数学释疑解难系列丛书

线性代数

释疑解难

4

李大卫　齐淑华　徐鹏春　王学理　主编

大学生同步辅导佳作

考研者强化训练精品

例题经典——为大学生释疑

习题精萃——为考研者解难

NEUPRESS
东北大学出版社

线性代数释疑解难

主　编　李大卫　齐淑华　徐鹏春　王学理
副主编　李建华　沙秋夫　刘　群

东 北 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书将“线性代数”诸多内容进行系统的归类分析，通过对典型问题的解答帮助读者释疑解难，同时，也向读者介绍方便快捷的解题方法。

全书共七讲。第一至六讲均包含内容提要、客观题归类分析、主观题归类分析、释疑解难、单元统测和答案等六部分，第七讲为模拟试题。

本书可作为理工科高等院校学生的学习辅导用书，对于准备“考研”的朋友，也是一本内容翔实的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数释疑解难/李大卫主编．—沈阳：东北大学出版社，2001.9
ISBN 7-81054-626-0

Ⅰ．线…　Ⅱ．李…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 048681 号

（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110004）
电话：(024) 23890881（社务室）　(024) 23892538（传　真）
93687331（发行部）　83687332（出版部）
网址：http://www.neupress.com　E-mail：neuph@neupress.com
东北大学印刷厂印刷　新华书店总店北京发行所发行

开本：787mm × 1092mm　1/16　字数：256 千字　印张：10.25
2001 年 9 月第 1 版　2001 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑：刘宗玉　孟　颖　责任校对：米　戎
封面设计：唐敏智　责任出版：杨华宁

定价：15.00 元

序　言

“线性代数”是理工科高等院校学生的一门必修课，也是“考研”的必考内容。它不但是其他数学课程的基础，也是解决实际问题的工具。另外，由于电子计算机的飞速发展和广泛应用，许多问题经过离散化处理后，需要借助数值计算，而数值计算更离不开“线性代数”的基础知识。

“线性代数”因内容多、理论体系抽象而比较难学，并且又有一套特殊的思维方法和解题思路。这就给学习者带来更多的不便。

编写本书的目的就是要帮助读者理清“线性代数”的脉络，介绍一些方便快捷的解题方法，培养读者掌握其特殊的思维方法和解题思路。本书所选例题均具有典型性，希望通过典型问题和典型习题的解答，收到举一反三、触类旁通的功效。书中编排了少而精的习题，希望读者能够独立解算。

本书主编为李大卫、齐淑华、徐鹏春、王学理，副主编为李建华、沙秋夫、刘群，参加编写的还有张友、谢延波、阎慧臻、李艳坡、杨中兵等。

由于编者水平所限，书中难免存在不妥之处，恳请读者与同仁赐教。

编　者

2001 年 6 月 15 日

目　　录

第一讲　行列式

一、内容提要

(一) 主要定义

1. 行列式　把 n^2 个数排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号$(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

的项，其中 p_1，p_2，…，p_n 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，t 是其逆序数. 这样的项共有 $n!$ 个，其代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式，记为

$$D_n = \Delta(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 a_{ij}称为行列式的第 i 行、第 j 列元素. a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}形成行列式的主对角线，a_{1n}，$a_{2,n-1}$，…，a_{n1}形成另一条对角线.

2. 对角行列式　上(下)三角行列式　对角线以外的元素全为零的行列式称为对角行列式. 其形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}.$$

对角线以下(上)的元素全为零的行列式称为上(下)三角行列式. 其形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} 和 \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} 和 \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix}.$$

3. 转置行列式　把行列式 D 的行列互换所得的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D'

或D^{T}.

4. 余子式　代数余子式　在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列划去后所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式.

(二) 主要定理和公式

1. 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \quad \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

下三角行列式和上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

2. 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3) 如果行列式有两行(列)完全相同，那么行列式为零.

(4) 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k，等于用此数 k 乘以此行列式.

(5) 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号之外.

(6) 如果行列式中有两行(列)元素成比例，那么此行列式为零.

(7) 如果行列式的某一行(列)的元素都是两个数之和，那么此行列式可写成两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(8) 把行列式的某一行(列)各元素乘以同一个数再加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变.

3. 行列式按行(列)展开法则　行列式等于它的任一行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和，行列式任意一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & 当\ i=j, \\ 0, & 当\ i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & 当\ i=j, \\ 0, & 当\ i \neq j. \end{cases}$$

二、客观题归类分析

（一）填空题

【例 1-1】 设 $f(x)=D=\begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$，则 x^3 项的系数为________，x^4 项的系数为________，常数项为________.

【解】 应依次填 -14，8，-2. 含有 x^3 的项是 $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 和 $-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$，即 $-12x^3$ 和 $-2x^3$，故 x^3 的系数为 -14. 含有 x^4 的项为 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，即 $8x^4$，故 x^4 的系数为 8. 常数项为 $f(0)$，即

$$f(0)=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2.$$

【例 1-2】 设方程

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}=0,$$

其中 $a_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 是互不相等的实常数，则方程的全部解为________.

【解】 全部解为 a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1}. 原因是把 $x=a_1$，a_2，$\cdots$，a_{n-1} 依次代入，则左边行列式有两行相同. 这样的行列式必为 0，所以 a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1} 是原方程的解. 但把左边行列式按第一行展开时，成为 $n-1$ 次多项式，故方程的全部解就是 a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1}. 这一问题也可以利用范德蒙行列式的展开式讨论. 方程左边是范德蒙行列式，其展开式中有因子 a_1-x，a_2-x，$\cdots$，$a_{n-1}-x$，其他因子因 $a_i \neq a_j(i \neq j)$ 而不等于零，故有 $a_1-x=0$，$a_2-x=0$，$\cdots$，$a_{n-1}-x=0$，即 $x=a_1$，a_2，$\cdots$，a_{n-1} 为方程的解.

【例 1-3】 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 22 & 13 & 40 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & -9 \end{vmatrix}=$________.

【解】 应填90．注意两种特殊类型的行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

和

$$\begin{vmatrix} & & & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & c_{k1} & \cdots & c_{kk} \\ d_{11} & \cdots & d_{1r} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ d_{r1} & \cdots & d_{rr} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{kr} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \cdots & d_{rr} \end{vmatrix},$$

左边每个行列式的两个空白处至少有一处全为零元素．本题中的行列式属第二种类型，所以它等于

$$(-1)^{3\times 2}\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -45\cdot(-2)=90.$$

如果行列式能利用性质化成上述两种类型，那么可以简化计算．

【例1-4】 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=-4$，设 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个列向量，则 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3)$．这时，行列式 $|\boldsymbol{A}_3+3\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, 4\boldsymbol{A}_1|=$ ________．

【解】 应填16．原因是

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}_3+3\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, 4\boldsymbol{A}_1| &= |\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_2, 4\boldsymbol{A}_1|+|3\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, 4\boldsymbol{A}_1|=4|\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1| \\ &= -4|\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3|=-4(-4)=16. \end{aligned}$$

上述计算过程中，运用了第一讲内容提要(二)中行列式性质(7)，(6)，(4)，(2)．

练 习 1-1

1．若 $a_{31}a_{2k}a_{54}a_{1l}a_{43}$ 是5阶行列式中的一项，则当 $k=$ ________，$l=$ ________时，该项符号为正号．

2．设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -3 & 0 & x \\ 2 & 1 & 3 & x \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 中 x^2 项的系数为 ________，常数项为 ________．

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为4阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为3阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-1$，则 $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|=$ ________，$||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=$ ________．

4. $D=\begin{vmatrix}3&0&-1&0&0\\0&2&4&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&6&4\\0&0&0&5&2\end{vmatrix}=$ ________.

5. 设 5 阶行列式 $D=20$，依次作下列变换：用 3 乘所有元素，交换第二行和第五行，转置，把第一列各元素乘 2 加到第四列对应元素之上，用 9 除第二行各元素，其结果为 ________.

（二）选择题

【例 1-5】 如果 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=M\neq0$，而 $D_1=\begin{vmatrix}3a_{11}&4a_{11}-a_{12}&-a_{13}\\3a_{21}&4a_{21}-a_{22}&-a_{23}\\3a_{31}&4a_{31}-a_{32}&-a_{33}\end{vmatrix}$，则 $D_1=$[　　].

(A) $-3M$；　(B) $3M$；　(C) $12M$；　(D) $-12M$.

【解】 应选(B)．计算如下：

$$D_1=\begin{vmatrix}3a_{11}&4a_{11}&-a_{13}\\3a_{21}&4a_{21}&-a_{23}\\3a_{31}&4a_{31}&-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\3a_{21}&-a_{22}&-a_{23}\\3a_{31}&-a_{32}&-a_{33}\end{vmatrix}=3\times(-1)\times(-1)M=3M.$$

【例 1-6】 $\begin{vmatrix}99&100&203\\202&200&397\\298&300&601\end{vmatrix}=$[　　].

(A) 2000；　(B) -2000；　(C) 2300；　(D) -2300.

【解】 应选(C)．把第二列乘以(-1)加到第一列，乘以(-2)加到第三列，再从第二列提出公因子 100，则行列式变得简单了．这时进行展开运算就容易得多．

【例 1-7】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_3,\ \boldsymbol{A}_4|$，其中 $\boldsymbol{A}_i$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个列向量，则 $|\boldsymbol{A}|=$[　　].

(A) $|\boldsymbol{A}_4,\ \boldsymbol{A}_3,\ \boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2|$；

(B) $|\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\ \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4,\ \boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{A}_1|$；

(C) $|2\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\ -\boldsymbol{A}_3,\ \boldsymbol{A}_4|$；

(D) $|\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\ \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4|$.

【解】 应选(D)．因为对(D)中行列式作如下变换：第三列乘(-1)加到第四列，第二列乘(-1)加到第三列，第一列乘(-1)加到第二列则变为$|\boldsymbol{A}|$．而(A)为$-|\boldsymbol{A}|$，(B)为 0，(C)为$-2|A|$.

【例 1-8】 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$[　　].

(A) $m+n$；　(B) $-(m+n)$；　(C) $n-m$；　(D) $m-n$.

【解】 应选(C)．实际上，$|\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2|=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3|=-m+n$.

练 习 1-2

1. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 6 阶方阵，则[ ]为其行列式中带负号的项.

(A) $a_{61}a_{12}a_{43}a_{34}a_{25}a_{56}$； (B) $a_{21}a_{32}a_{13}a_{46}a_{55}a_{64}$；

(C) $a_{26}a_{14}a_{35}a_{62}a_{43}a_{51}$； (D) $a_{31}a_{12}a_{23}a_{64}a_{56}a_{45}$.

2. 设 $|\boldsymbol{A}|$ 为 4 阶行列式，且 $|\boldsymbol{A}|=-3$，则 $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}|=$[ ].

(A) 9； (B) 3^5； (C) -3^5； (D) 12.

3. [ ]是行列式 $\boldsymbol{A}$ 非零的充分条件.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都不为零；

(B) $\boldsymbol{A}$ 至少有 n^2-n 个元素不为零；

(C) $\boldsymbol{A}$ 的任意两列元素之间不成比例；

(D) 以 $\boldsymbol{A}$ 为系数行列式的线性方程组有惟一解.

4. 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\gamma}_2,\ \boldsymbol{\gamma}_3,\ \boldsymbol{\gamma}_4]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}_2,\ \boldsymbol{\gamma}_3,\ \boldsymbol{\gamma}_4]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_4$ 为 4 维列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=-2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|=$[ ].

(A) -14； (B) 14； (C) 108； (D) -108.

5. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 $n(\geqslant 2)$ 阶方阵，则必有[ ].

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$； (B) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$；

(C) $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|=||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|$； (D) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|$.

三、主观题归类分析

（一）三阶、四阶行列式的计算

以下采用一些简单记号表示行列式的运算，在第二讲矩阵的初等变换中也采用这样的记号. 这些记号及其意义列举如下：

$r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$表示交换第 i 行(列)和第 j 行(列).

$r_i \times k(c_i \times k)$表示以数 k 乘第 i 行(列)各元素.

$r_i \div k(c_i \div k)$表示从第 i 行(列)提出公因子 k.

$r_j + kr_i(c_j + kc_i)$表示把第 i 行(列)各元素的 k 倍加到第 j 行(列)的对应元素之上.

$r_j - kr_i(c_j - kr_i)$表示从第 j 行(列)各元素中减去第 i 行(列)对应元素的 k 倍.

【例 1-9】 计算 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$.

【解】 $$D \xlongequal[\substack{c_1\div\alpha \\ c_2\div\beta \\ c_3\div\gamma}]{\substack{r_1\div\alpha \\ r_2\div\beta \\ r_3\div\gamma}} \alpha^2\beta^2\gamma^2 \begin{vmatrix} 1+\dfrac{1}{\alpha^2} & 1 & 1 \\ 1 & 1+\dfrac{1}{\beta^2} & 1 \\ 1 & 1 & 1+\dfrac{1}{\gamma^2} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha^2\beta^2\gamma^2\left[\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)+1+1-1-\frac{1}{\beta^2}-1-\frac{1}{\alpha^2}-1-\frac{1}{\gamma^2}\right]$$

$$= \alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\right)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1.$$

注 直接用对角线法展开也可.

【例 1-10】 计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

【解】

$$D \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3+3c_1} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 12 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } r_2 \text{ 展开}} -2\begin{vmatrix} 1 & 12 & -3 \\ 1 & 8 & -4 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2-8c_1]{c_3+4c_1} -2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -37 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } r_2 \text{ 展开}} -2\cdot(-1)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -37 & 18 \end{vmatrix} = 2(72+37)=218.$$

【例 1-11】 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

【解】

$$D \xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2-(a+1)^2 & (a+3)^2-a^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2-(b+1)^2 & (b+3)^2-b^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2-(c+1)^2 & (c+3)^2-c^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2-(d+1)^2 & (d+3)^2-d^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & 2a+3 & 3(2a+3) \\ b^2 & (b+1)^2 & 2b+3 & 3(2b+3) \\ c^2 & (c+1)^2 & 2c+3 & 3(2c+3) \\ d^2 & (d+1)^2 & 2d+3 & 3(2d+3) \end{vmatrix} = 0.$$

练 习 1-3

1. 计算 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

2. 验证 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ 能被 $(x-y)$, $(y-z)$, $(z-x)$ 整除.

3. 计算 4 阶行列式

(1) $D_1=\begin{vmatrix}2&-1&1&0\\0&1&2&-1\\3&-1&2&3\\3&1&6&1\end{vmatrix}$； (2) $D_2=\begin{vmatrix}2&3&-3&4\\2&1&-1&2\\6&2&1&0\\2&3&0&-5\end{vmatrix}$.

4. 计算 4 阶行列式

(1) $D_1=\begin{vmatrix}1&1+a&1+2a&1+3a\\1&1+b&1+2b&1+3b\\1&r&r^2&r^3\\1&s&s^2&s^3\end{vmatrix}$；(2) $D_2=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&a_3\\1&a_1+b_1&a_2&a_3\\1&a_1&a_2+b_2&a_3\\1&a_1&a_2&a_3+b_3\end{vmatrix}$；

(3) $D_3=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$.

5. 求方程 $\begin{vmatrix}x&-1&0&0\\0&x&-1&0\\0&0&x&-1\\1&4&6&x+4\end{vmatrix}=0$ 的解.

（二）n 阶行列式的计算

【例 1-12】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$.

【解】 D 中不为零的元素为 $a_{12}=1$，$a_{23}=2$，$\cdots$，$a_{n-1,n}=n-1$，$a_{n1}=n$. 故在 $n!$ 项中，非零项只有 $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=n!$. 其列标排列 $2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot1$ 的逆序数为 $n-1$，所以 $D=(-1)^{n-1}n!$.

【例 1-13】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$.

【解】

$$D\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&x+(n-1)a&\cdots&x+(n-1)a\\a&x&\cdots&a\\a&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\div[x+(n-1)a]}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&x&\cdots&a\\a&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_n-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1\\\cdots}}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\a&x-a&0&\cdots&0\\a&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

【例 1-14】 计算 $n+1$ 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_0&b_1&b_2&\cdots&b_n\\c_1&a_1&0&\cdots&0\\c_2&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_n&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$，其中 $a_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

【解】

$$D\xlongequal[r_{n+1}\div a_n]{\substack{r_2\div a_1\\r_3\div a_2\\\cdots}}a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}a_0&b_1&b_2&\cdots&b_n\\\frac{c_1}{a_1}&1&0&\cdots&0\\\frac{c_2}{a_2}&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{c_n}{a_n}&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1-\frac{c_n}{a_n}c_{n+1}]{\substack{c_1-\frac{c_1}{a_1}c_2\\c_1-\frac{c_2}{a_2}c_3\\\cdots}}a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}&b_1&b_2&\cdots&b_n\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right).$$

注　凡是第一行、第一列和主对角线以外的元素全为零的行列式或可以化成这种类型的行列式均可用上述方法计算.

【例 1-15】 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&1&\cdots&1\\1&1&1+a_3&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$，其中 $a_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

【解】

$$D\xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \cdots}}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}\xlongequal[r_n\div a_n]{\substack{r_2\div a_2\\ r_3\div a_3\\ \cdots}}a_2a_3\cdots a_n\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -\dfrac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -\dfrac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\dfrac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+\frac{a_1}{a_n}c_n]{\substack{c_1+\frac{a_1}{a_2}c_2\\ c_1+\frac{a_1}{a_3}c_3\\ \cdots}}a_2a_3\cdots a_n\begin{vmatrix}1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{a_1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=a_2a_3\cdots a_n\left(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}\right)$$

$$=a_1a_2\cdots a_n+a_2a_3\cdots a_n+a_1a_3\cdots a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

【例 1-16】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}$.

【解】

$$D_n\xlongequal{\text{按}r_1\text{展开}}a_0\begin{vmatrix}x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-2} & 0 & \cdots & x & -1\\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}=a_0x^{n-1}+D_{n-1}.$$

注 $D_1=a_{n-1}$，故由递推公式有：

$$D_n=a_0x^{n-1}+D_{n-1}=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+D_{n-2}=\cdots=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

【例 1-17】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}\lambda & a & a & a & \cdots & a\\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta\\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta\\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha\end{vmatrix}$.

【解】

$$D \xlongequal[r_n-r_2]{\substack{r_3-r_2\\ r_4-r_2\\ \cdots}} \begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_3+\cdots+c_n} \left|\begin{array}{cc:cccc} \lambda & (n-1)a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha+(n-2)\beta & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \hdashline 0 & 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{array}\right|$$

$$\xlongequal{*} \begin{vmatrix} \lambda & (n-1)a \\ b & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

$$=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab].$$

【例 1-18】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

【解】 注意 D_n 不是范德蒙行列式，因为最后一行不是 $n-1$ 次幂．现作一个辅助的范德蒙行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

由范德蒙行列式的展开式知

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\prod_{k=1}^{n}(y-x_k) \\ &= \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n]. \end{aligned}$$

另一方面，如果把 D_{n+1} 按最后一列展开，又有 $D_{n+1}=A_{n+1,n+1}y^n+A_{n,n+1}y^{n-1}+\cdots+A_{1,n+1}$(其中 $A_{i,n+1}$为 D_{n+1}中最后一列各元素的代数余子式)，注意 y^{n-1}的代数余子式恰为所求行列式 D_n 的负值．比较 D_{n+1}的两个表达式中 y^{n-1}项的系数得

$$D_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

【例 1-19】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$.

【解】

$$D_n\xlongequal{\text{按}r_1\text{分成两个行列式}}\begin{vmatrix}\alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix},$$

第一个行列式记为 D_{n1}，则

$$D_{n1}\xlongequal[r_2-r_1]{r_1\div\alpha}\alpha\begin{vmatrix}1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_2]{r_2\div\alpha}\alpha^2\begin{vmatrix}1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$\xlongequal[\substack{r_n-r_{n-1}\\ r_n\div\alpha}]{r_{n-1}\div\alpha}\alpha^n\begin{vmatrix}1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=\alpha^n.$$

第二个行列式记为 D_{n2}，则

$$D_{n2}\xlongequal{\text{按}r_1\text{展开}}\beta\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\beta D_{n-1}.$$

故 $D_n=D_{n1}+D_{n2}=\alpha^n+\beta D_{n-1}$. 由于在 D_n 中 α，β 地位相同，交换位置不改变 D_n，因此 $D_n=\beta^n+\alpha D_{n-1}$. 两式联立求解得 $D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$. 当 $\alpha=\beta$ 时，

$$\begin{aligned}D_n&=\alpha^n+\beta D_{n-1}=\alpha^n+\alpha D_{n-1}=\alpha^n+\alpha(\alpha^{n-1}+\alpha D_{n-2})=2\alpha^n+\alpha^2D_{n-2}\\&=\cdots=(n-1)\alpha^n+\alpha^{n-1}D_1=(n+1)\alpha^n.\end{aligned}$$