高等专科学校教材

中国计算机学会大专教育学会推荐出版

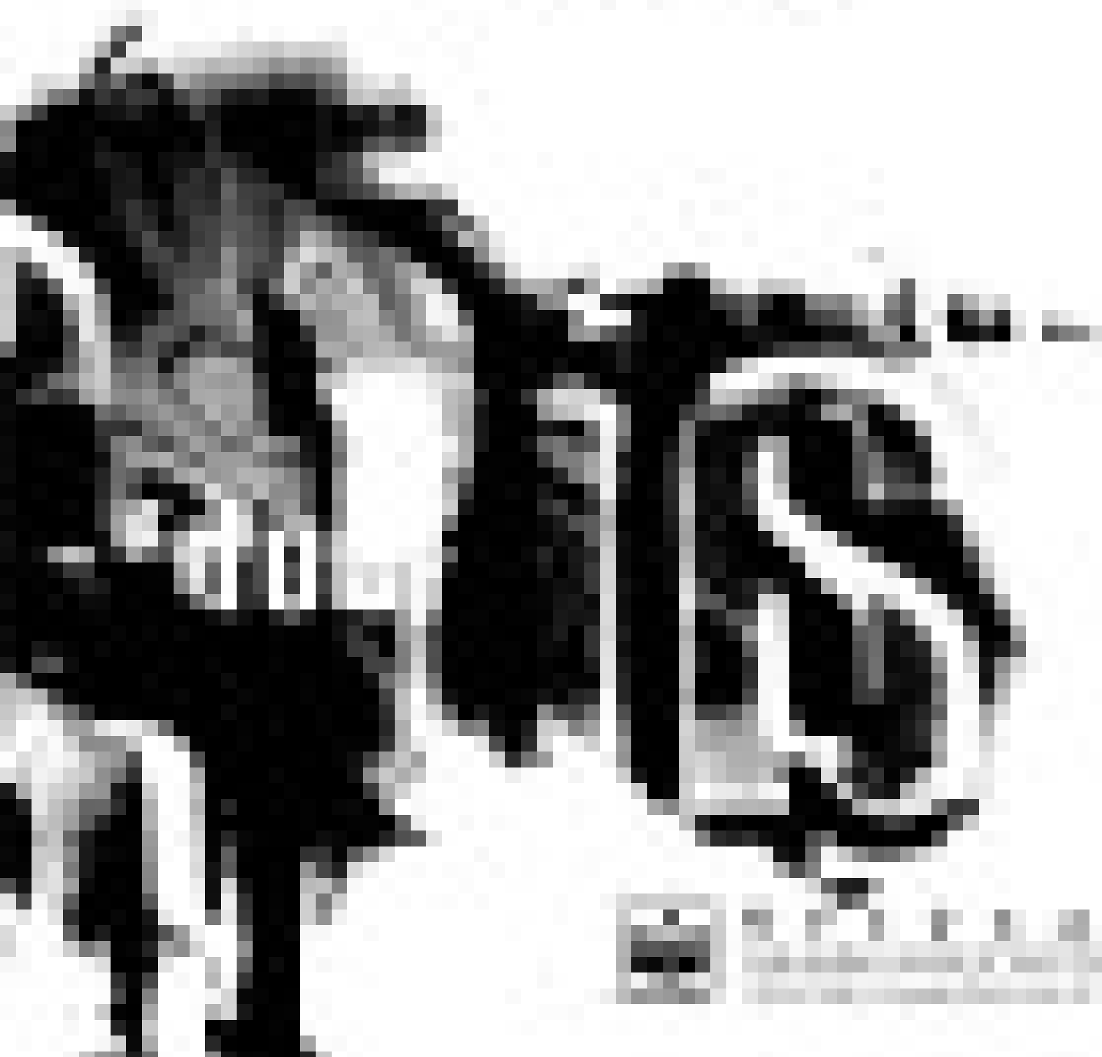
离散数学——学习指导及解题分析

马叔良　顾豫　徐遵　编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL: http://www.phei.com.cn

离散数学

学习指导及解题分析



高等专科学校教材

离散数学

——学习指导及解题分析

马叔良　顾　豫　徐　遵　编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书是与高等专科学校教材《离散数学》相配套的辅导性读物。编写本书的目的是为了帮助读者在学习离散数学时，更好地、更加精确地掌握有关离散数学的基本概念，基本理论和基本方法。对离散数学中的一些难点或重要概念力求给出进一步的或者是更加易于理解的说明。书中包含了《离散数学》中全部练习的解答，对有些练习还给出了多于一种的解法。以期开扩读者的视野，提高他们灵活运用基本概念和基本理论解决问题的能力。

本书不仅适合正在学习离散数学的学生使用，亦可供教授离散数学的教师参考。

丛 书 名：高等专科学校教材
书　　名：离散数学——学习指导及解题分析
编　　者：马叔良　顾　豫　徐　遵
责任编辑：张凤鹏
排版制作：电子工业出版社计算机排版室
印 刷 者：
装 订 者：北京李史山胶印厂
出版发行：电子工业出版社　URL：http://www.phei.com.cn
北京市海淀区万寿路173信箱　邮编 100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1092 1/16　印张：10.75　字数：275.2千字
版　　次：1998年12月第1版　1999年7月第2次印刷
书　　号：ISBN 7-5053-4719-5 / G·372
定　　价：14.00元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作的有关规定，在电子工业部教材办的组织与指导下，按照教材建设适应“三个面向”的需要和贯彻国家教委关于“以全面提高教材质量水平为中心、保证重点教材，保持教材相对稳定，适当扩大教材品种，逐步完善教材配套”的精神，大专计算机专业教材编审委员会与中国计算机学会教育专业委员会大专教育学会密切合作，于1986～1995年先后完成了两轮大专计算机专业教材的编审与出版工作，共出版教材48种，从而较好地解决了全国高等学校大专层次计算机专业教材需求问题。

为及时使教材内容更适应计算机科学与技术飞速发展的需要以及在管理上适应国家实施“双休日”后的教学安排、在速度上适应市场经济发展形势的需要，在电子工业部教材办的指导下，大专计算机专业教材编委会、中国计算机学会大专教育学会与电子工业出版社密切合作，从1994年7月起经过两年的努力制定了1996～2000年大专计算机专业教材编审出版规划。

本书就是规划中配套教材之一。

这批书稿都是通过教学实践，从师生反映较好的讲义中经学校选报，编委会评选，择优推荐或认真遴选主编人，进行约编的。广大编审者，编委和出版社编辑为确保教材质量和如期出版，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，编审与出版工作中的缺点和不足在所难免，望使用学校和广大师生提出批评建议。

中国计算机学会教育委员会大专教育学会
电子工业出版社

附：先后参加全国大专计算机教材编审工作和参加全国大专计算机教育学会学术活动的学校名单：

上海科技高等专科学校
上海第二工业大学
上海科技大学
上海机械高等专科学校
上海化工高等专科学校
复旦大学
南京大学
上海交通大学
南京航空航天大学
扬州大学工学院
济南交通专科学校
山东大学
苏州市职工大学
国营 734 厂职工大学
南京动力高等专科学校
南京机械高等专科学校
南京金陵职业大学
南京建筑工程学院
长春大学
哈尔滨工业大学
南京理工大学
上海冶金高等专科学校
杭州电子工业学院
上海电视大学
吉林电气化专科学校
连云港化学矿业专科学校
福建漳州大学
扬州工业专科学校
连云港职工大学
沈阳黄金学院
鞍钢职工工学院
天津商学院
国营 738 厂职工大学
湖南计算机高等专科学校
中国保险管理干部学院
湖南税务高等专科学校
湖南二轻职工大学
湖南科技大学
北京广播电视大学
天津职业技术师范学院
天津市计算机研究所职工大学
山西大众机械厂职工大学
河北邯郸大学
沈阳机电专科学校
北京燕山职工大学
国营 761 厂职工大学
山西太原市太原大学
大连师范专科学校
江苏无锡江南大学
上海轻工专科学校
上海仪表职工大学
常州电子职工大学
国营 774 厂职工大学
西安电子科技大学
电子科技大学
河南新乡机械专科学校
河南洛阳大学
郑州粮食学院
江汉大学
武钢职工大学
湖北襄樊大学
郑州纺织机电专科学校
河北张家口大学
河南新乡纺织职工大学
河南安阳大学
河南洛阳建材专科学校
开封大学
湖北宜昌职业大学
中南工业大学
国防科技大学
湖南大学
湖南零陵师范专科学校
湖北鄂州职业大学
湖北十堰大学
贵阳建筑大学
广东佛山大学

汀穗电脑学院
湖南纺织专科学校
湖南邵阳工业专科学校
湖南汀潭机电专科学校
湖南株洲大学
湖南岳阳大学
湖南商业专科学校
长沙大学
长沙基础大学
西北工业大学
北京理工大学
华中工学院汉口分院
烟台大学
安徽省安庆石油化工总厂职工大学
湖北沙市卫生职工医学院
化工部石家庄管理干部学院
西安市西北电业职工大学
湖南邵阳师范专科学校

前　言

1997年6月前后,由电子工业出版社教材办、全国大专计算机专业教材编委会和中国计算机学会大专教学学会制定的1996~2000年大专计算机专业教材编审出版规划,得以正式实施。一批共20余种大专计算机专业的教材相继出版。《离散数学》就是其一。这些教材陆续问世以来,有关方面收到读者的反映,要求提供相应教材的习题解答和学习辅导资料。本书正是应这样的要求,承电子工业出版社之邀编撰而成的。

我们希望将本书编写成一本不仅仅是单纯的习题解答,而且是《离散数学》教材所涉及的主干理论的系统归纳。提供给读者一个全面的,而且是融汇贯通的知识体系。就是在习题解答中,也尽量给出解题的思路和一题多解的方法。《离散数学》教材中所配的全部习题的解答方法,在本书每一章中均有较完备的总结。这样做的目的是明显的,就是希望读者在做练习的同时,自觉地提高解题的方法和技巧,比较同一类问题诸不同解法的优劣。我们认为,虽然有些解法,从简练性来看并不是好的,但多方面了解一个问题的解,对于加强基本概念和理论的透澈理解绝对是有好处的。

作为教材的一个补充,有些限于篇幅不便在教材中深入展开的内容和难点,在本书中都可以找到进一步地阐述。为开拓思路,教材中有些内容,则在这里从另一不同的角度作了讨论。特别是加强了将矩阵引入涉及关系和图的一些讨论。由于矩阵是大多数程序设计语言均支持的数据结构,这样就为以后设计处理关系或图论的程序打下了必要的基础。

在讨论一些较难理解或容易产生疑惑的概念时,我们注意到了通过正反两方面来讨论。因为,只是理解了"什么是某某"还不够,同时也了解"什么不是某某"才能完整的理解一个概念。

当然,我们也不可能穷尽一个问题的所有方面。所以,本书在许多地方还留下了一些设问,留给读者自己去思考。不过在一个地方的设问,常常在本书的另一处给出了答案的线索。譬如,格代数中的对偶原理,就在多处以不同层次的形式出现过。

最后,我们还尽力提示读者抽象思维的方法,摆脱过分依赖直观审视问题的习惯。初学一门较为抽象的理论知识时,借助直观(通常是图形或类比熟悉的事物)是必要的。但深刻完整地学懂一个概念和理论,还得借重于抽象思维。否则,运用理论知识解决实际问题时,还是很困惑的事。

以上就是编写本书的宗旨。希望对学习离散数学的人们有所裨益。

本书只是作为学习《离散数学》时辅助之用。习题的解答占了绝大部分。不过,为了使之相对地自成一体,也是为了学过离散数学的读者便于使用,书中各章与《离散数学》教材中各章一一对应。并且将各章中主要的概念和定理(或公式)作了一个简要的概括。为尽可能精简篇幅,教材中引述到的图例不再给出。这时,均以"教材中某章某处"指出其在《离散数学》中的出处。相比较,在引述到本书中的内容或图例时,则以"某某章某处"指出其在本书中的出处。

顺便指出,在我们编写本书时,还发现了《离散数学》教材中一些在付梓时不及更正的错误,在此特向读者致歉。个别习题中的错误,已在本书习题解答中更正。教材正文中的错误,

在第二版已予勘正。

本书由马叔良主编。顾豫和徐遵各自完成了相应的一些篇幅的编撰，在编写本书的过程中，得到有关多方面的大力支持，在此表示深切的感谢。特别是电子工业出版社的编辑和出版人员，为本教材和这本配套书的出版，作了许多工作。提供了极大的支持。作者向他们表示由衷的谢忱。本书的图例底图，由我的女儿马谨完成，向她表示感谢。

我们深感要编撰一本对读者真正有用的学习辅导书是多么困难。尽管我们作了很大努力，想必书中不妥或错误之处仍会存在。诚恳地希望各方专家学者和广大师生及时指正和赐教。无尽感谢！

马叔良
1998年4月于苏州

目　　录

第一章　绪　　言

当前,越来越多的学科专业在它们的教学计划中,将离散数学列为专业基础课。这恐怕是出于以下的考虑:对于每一专业范畴,人们面临的基本上都是自然界(或人类社会)的特定的一个子系统。而这样的系统很多情况下是一个有限结构的,或者说是一种离散结构。而离散数学正是以此为研究对象的。

离散数学的主要内容源于一些抽象的数学专题或分支,如数理逻辑,图论和近世代数中主要是关于群的理论等。

当今科技发展的一个主要特征是多学科交叉关联的所谓边缘学科的层出不穷,这除了要求各学科相互渗透以寻求最自然的契合外,自然会想到的是如何为这样一种关联于多学科、多专业领域的新课题提供一种合适数学工具的问题。可以毫不夸张地说,在很多情况下,为一现实世界的对象及其行为建立一个精致的数学模型时,离散数学是我们用以抽象的主要工具。

学好离散数学就要首先精确地理解并掌握其基本概念。因为概念描述了一类对象或现象最本质的共性。这使我们在以后不管什么时间或地方,遇见这类对象中个别的一个时,都能比较容易地找出它(或它们)与别一个(或一些)对象之间的本质上的共性或差异。如果我们已经具有一套成熟的理论和方法可以解释有关某一类对象的行为,那么当然我们也就不难给出它们中个别对象的具体行为的描述和解。至于如何将一个个别对象的个别的现象,关联至一类对象的普遍现象。这就要看我们是否对由上述一类对象所抽象出的基本概念有深刻的了解了。数学的抽象所完成的恰恰就是从个别到一般的过程。这也正是在看来是不同领域中的不同问题却常常可以以同一种数学手段来解决的缘故。

下面我们就在离散数学的范畴内举一个例子,来说明以上这段听上去太抽象的叙述。对于还没有完成离散数学学习的读者,可以在以后学习的过程中某个恰当的时候回到这里再读以下的文字。

我们知道,定义在集合 A 到集合 B 上的函数 F 是定义在这同样两个集合间的二元关系 R 的子类。具体地说,就是集合 A 到集合 B 的函数(一类对象的抽象)是集合 A 到集合 B 的二元关系(也是一个类的抽象)的子集。所以一切适合于关系的运算和关系具有的普遍的性质,函数也一定是"适应的"。看到这一点以后,那么了解函数的复合运算一点也没有什么困难。而对于两个函数 f 和 g 的左复合的逆,自然可以表示为 g 和 f 各自逆的左复合。

$$(f\cdot g)^{-1}=g^{-1}\cdot f^{-1} \tag{1-1}$$

剩下的只是证明函数的复合以及复合函数的逆也都仍然是函数就可以了。

通常,我们把一个适合于某一类对象 B 的运算也必然适应于它的一个子类 S 的现象,称为"多态性"。我们将上面提到的类 B 称为它的子类 S 的基类。于是可以说,多态性说的是一切适合于基类 B 的运算必然也适合于处理它的子类 S。这种多态性实际上正反映了某些看似不同对象的本质属性的一致性。这种一致性被某一基本概念所完全地刻划。在上面的例子中,"二元关系"就是这样的一个概念。

上面提到的现象,在离散数学本身和其它学科中,在客观世界中,可以说比比皆是,我们着

重提到它，无非是希望大家在今后的学习与工作中，有意识地去注意这一点。

正因为精确掌握一切基本概念的重要性，所以本题解不唯给出《离散数学》教程中习题的解答，我们还重点指出了每一章中包含的基本概念。就是在给出的习题解答中，我们仍注意提示解题的思路。当然，这就使得在本题解的有些解答中，有些叙述对解答本身来说不是必需的。

本题解在章的编排上，与《离散数学》教程的章的编号相同。同样也是为了查阅，每一练习仍将原教程的习题原文排印了出来。

第二章　数理逻辑

2-1　本章的主要概念

一、命题

一个具有确切“真”或“假”性质的陈述句是一个命题。

命题在命题逻辑中是一语法单位。

特别要注意的是命题本身是“真”或“假”与人们主观感觉和当前的认识能力无关。例如，“宇宙中一定有除地球人以外的智慧生命。”就是一例。它的确是一个命题。

二、原子命题

除去命题自身之外，其任何子部分都不是命题，则此命题称原子命题。

三、命题联结词

联结词本身不是命题，但联结词可以与命题一起组合成新的命题。这种由联结词和命题组合成的命题是复合命题。

1. 否定　命题 P 的否定是一个命题，表示为 $\neg P$。当 P 为真时，$\neg P$ 为假；当 P 为假时，$\neg P$ 为真。

2. 合取　命题 P 和 Q 的合取是一个命题。表示为 $P \wedge Q$。当 P 和 Q 都为真时，它才为真；只要 P,Q 中有一个为假或两者均为假时，它都是假的。

3. 析取　命题 P 和 Q 的析取是一个命题。表示为 $P \vee Q$。当 P 和 Q 都是假时，它才是假；只要 P,Q 中有一个为真或两者均为真时，它都是真的。

4. 条件　命题 P 和 Q 组合的条件命题是这样一个命题：表示为 $P \to Q$，且，只有 P 为真同时 Q 为假时，它为假；其余三种情况下，它都是真的。

5. 双条件　命题 P 和 Q 组合的双条件命题是这样一个命题：表示为 $P \rightleftarrows Q$。且，当 P 和 Q 均为真或者均为假时，它为真；当 P 和 Q 一个为真另一个为假时，它为假。

四、命题变量

一个标识符 P 如果本身并不是一个命题，但是，可以指派任一个确定的命题取代它。这样的标识符叫做命题变量或命题变元。

五、命题合式公式

合式公式是按递归定义的一个符号串：

1. 一个命题变量 P、Q、R…是一个合式公式；

2. 若 P 是合式公式，则 $\neg P$ 是合式公式；

3. 若 P、Q 是合式公式，则 $(P \wedge Q)$，$(P \vee Q)$，$(P \rightarrow Q)$，$(P \rightleftarrows Q)$ 都是合式公式；

4. 有限次通过利用以上 1,2,3 各步骤建立的是合式公式。

注意，递归定义是一种将复杂定义归约成简单定义的有效方法。它在定义一个概念的过程中，又用到这个概念本身。但有效的递归决不同于"A 是 A"这样的无限"递归"。有效的递归一定有一个递归基础（如以上的步骤 1）。在递归过程中，最后归约到以上所说的递归基础。

六、永真式

设一个合式公式由 n 个命题变量 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 组合而成，记为 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$。它是永真式，当且仅当在任何一组对变量的指派下，它都成为一个真的复合命题。

七、永假式

设一个合式公式由 n 个命题变量 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 组合而成，记为 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$。它是永假式，当且仅当在任何一组对变量的指派下，它都成为一个假的复合命题。

八、可满足公式

不是永假式的合式公式称为可满足公式。

九、等价

两个公式 A 和 B，它们各自含有的命题变量的并集是 $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$。若对此 n 个变量的任何一组指派均使 A 与 B 成为同时为真或者同时为假的复合公式，则 A 与 B 是等价的公式。记为 $A \Leftrightarrow B$。

十、蕴含

两个公式 A 和 B，它们各自含有的命题变量的并集是 $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$。若在对此 n 个变量的任何一组指派下，当 A 成为真的复合命题时，B 一定也成为真的复合命题，则 A 蕴含 B。记为 $A \Rightarrow B$。

显然，$A \Leftrightarrow B$，当且仅当 $A \rightleftarrows B$ 是永真式。而 $A \Rightarrow B$，当且仅当 $A \rightarrow B$ 是永真式。

同样明白的是：$A \Leftrightarrow B$，当且仅当 $A \Rightarrow B$ 和 $B \Rightarrow A$。

十一、小项

对一个公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 而言，一个由这 n 个变量本身或各自的否定组成的合取式

$$\widetilde{P}_1 \wedge \widetilde{P}_2 \wedge \widetilde{P}_3 \wedge \cdots \wedge \widetilde{P}_n \tag{2-1}$$

称为一个小项，当且仅当上式中的 $\widetilde{P}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 表示或者是变量 P_i 本身，或者是它的否定。

十二、大项

对一个公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 而言，一个由这 n 个变量本身或者各自的否定组成的析取式

$$\widetilde{P}_1 \vee \widetilde{P}_2 \vee \widetilde{P}_3 \vee \cdots \vee \widetilde{P}_n \qquad (2\text{-}2)$$

称为一个大项，当且仅当上式中的 $\widetilde{P}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示的或者是变量本身，或者是它的否定。

十三、主析取范式

一个由公式 A 的若干不相同小项组成的析取式 M，若 M 等价于 A，则称公式 M 是公式 A 的主析取范式。

由于一个永假式没有上述形式的主析取范式，于是我们规定永假式的主析取范式用命题常量 F 来表示。

十四、主合取范式

一个由公式 A 的若干不相同的大项组成的合取式 N，若 N 等价于 A，则称公式 N 是公式 A 的主合取范式。

由于一个永真式没有上述形式的主合取范式，于是我们规定永真式的主合取范式用命题常量 T 来表示。

注意，在不计主析取范式中小项的次序和主合取范式中大项的次序的前提下，任何一个合式公式都有唯一的一个主析取范式和唯一的一个主合取范式。并且由等价的可传递性和对称性可知此主析取范式与主合取范式是等价的。并且所有彼此等价的公式有相同的唯一一个主析取范式和唯一一个主合取范式。

十五、前提与有效结论

设 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 和 C 都是合式公式。若 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 共同蕴含公式 C，即

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C \qquad (2\text{-}3)$$

成立。则我们说公式 C 是这 n 个前提的有效结论。

应该注意，一个有效结论不一定是永真公式，除非所有前提 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 都是永真式。

十六、演绎证明

命题演算中的演绎证明通常是通过构造一个命题公式的序列以完成推理的过程。按推理的机理可以分成以下三类：

1. 直接证明　直接证明构造的命题公式的序列中，每一个公式或者直接就是引证的一个前提 $H_i(i=1,2,\cdots,n)$，或者是一个被在这个序列中它的若干前驱所蕴含的公式。而序列的最后一项必定是推理的有效结论 C。

直接引证前提，我们称为 P 规则；引证一个被蕴含的公式，称为 T 规则。

2. 条件证明　要证的有效结论 C 为一个条件命题公式(如 $A \rightarrow B$)时，将它的前件(A)作为附加前提加入到原有的前提中，然后，推理

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge A \Rightarrow B \qquad (2\text{-}4)$$

这时由上述直接证明方法构造命题公式的序列，序列的最后一项应当给出原有效结论的后件 B。

这种将有效结论的前件作为附加前提而引入推理的规则称为 CP 规则。

3. 间接证明　间接证明是将原推论的有效结论的否定$\rceil C$引入前提，与原有前提一起蕴含一个永假式F(或$R\wedge\rceil R$，其中R是任一个合式公式)。即

$$H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\wedge\rceil C\Rightarrow R\wedge\rceil R \tag{2-5}$$

因此，由反证法(间接证明)构造的公式的序列，最后一项必定是一永假式。

注意，可以证明，以上三种通过构造公式序列方法的演绎证明都和式(2-3)是等价的(参考本章习题22的解答)。

十七、个体

数理逻辑中提到的个体是指一个命题中描述的对象的名字。一般用小写字母$a,b,c,\cdots$等等表示。在某一次推理论证中，所有可能被引用的个体的名字的集合称为这个论证的论域，论域也常称为个体域。

十八、个体变元

所谓个体变元是指这样一些小写字母符号$x,y,z,\cdots$，等等，它们本身并不是任何确定个体的名字，但同时它又可以代表论域中任一个确定的个体，可能时，还可以用一具体的个体去替换它。

十九、谓词

谓词是指命题中描述个体对象的属性或若干个体间联系的语法成份。在所谓一阶谓词(或狭义谓词)中，谓词是常量。即任何谓词都是事先确定不可改变的。

二十、原子命题函数

由一个确定的谓词P和它所描述的一个或多个个体变元组成形式为$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的表达式称为一个n元原子命题函数。

特别地，一个命题变元也被称之为零元谓词。

二十一、谓词公式中的符号

1. 个体常量，$a,b,c,\cdots$等；
2. 个体变量，$x,y,z,\cdots$等；
3. 定义在个体域D上的函数，如$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个n元函数；
4. 谓词符号，在一阶谓词逻辑中，谓词符号表示一个确定的谓词。

以上符号中前三种是关于个体的，通常称为项，最后一种符号是关于谓词的。

二十二、谓词公式中项的一般定义

1. 常量符号是项；
2. 变量符号是项；
3. 若$t_1,t_2,\cdots,t_n$是项，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n元函数符号，则$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是项；
4. 有限次使用上述1,2,3步骤验证的表达式是项。

二十三、量词

量词是谓词逻辑中的一种短语，它束定其后的某一个范围内的表达式中出现的某一个个

体变量的范围，以表明要指认的变量是这个范围内的全体或某一个。

1. 全称量词($\forall x$)。其中 x 称为指导变量，于是在它束定的范围内与指导变量同名的变量被指认，并且表示被量词束定的同名变量可以是个体域中的任一对象。

2. 存在量词($\exists x$)。其中 x 称为指导变量，于是在它束定的范围内与指导变量同名的变量被指认为个体域中某一个对象。

二十四、谓词公式

谓词公式的递归定义如下：

1. 原子命题函数是合式公式；
2. 若 A 是合式公式，则$\neg A$ 是合式公式；
3. 若 A、B 是合式公式，则$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$，$(A\rightleftarrows B)$都是合式公式；
4. 若 A 是合式公式，x 是A 中出现的一个变量，则$(\forall x)A$ 和$(\exists x)A$ 都是合式公式；
5. 只有有限次通过以上1,2,3,4各步骤验证的表达式是合式公式。

特别注意，在一阶谓词逻辑中，量词只是对其后出现的谓词公式中的某一与指导变量同名的变量的量化，它决不量化其中任何谓词。或者说，一个合式公式中的谓词总是谓词常量。

二十五、量词的辖域

量词的辖域是指从量词符号后的第一个符号开始，连续向右直至第一次出现的合式公式。例如

$$(\forall x)((\exists y)P(x,y,u)\rightarrow Q(x,y,u)) \tag{2-6}$$

上式中，量词($\exists y$)的辖域是 $P(x,y,u)$(尽管它后面 $P(x,y,u)\rightarrow Q(x,y,u)$也是合式公式，但从符号 P 开始，首次出现的 $P(x,y,u)$才是($\exists y$)的辖域，即 $Q(x,y,u)$中的变量 y 虽然与($\exists y$)中的指导变元同名，但是它并不被($\exists y$)束定。在此，完全可以将 $Q(x,y,u)$写成 $Q(x,v,u)$而一点也不改变原公式的逻辑含义)。而量词($\forall x$)的辖域却是其后包含量词($\exists y$)在内的整个公式。于是我们看出，子公式 $P(x,y,u)$和 $Q(x,y,u)$中的每一个内含的变量 x 都被($\forall x$)量化。

二十六、约束变量和自由变量

1. 约束变量　约束变量系指某一公式作为一个量词的辖域时，该公式中那个与量化它的量词中的指导变量同名的变量。

2. 自由变量　不是约束变量的任何变量叫自由变量。或者说自由变量是一种不被任一量词量化的变量，它可能出现在某一量词的辖域中，但却与该辖域量词的指导变量不同名。例如式(2-6)中 $P(x,y,u)$中的 u 和$Q(x,y,u)$中的 y,u 都是自由变量。

二十七、对一合式谓词公式的解释

一个解释也称为一个指派，类似于命题逻辑中对命题变量的指派，这里是将一合式公式中所有不确定的因素束定到相应的确定对象上的过程。公式一经解释即成为一个命题。

谓词逻辑中所谓不确定的因素有：谓词、命题变量、建立在个体域上的函数和一些自由变元。于是解释就是：

1. 将每一个自由个体变量束定到个体域中一个确定个体上；