CHUZHONG ZHONGNANDIAN TUPO BAODIAN

初中重难点突破宝典

初二数学重难点突破宝典

主　编　叶尧城

副主编　冯善庆

孙延洲

湖北教育出版社

初中重难点突破宝典

初二数学重难点突破宝典

主　编　叶尧城
副主编　冯善庆
　　　　孙延洲

李作松
罗昭旭　编著

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

重难点突破宝典．初二数学/冯善庆主编．—武汉：湖北教育出版社，2000

ISBN7—5351—2699—5

Ⅰ. 重…　Ⅱ．冯…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 07928 号

出版发行：湖北教育出版社　　武汉市青年路 277 号　　邮编：430015　电话：83625580

经　销：新华书店
印　刷：今印集团有限责任公司　　(434000 荆州市沙市区红门路桥尾)
开　本：850mm×1168mm　1/32　　1 插页　　7.75 印张
版　次：2000 年 5 月第 1 版　　2000 年 9 月第 3 次印刷
字　数：210 千字　　印　数：10 001-20 000

ISBN7—5351—2699—5/G·2195　　定价：9.00 元

前　言

《初中重难点突破宝典》(数、理、化)是依据九年义务教育初中各科最新教学大纲规定的任务和要求,为培养面向21世纪初中学生应具备的学科素质和能力而编写的。旨在密切配合初中各科教学,拓宽学生的知识面,提升学生的综合素质。本书将通过对精典例题的分析与说明,导出学习中的重难点,再对重难点知识进行消化、分解、综合,总结学习方法,归纳认知规律,拓展思维路径,使学生能掌握并运用知识解决问题,且能在应用能力与创新意识上有所突破。

根据当前初中数理化教学的实际需要及学生的知识结构,《初中重难点突破宝典》按教材中的顺序分章节进行编写,每章节由以下四部分组成:

精典题解　　Learn

精选典型例题进行精炼讲解,力求使每道例题都能对该章节的重点或难点有所反映。在分析中着重注意问题的解题思路,阐释思想方法,引导读者掌握分析问题、解决问题的方法(重点突出解决问题的通法),并给出较为详细规范的解答。

重难点透析　　Understand

重点剖析本章的重难点知识,说明重在何处,难在哪里,如何理解,怎样归纳、拓展,以知识为载体培养学生分析问题和解决问题的能力。同时,为进一步加强对重难点知识的理解和把握,也适当补充了一些例子加以阐述。

突破训练 Try

依据剖析的本章内容的重难点，有针对性地精选一些习题供学生练习。其中带★号的习题稍稍增加了一些思维强度和综合度。

创新与应用 Create

为积极贯彻国家教育部有关实施素质教育的文件精神，在本书中特选了一些与生产和生活实际相关的学科问题及创新题型，着意培养综合能力、创新意识和创新能力。

在每章学习结束后，我们均给出了一组单元训练题，其目的是使学生巩固所学的有关知识，同时也便于教师对学生反馈的情况进行评价与调控。书末附有3套综合测试题以及参考答案。

“精、实、新”是本书的主要特色，我们在编写过程中力求例题精、讲解精、习题精；用朴实的文笔，使内容较为充实，能为学生打下扎实的基础；同时在选编例习题时，注意了选用近两年出现的新颖问题和最新题型，培养学生的创新意识和创新能力，从而使得本书具有较强的针对性、启发性、实用性和指导性。

参加本丛书编写的均是湖北省一线优秀的特级教师和高级教师，他们不仅教学经验丰富，而且极富开拓精神，为奉献给读者真正实用的精品，在萃取和钻研最新资料上下了很深的功夫。相信读者在使用本书的过程中就有体会。

在编写和审校中，尽管我们力求避免失误，但疏漏之处仍恐在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

2000年4月21日

目　录

代　数

几　何

代 数

第八章 因式分解

8.1 提公因式法

精典题解

*例 1 下列整式变形中,属于因式分解的是( ).

(A)$(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$

(B)$x^3+2x^2+3x+5=x(x^2+2x+3)+5$

(C)$x^4-2x^2y^2+y^4=(x+y)^2(x-y)^2$

(D)$x^3+2x^2+x=x(x^2+2x)$

分析 对一个式子的变形是否为因式分解,其根据是因式分解的意义,即在保证变形正确的前提下,主要看结果是不是整式的积的形式.

解 (A)式的结果是多项式,所以(A)不是因式分解变形;(B)式右边仍是多项式和的形式,也不是因式分解;(D)式左边≠右边,本身就是错误的变形.因此(C)正确.即(C)符合因式分解的要求,是因式分解变形.

说明 (1)“多项式的乘法”和“因式分解”属互逆变形.如(A)中,从左到右,属“多项式乘法”,而从右到左,则属“因式分解”;(2)提取公因式时,应注意“公因式”是指各项都具有的因式,

* 本书中选择题的 4 个选项中,仅有一项是正确的。

(B)中,x 就不是多项式"x^3+2x^2+3x+5"的公因式;(3)提取公因式时应注意分解后,项数不能减少.(D)中右边应为"$x(x^2+2x+1)$",只因掉"1"而造成变形错误.

例 2　将多项式 $756a^{2m}-280a^m+540a^{m-1}$分解因式($m$ 为大于 1 的整数).

分析　本题的关键问题是在 $756a^{2m}$、$-280a^m$ 和 $540a^{m-1}$三个项中,它们的最大公因式是什么?这里可分两步进行:(1)将各项系数用竖式除法分别分解为 $2^2\times3^3\times7$、$-2^3\times5\times7$ 和 $2^2\times3^3\times5$,它们的最大公因数应为 2^2;(2)对于 a^{2m},a^m 和 a^{m-1},其最大公因式应为 a^{m-1}.

解　$756a^{2m}-280a^m+540a^{m-1}=4a^{m-1}\cdot(189a^{m+1}-70a+135)$.

说明　提取公因式时,一定要提取多项式各项中的最大公因式,否则就算没有完成因式分解.为了便于比较,可将 a^{2m}、a^m 分别改写成$a^{m+1}\cdot a^{m-1}$、$a^{m-1}\cdot a$.

重难点透析

因式分解是多项式变形的重要手段,在化简分式、解一元二次(或高次)方程、解二次不等式中的作用举足轻重.熟练掌握因式分解对提高解题技能十分重要.由于因式分解是整式乘法的逆运算,因此逆向思考问题总是比较困难的,认真掌握分解因式的方法是学习因式分解的关键之所在.提取公因式法是因式分解中最优先考虑的方法,也是用得最多的方法.在综合题的因式分解中,提取公因式法往往成为采用其它方法的前提.

本节内容的难点在于正确判断多项式中的最大公因式.提取公因式后,括号中各项的符号,项数等也常常是造成错误的原因.应在学习中引起注意.

突破训练

1.下面是对多项式 $-60x^{2n+1}+90x^{2n-1}-360x^{n+1}$的因式分解($n$ 为大于 2 的整数),其中正确的是(　　).

(A) $-60x^{2n+1}+90x^{2n-1}-360x^{n+1}=-30x^{n+1}(2x^n+3x^{n-2}-12)$

(B) $-60x^{2n+1}+90x^{2n-1}-360x^{n+1}=-30(2x^{n}-3x^{n-2}-12)$

(C) $-60x^{2n+1}+90x^{2n-1}-360x^{n+1}=-30x^{n+1}(2x^{n}-3x^{n-2}+12)$

(D) $-60x^{2n+1}+90x^{2n-1}-360x^{n+1}=-30x^{n+1}(2x^{n}-3x^{n-1}+12)$

2. 分解下列因式:

(1) $x(x+y)(x-y)-x(x+y)^2$;

(2) $-x^{n+4}+x^{n-1}-x^{2n-1}$($n$ 为大于 1 的整数);

(3) $-126y^{m-3}-105y^{2m-3}+210y^{m-5}$($m$ 为大于 1 的整数)

3. 若代数式 $x(x-3)(x-4)-5(x-3)(x-4)$的值为零,则 x 的值是多少?

4. 若 $x^2=x-1$. 求 $x^{2000}-x^{1999}+x^{1998}$的值.

5. 若 a,b,c 为三角形三条边,且$(a-b)b+c(b-a)=c(c-a)+b(a-c)$. 试问这个三角形是什么三角形?

★6. 分解因式后,$(x^2+5x+3)(x^2+5x-23)+k=(x^2+5x-10)^2$. 则 k 的值是多少?

★7. 若 x 和 y 是大于 1 的整数,求证:代数式$[(x^2y+2yx-3y)-(3x-2x^2-x^3)]$是代数式$(x+y)$的整数倍.

创新与应用

8. 若代数式 $x+1+\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{12}(x+1)+\cdots+\frac{1}{1892}(x+1)+\frac{1}{1980}(x+1)$的值是 89. 试问 x 的值是多少?

9. 已知代数式$(a_1-a_2)a_2+a_3(a_2-a_1)$是正数,而$(a_1-a_2)a_3+a_2(a_2-a_1)$是负数,试判断 a_1,a_2,a_3 的大小关系.

8.2 运用公式法

精典题解

例 1 分解因式:$64x^7y-xy$.

分析 本题两项很明显的有最大公因式:“xy”. 当“xy”提出后,多项式“$64x^6-1$”能否再分解呢? 可将其变形后继续观察. 如“$64x^6-1$”可改写成“$(4x^2)^3-1^3$”,也可改写成“$(8x^3)^2-1^2$”. 可见,还可以用乘法公式继续分解.

解(一)　$64x^7y-xy=xy(64x^6-1)=xy[(8x^3)^2-1^2]$ $=xy(8x^3+1)(8x^3-1)=xy[(2x)^3+1][(2x)^3-1]=xy(2x+1)\cdot(4x^2-2x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)=xy(2x+1)(2x-1)\cdot(4x^2-2x+1)(4x^2+2x+1)$.

解(二)　$64x^7y-xy=xy(64x^6-1)=xy[(4x^2)^3-1]$ $=xy(4x^2-1)[(4x^2)^2+4x^2+1]=xy(2x+1)(2x-1)\cdot[(4x^2)^2+8x^2+1-4x^2]=xy(2x+1)(2x-1)[(4x^2+1)^2-4x^2]$

$=xy(2x+1)(2x-1)[(4x^2+1+2x)(4x^2+1-2x)]$

$=xy(2x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)(4x^2-2x+1)$.

☞说明　一个二次以上的多项式能否分解因式应视题目要求决定．如“$4x^2+2x+1$”和“$4x^2-2x+1$”在有理数范围内不能再分解,那么在以后学习的实数范围内能不能再分解呢？目前我们只考虑在有理数范围内分解因式．

例 2　分解因式:$\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{x^2y^2}{36}+\dfrac{y^4}{81}$.

分析　本题看起来,不能提公因式,也不能利用乘法公式．但我们从项数、系数和指数综合分析,不难发现,从项数、指数来看,符合“和的完全平方”公式,只是从系数看,中间一项应为$2\cdot\dfrac{x^2y^2}{36}$.这给我们以启示.在原多项式中加上一个$\dfrac{x^2y^2}{36}$,再减去一个$\dfrac{x^2y^2}{36}$,使原多项式保持值不变．

解　$\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{x^2y^2}{36}+\dfrac{y^4}{81}=\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{x^2y^2}{18}+\dfrac{y^4}{81}-\dfrac{x^2y^2}{36}$

$=(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9})^2-(\dfrac{xy}{6})^2$

$=[(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9})+\dfrac{xy}{6}][(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9})-\dfrac{xy}{6}]$

$=(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{xy}{6}+\dfrac{y^2}{9})(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{xy}{6}+\dfrac{y^2}{9})$.

☞说明　一个多项式能否运用公式分解因式,不能仅从表面

看，要认真观察、分析．应根据多项式的项数、指数和系数决定能否用公式分解．如果能，还缺什么条件，可通过变形创造条件，以达到分解因式的目的．运用公式法分解因式，要特别注意各项的符号、指数和系数的准确性．结果是否准确，可利用多项式的乘法公式进行检验．

重难点透析

本节内容一是公式多，容易混淆；二是题目类型多，解题思路广；三是提取公因式法和应用公式法联用，变形复杂，项数、指数、系数和符号容易出错．可谓集重难点于一体．

运用公式法分解因式是因式分解中的重要方法，它和提取公因式法一样，不受多项式项数的限制，用途极为广泛．但要熟练运用公式法分解因式，其难度也不可低估．需要较强的观察能力、熟练的变形技能和良好的思维及学习习惯．难就难在：

(1)如何选用公式；

(2)如何通过变形满足乘法公式所需的条件．如 $4x^2$、$\frac{1}{8}x^3$ 可分别变形为 $(2x)^2$ 和 $(\frac{1}{2}x)^3$，$4x^2-4x+1-9y^2$ 可变形为 $(2x-1)^2-(3y)^2$ 等；又如例 2，看起来不能运用公式分解，但变形后可用乘法公式分解；

(3)分解后的因式能否运用公式再分解．如 $(x^3+1)(x^2-x+1)$ 中的 x^3+1 在有理数范围内还可以继续分解．

突破训练

1．下面四个多项式，在有理数范围内不能分解因式的多项式是(　　)．

(A)$x^4+x^2y^2+y^4$　　(B)$3x^2+5y^2$

(C)$\frac{1}{4}x^2+xy+y^2-1$　　(D)$4x^2+2xy+\frac{1}{4}y^2-1$

2．下面因式分解正确的是(　　)．

(A)$x^{12}-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^6+1)$

(B)$x^4y+xy=xy(x+1)(x^2+x+1)$

(C) $y^2(2x-y)-4x(y-2x)-8x^2(y-2x)=(2x-y)(y^2+4xy-8x^2)$

(D) $x^6-64=(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

3. 把下列各式分解因式:

(1) $5x^{n+2}-45x^n$;

(2) $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$;

(3) $0.04a^2-\frac{1}{9}b^2-\frac{1}{6}bc-\frac{1}{16}c^2$;

(4) $\frac{1}{729}x^6-64y^6$.

4. 若 x,m,n 均为大于 1 的不同整数,求证:$3x^{3m+2n}-12x^m$ 的值至少有四个正整数因数 .

★5. 已知 $a^2b^2+1=4ab-a^2-b^2$,求 a,b 的值 .

★6. 已知 $x+y=-2,x^2+y^2=2$,求 $x^4+y^4-2x^2y^2$ 的值 .

创新与应用

7. 图 8-1 是一个边长为 $(a+b+c)$ 的正方体;图 8-2 是边长分别为 a,b,c 的三个正方体;图 8-3 是一个长为 $(a+b)$,宽为 $(b+c)$,高为 $(a+c)$ 的长方体 .用因式分解的方法证明:图 8-1 中的正方体的体积减去图 8-2 中"三个正方体体积之和"的差是图 8-3 中长方体体积的 3 倍 .

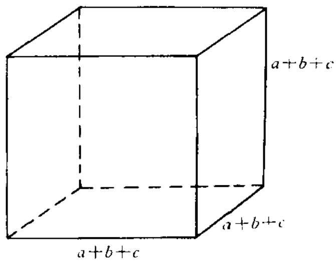

图 8-1

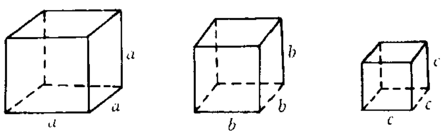

图 8-2

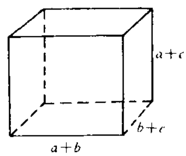

图 8-3

8. 在边长为 $(a+b+c)$ 的正方形中,作图证明 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2$.

8.3 分组分解法

精典题解

例 1 已知：$ab \neq 0$. 而 $a^4b - a^2b^2 + a^3b^2 - ab^4$ 的值为零 . 求证：$|a| = |b|$.

分析 由题意，若结论成立，则有 $a = b$ 或 $a = -b$ 即 $a - b = 0$ 或 $a + b = 0$，故多项式 $a^4b - a^2b^3 + a^3b^2 - ab^4$ 必能被多项式 $(a+b)$ 和 $(a-b)$ 整除，这就提示我们必须对多项式进行因式分解，因式中必有 $(a+b)$ 和 $(a-b)$ 的因式 .

解 $a^4b - a^2b^3 + a^3b - ab^4 = (a^4b - a^2b^3) + (a^3b^2 - ab^4) = a^2b(a^2 - b^2) + ab^2(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)(a^2b + ab^2) = ab(a+b)^2(a-b)$

由题设：$ab(a+b)^2(a-b) = 0$，且 $ab \neq 0$，$\therefore (a+b)^2$ 或 $(a-b) = 0$，即 $a = b$ 或 $a = -b$，故 $|a| = |b|$.

说明 通过分组对多项式进行因式分解 . 其分组的方法较多，但应注意如下原则：(1) 分组仍属于恒等变形；(2) 分组后有利于用其它方法对多项式进行因式分解 .

例 2 证明：多项式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 能被 $x + y + z$ 整除 .

分析 依题意，多项式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 分解因式后，应有一个因式是 $(x + y + z)$. 然而题设条件中有三个立方项，不符合立方和公式的要求 . 因此应通过变形进行转化，把三个数的立方和变成两个数的立方和 . 因为 $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$，所以 $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2$（这一过程称为“补项”）. 于是原多项式可变形为 $(x+y)^3 + z^3 - 3xyz - 3x^2y - 3xy^2$，再通过分组，即可进行因式分解 .

解 $\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$$
\begin{aligned}
&=(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+z^3-3xyz-3x^2y-3xy^2\\
&=[(x+y)^3+z^3]-(3xyz+3x^2y+3xy^2)\\
&=[(x+y)+z][(x+y)^2-z(x+y)+z^2]\\
&\quad-3xy(x+y+z)\\
&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy-yz-xz)\\
&\quad-3xy(x+y+z)\\
&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz).
\end{aligned}
$$

∴多项式 $x^3+y^3+z^3-3xy$ 能被多项式 $x+y+z$ 整除．

说明　“补项”和“拆项”是用分组法分解因式的一项重要技能．如对“$x^4-8x^2y^2+4y^4$”分解因式不好应用乘法公式分解，但如果将 $-8x^2y^2$ 拆成 $(-4x^2y^2)+(-4x^2y^2)$，就可立即运用公式分解：$x^4-8x^2y^2+4y^4=(x^4-4x^2y^2+4y^4)-(2xy)^2=(x^2-y^2)^2-(2xy)^2=(x^2-y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy)=(x-y)^2\cdot(x^2+2xy-y^2)$．可见，拆项和补项在分解因式时，可将山穷水尽的处境变得柳暗花明．至于拆什么项？补什么项？这就要通过观察和联想，具体问题具体分析，并进行有益的探索．但在拆项和补项时，一定要注意两点：(1)要保证是原多项式的等价变形；(2)要有利于分组进行因式分解．

重难点透析

分组分解法，是因式分解的重要方法之一，首先着手多项式的部分因式分解，创造条件，最后达到多项式完全分解，即由局部到整体的变形过程．至于哪些项分为一组合适，除了需要较强的观察能力外，还需要有厚实的基础知识和熟练的等价变形技能，而最困难的还是需要拆项或补项后再进行分组．有关拆项和补项的技能，希望通过实践逐步掌握．

突破训练

1．下面有四个多项式：

(1)$6ax+15b^2y^2-6b^2x-15ay^2$；　　(2)$x^4+x^3y-xy^3-y^4$；