上阐明了土体弹塑性变形特性, 开创了土体的实用模型。这标志着土塑性力学发展新阶段的开始。

70年代前后直至今日, 土体弹塑性模型的研究十分活跃。除了弹塑性模型外, 还建立了各种粘弹性模型、粘塑性模型, 并把近年来得到发展的内蕴时间塑性理论应用到土力学中来。各国学者还重视对提出的各类土的本构模型开展验证工作。通过试验和工程实践的验证, 研究分析各类本构模型的优缺点, 确定其应用