普特南数学竞赛

（1938—1980）

普特南数学竞赛

刘裔宏　许康　吴茂贵　魏力仁译
彭　　肇　　藩审校

湖 南 科 学 技 术 出 版 社

(1938—1980)
普特南数学竞赛
刘裔宏 许 康 吴茂贵 魏力仁 译
彭肇藩 审校
责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1983年5月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32 印张：15.5 插页：1 字数：358,000
印数：1——16,700
统一书号：13204·80 定价：1.65元

译者的话

受普特南促进学术奖金基金会赞助并由美国数学协会主办的威廉·罗韦尔·普特南数学竞赛(The William Lowell Putnam Mathematical Competition)，其试题由名家组成的命题委员会制订，极富独创性，为国际数学界所瞩目。1979年以来，我们陆续将散载于历年《美国数学月刊》(The American Mathematical Monthly)的试题及解答收集摘译，后又托周叔子同志从美国寄回月刊上没有发表的前十多届解答等材料，重新汇译成册，为读者提供了一本长达四十一年的国际著名的数学竞赛的完整资料(个别题未作解答)。

普特南数学竞赛始于1938年，每年举行一次，有来自美国和加拿大数百所高等院校的数千名学生及数百个大学代表队参加，每队三人。竞赛进行一天，分上、下午两试，每次三小时。竞赛设有团体奖与个人奖，授予奖金。团体奖五名，表彰若干名；个人一等奖五名，二等奖五名，表彰若干名，均在《美国数学月刊》上公布，以资鼓励。参加代表队的学生仍计个人成绩，可兼得个人奖。

普特南试题讲究技巧，重视基础与应用，对理工科大学生学习高等数学、准备研究生考试极有参考价值。其中部分试题现已属中学范围，可供中学生练习。至于大、中学教师从事教材编写，例证选讲，考试命题及教学法研究而钻研此书，也能得到有益的启示。

本书翻译所据原本，前二十五届系美国数学协会1980年出

版的第一个单行本(著者A.M.Greasoon，R.E.Greenwood，L.M.Kelly均为知名数学家)，后面各届取材于《美国数学月刊》各期。刘裔宏承译第5—8，11，38—41届，许康承译第12—18，26—28，31届，吴茂贵承译第19—25，29—30，32—33届，魏力仁承译第1—4，9—10，34—37届。限于译者水平，错误之处盼读者指正。

译稿承业师彭肇藩老先生校阅，翻译过程中蒙学兄周叔子同志支持，谨此一并致谢！

译　者

1982年11月

目　次

第一届（1938年4月16日）

上午试题

A–1. 有一个立体，两底位于水平面$z=h/2$与$z=-h/2$内，包围它的侧面是曲面，它的每一个水平截面的面积为

$$a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$$

（特殊情形系数可以为零）。证明：它的体积为

$$V=(1/6)h(B_1+B_2+4M).$$

这里B_1与B_2是底的面积，M是正中间的水平截面的面积。在$a_0=0$时，这个公式包含锥与球的体积公式。

A–2. 有一个浮标由三部分组成，一个圆筒与两个相等的圆锥。其中每一个圆锥的高等于圆筒的高，问当表面积一定时，什么样的形状会有最大的体积？

A–3. 如果一个质点在平面内运动，它的坐标x与y可以表示为时间t的函数，$x=t^3-t$，$y=t^4+t$。证明曲线在$t=0$处有一个拐点，并且质点运动的速度在$t=0$处有一个极大值。

A–4. 伐木工砍一棵树，树干是圆柱形，粗细均匀。它先砍出一道V形槽，槽的两边是平面，两面的交线是通过圆柱的轴的一条水平线，其二面角为θ。如果给定θ，证明平分θ的平面是水平面时，所砍去的材料的体积最小。

A–5. 求下列极限的值：(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{e^n}$；

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1+\sin 2t)^{1/t}dt$.

A-6. 一个游泳者站在正方的游泳池的一角，希望达到对角线方向的对面一角. 设w是步行速度，s是游泳速度($s<w$)。求他达到目的地所需时间最短的路径。(考虑两种情形，(i) $w/s<\sqrt{2}$，(ii) $w/s>\sqrt{2}$)。

A-7. (i) 证明一个薄的均匀的球壳对一个在球外的点产生的引力，相当于这个球壳的质量全部集中于它的中心时所产生的引力。

(ii) 确定在曲面$z=xy$上的所有直线，并将结果图示。

下午试题

B-1. (i) 设A_{ik}是行列式

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

a_{ik}的余子式，D是在d中对应地用A_{ik}代替a_{ik}所得的行列式，证明$D=d^3$。

(ii) 设$P(y)=Ay^2+By+C$是y的一个二次多项式，设二次方程$P(y)-y=0$的根是a与$b(a\neq b)$，证明a与b是双二次方程$P[P(y)]-y=0$的根。据此，写出一个二次方程，使得它的根c与d是上述双二次方程的另外两根，并应用以上结果解下面的双二次方程

$$(y^2-3y+2)^2-3(y^2-3y+2)+2-y=0.$$

B-2. 求方程$yy''-2(y')^2=0$通过点$x=1$ $y=1$的所有的解。

B-3. 有一个直径3吋水平放置的圆盘，正在按每分钟四周

旋转。离圆盘较远但在同一平面上有一个点在发光。一个昆虫放在圆盘的边上离光源最远处，头对光源。这时它立即惊起按每秒1吋爬行，而且总是头对着光源。试建立运动的微分方程，并求出昆虫再次达到圆盘的边上的点。

B-4. 已知抛物线$y^2=2mx$，试从它的那些与曲线的法线重合的所有弦中，求一条长度最短的弦。

B-5. 从等轴双曲线的中心向曲线的各条切线作垂线，求垂足的轨迹。用极坐标写出轨迹的方程，并作草图。

B-6. 求平面$Ax+By+Cz+1=0$与椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

之间的最短距离

（令$h=1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ $m=\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}$）。试用代数式表示并讨论平面在椭球外面的条件。

解答

A-1. 问题中的体积由

$$V=\int_{-h/2}^{h/2}(a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3)\ dz=\frac{a_1h^3}{12}+a_3h$$

得出。而两底的面积与M的面积由

$$B_1=\frac{a_0h^3}{8}+\frac{a_1h^2}{4}+\frac{a_2h}{2}+a_3、$$

$$B_2=-\frac{a_0h^3}{8}+\frac{a_1h^2}{4}-\frac{a_2h}{2}+a_3、$$

$$M=a_3$$

得出。代入公式$(1/6)h(B_1+B_2+4M)$，得

$$\frac{1}{6}h\left(\frac{a_1h^2}{2}+6a_3\right)=\frac{a_1h^3}{12}+a_3h=V.$$

关于锥和球的情形。对于锥，将顶点放在平面$z=h/2$上，底放在平面$z=-h/2$上。则坐标轴z处水平截面面积为

$$A=(B/h^2)(z-(h/2))^2,$$

这里B是底的面积。因为A是二次多项式，故

$$V=(h/6)(B+4(B/4)+0)=(1/3)Bh$$

是熟知的结果。

对于半径为$r=h/2$，夹于两平面$z=-h/2$和$z=h/2$之间的球。在z的水平截面面积为 $A=\pi(r^2-z^2)$。式中A是二次多项式，得

$$V=(h/6)(4\pi r^2)=(4/3)\pi r^3.$$

在球与锥的截面面积公式中，z^3的系数a_0等于0。

A-2。令r是圆筒的半径，h是它的高，已知条件是

$$S=2\pi rh+2(\pi r\sqrt{h^2+r^2})=\text{常数}, \tag{1}$$

浮标的体积是

$$V=\pi r^2h+(2\pi r^2h/3)=5\pi r^2h/3. \tag{2}$$

问题是求满足条件(1) 的V的最大值。 它可以用拉格朗日乘数法。但在这里容易由(1) 中解出h，使得V成为 r 的函数。由(1)

$$(S-2\pi rh)^2=2\pi r^2(h^2+r^2),$$

得 $$h=\frac{S^2-4\pi^2r^4}{4\pi rS}, \tag{3}$$

V的表达式为

$$V=\frac{5r}{12S}(S-4\pi^2r^4). \tag{4}$$

因为r与V一定是正的，涉及的范围为$0<r<\sqrt[4]{S^2/4\pi^2}$.

求导数并令它等于零，

$$\frac{dV}{dr}=\frac{5S}{12}-\frac{100\pi^2r^4}{12S}=0.$$

其唯一临界值是$r_0=\sqrt[4]{S^2/20\pi^2}$. 因为当$r\to 0$或者$r\to\sqrt[4]{S^2/4\pi^2}$时$V\to 0$，并且在它们之间是正的，故在临界值$r_0$处$V$有最大值.

由(3) 求出对应h的值$h_0=(2/5)\sqrt{5}\,r_0$。浮标的式样完全由比值$h_0/r_0=(2/5)\sqrt{5}$确定.

A-3. 因为当$t=0$时，dx/dt不为零。在$t=0$的邻域y作为x的函数，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{4t^3-1}{3t^3-1}=-1-3t^2-\cdots.$$

因此dy/dx在$t=0$处有一个(局部)极大值，所以曲线在$t=0$处有一个拐点.

速度的大小V如下

$$V^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2$$

$$=2-6t^2+\cdots.$$

因此V在$t=0$处有一个(局部)极大值.

A-4. 假设$0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\alpha_2+\theta<\pi/2$，则角$\alpha_1$与$\alpha_1+\theta$的平面之间楔形体小于$\alpha_2$与$\alpha_2+\theta$之间的楔. 因为作角为$\alpha_2-\alpha_1$的一个简单的旋转，看出它是后者的一个真子集.

现在考察任何一个具有截面AOB的角θ的非对称楔，如果A与B是在通过O的水平线的同一侧，则由上面的论证，没有最小的体积.

假设A在水平线下面，B在它的上面. 设AOB在角θ的对称楔SOT的下面(如图)。它的余楔AOS与楔$A'OT$是对称的(如前所证)。它大于楔BOT。因此，

楔$AOB=$楔$AOS+$楔$SOB>$楔$SOB+$楔$BOT=$楔SOT，

故对称楔最小。

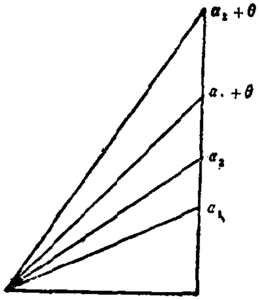

图1

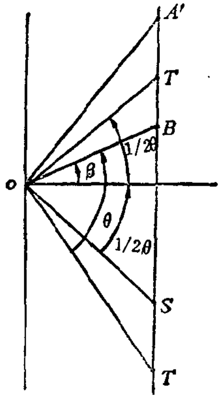

图2

A–5. (i) 由洛必达法则所求极限为零。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0,$$

或由$x>0$时$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}>\frac{x^3}{6}$，

即$0<x^2/e^x<6/x$。当$x\to\infty$时$6/x$ 趋向于零。故所求极限为零。

(ii) 由洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{1/t}\,dt=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{1/x}$$.假定最

后的极限存在。令$\phi(x)=(1+\sin 2x)^{1/x}$则。

$$\log\phi(x)=[\log(1+\sin 2x)]/x.$$

再用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\log\phi(x)=2$$

由指数函数连续性，$\lim_{x\to 0}\phi(x)=e^2$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (1+\sin 2t)^{1/t}dt = e^2.$$

A-6. 设正方池$ABCD$. 游泳者最初在A处希望达到C. 时间最少的路线可以用下面的方式表达.游泳者从A步行到E(AB边上的一点),接着从E游到BC上的F,然后从F步行到C. 注意取路线$AGHC$所需时间等于取$F=C$的路线所需的时间。

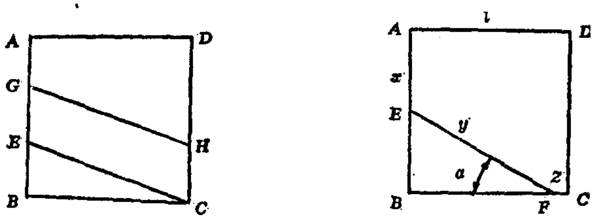

图3

设$AE=x$ $EF=y$ $FC=z$, 则时间$T=(x+z)/w+(y/s)$.设和$x+z$是不变的,则和$y\cos\alpha+y\sin\alpha$也是不变的. 当$\sin\alpha+\cos\alpha$是最大值时y是最小值. 此最大值在$\alpha=45°$时达到。

所以作为一个时间最少的路线, $x=z$及$y=\sqrt{2}\,(l-x)$, l是池的边长. 当$0\leqslant x\leqslant l$, $T=(2x/w)+\sqrt{2}\,(l-x)/s$有最小值.

T是x的线性函数,它的最大值出现在区间的端点. 当$x=0$时$T=\sqrt{2}l/s$. 当$x=l$时$T=2l/w$.

如果$\sqrt{2}l/s<2l/w$,则$w/s<\sqrt{2}$或者相反. 因此, 当$w/s<\sqrt{2}$最小路程是唯一的.游泳者必须从对角线通过水池,由A到C.如果$w/s>\sqrt{2}$, 他必须从A到B到C的步行. 最后,当$w/s=\sqrt{2}$, T不依赖x, 有无穷多条最短路线, 即$\alpha=45°$的任何路线$AEFC$.

A-7. (i) 由高斯定理,如果闭曲面S在它的内部包含质

量M，并且$\vec{F}$是质量M生成的引力场，则通过S的全流量

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA=-4G\pi M,$$

$\vec{n}$是对于S向外的单位法向量，dA是曲面元。

设S是一个半径为R的球，外面的壳与它同心．由对称性在S上$\vec{F}=-F(R)\vec{n}$，其中$F=F(R)$是常量．故由

$$-4G\pi M=\iint_S -F(R)\vec{n}\,\vec{n}\,dA=-F(R)\iint_S dA$$

$$=-4\pi R^2F(R),$$

得$F(R)=GM/R^2$，作为向量$\vec{F}$

$$=-(GM/R^2)\vec{n}.$$

(ii) 设L是通过$(x_0y_0z_0)$的一条直线，它在曲面$z=xy$上．L的参数方程为：

$$x=x_0+\alpha t\quad y=y_0+\beta t\quad z=z_0+\gamma t.$$

这里α,β,γ不全为零.L在已知曲面上的充要条件是，对于所有的t

$$z_0+\gamma t=(x_0+\alpha t)(y_0+\beta t)=x_0y_0+(\alpha y_0+\beta x_0)t+\alpha\beta t^2,$$

t^2的系数$\alpha\beta$为零，故或者$\alpha=0$或者$\beta=0$。

当$\alpha=0$则$\gamma=\beta x_0$，当$\beta=0$则$\gamma=\alpha y_0$。α,β，不能同时为零，否则$\gamma=0$。不妨设参数为1。L的方程或者为

$$x=x_0,\ y=y_0+t,\ z=z_0+x_0t,$$

或者为　$x=x_0+t,\ y=y_0,\ z=z_0+y_0t.$

对应的非参数形式为　$x=x_0,\ z=x_0y,$

或者　$y=y_0,\ z=y_0x.$

反之，这样的直线都在曲面上。

B-1。(i)设α是元素为a_{ik}的已给的行列式的矩阵，β是余因子A_{ik}的矩阵，γ是β的转置，则矩阵的积$\alpha\gamma$是主对角线等于d的

对角矩阵。于是

$$det(\alpha\gamma)=d^4=(det\alpha)(det\gamma)=(det\alpha)(det\beta)=dD.$$

方程 $\quad dD=d^4 \qquad (1)$

是无关的、未定的16个矩阵元素的多项式之间的恒等关系。这样确定的4×4矩阵的行列式不为零，所以在多项式环里 d 不为零。多项式环是一个整域，由(1)得$D=d^3$。

(ii) 因为a是多项式$P(y)-y=0$的一个根，有$P(a)=a$。则$P[P(a)]=P(a)=a$。所以a是$P[P(y)]-y=0$的一个根。同样b也是这个双二次方程的根。

令$Q(y)=P[P(y)]-y$,求Q的另外的零点。注意到$P(y)-y=Ay^2+(B-1)y+C=A(y-a)(y-b)$，即$A(a+b)=1-B$。所以

$$\begin{aligned}Q(y)&=P[P(y)]-P(y)+P(y)-y\\&=A\{P(y)-a\}\{P(y)-b\}+A(y-a)(y-b)\\&=A\{A(y-a)(y-b)+y-a\}\{A(y-a)(y-b)\\&\quad+(y-b)\}+A(y-a)(y-b)\\&=A(y-a)(y-b)R(y),\end{aligned}$$

这里 $\quad R(y)=\{A(y-b)+1\}\{A(y-a)+1\}+1$

$$\begin{aligned}&=AP(y)+Ay-A(a+b)+2\\&=A^2y^2+A(B+1)y+AC+B+1.\end{aligned}$$

根c与d是R的零点，所以c与d为根的所求的二次方程是

$$A^2y^2+A(B+1)y+AC+B+1=0.$$

特别是当$A=1$，$B=-3$，$C=2$与$R(y)=y^2-2y$的情形。$P(y)-y$的零点是$2\pm\sqrt{2}$，所以Q的零点是$2\pm\sqrt{2}$，0与2。

B-2. $1/y^3$是一个积分因子，因为

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y^2}\right)=\frac{yy''-2(y')^2}{y^3}=0.$$

所以$y'/y=C$。从而$-1/y=Cx+D$对于适当的常数C与D成立。为了求通过(1，1)的解，要求$C+D=-1$，故

$$y=1/[1+C(1-x)]. \tag{1}$$

反之，这种形式的任何函数满足已知方程及其初始条件。若$C=0$，函数是常数，定义域可取$(-\infty, +\infty)$。若$C\neq 0$，当$x=(1+C)/C$时(1)的右边为无限，所以(1)的区域要受限制：当$C>0$时为$(-\infty, (1+C)/C)$，当$C<0$为$((1+C)/C, \infty)$。

B-3．选择直角坐标系与极坐标系，取圆盘的中心为原点。昆虫开始在(3/2，0)，光源$(-\infty, 0)$。圆盘按反时钟方向旋转。假设在时间t昆虫位于(x, y)即(γ, θ)。它的速度的水平与垂直方向的分量分别是

$$V_x=dx/dt=-1-(2\pi r/15)\sin\theta$$

$$=-1-(2\pi/15)y, \tag{1}$$

$$V_y=dy/dt=(2\pi r/15)\cos\theta=(2\pi/15)x. \tag{2}$$

对(1)微分并用(2)代入得

$$d^2x/dt^2=-(2\pi/15)dy/dt=-(2\pi/15)^2x. \tag{3}$$

确定x的微分方程

$$d^2x/dt^2+(2\pi/15)^2x=0,$$

它的解为$x=A\cos[(2\pi/15)t-\phi]$。

由(1)，$y=A\sin[(2\pi/15)t-\phi]-(15/2\pi)$。因此昆虫的运动是沿着圆周

$$x^2+\left(y+\frac{15}{2\pi}\right)^2=A^2$$

的等速圆周运动。圆的中心在$(0, -(15/2\pi))$，半径为A，这里A由初始条件$t=0$，$x=3/2$，$y=0$算得$A^2=(3/2)^2+(15/2\pi)^2$。

这个圆周与圆盘的边界交于(−3/2，0)。所以昆虫从这一