高等学校教学参考书

高等数学基础

上册

陈荩民　牛实为　陈以一　编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书分上、下两册出版。上册是由编者根据陈苳民原编的《高等数学基础》上册修订的，内容较第一版有较大的修改，并补写了“常微分方程”一篇。上册主要内容包括一元函数与极限概念；一元函数微积分基本理论及应用；微分方程的概念与最简单的一阶微分方程和高阶常系数线性微分方程的解法。本书可作工科院校学生高等数学课程的教学参考书。

高等学校教学参考书

高等数学基础

上　册

陈苳民　牛实为　陈以一编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 装

*

开本 787×1092 1/32 印张 14.25 字数 345,000

1978 年 12 月第 2 版　1979 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—70,000

书号 13012·0182　　定价 1.05 元

目　　录

第一篇　函数与极限

第二篇　一元函数微分学

第三章　导数及其应用

第三篇 一元函数积分学

第六章 不定积分

第七章 定积分及其应用

第四篇 常微分方程

第八章 微分方程的产生与一般概念

第九章 微分方程的解法

第一篇　函数与极限

数学分析所研究的主要对象为函数，所用的主要方法为极限法. 极限与函数虽然在中学已经分别讲过，但是，没有应用极限方法来研究函数. 一种科学，由于改变了研究方法，就能得到很大的进步与发展，这不仅在数学中如此，在其他科学中也如此，这是值得我们注意的.

本篇分为函数与极限两章，这是学习数学分析的基本知识.

第一章　函　　数

函数是数学分析的研究对象，现在，我们开始学习数学分析，就要从函数入手，但只靠中学那些知识是不够的，因此，在这里，再把它较详细地、系统地讲一讲. 本章分为两节：(一)函数概念及其表示法；(二)基本初等函数及其图形.

第一节　函数概念及其表示法

§[1]1.1　常量与变量

量是客观事物的属性之一，凡是可以测量的对象都叫做量. 例如：长、宽、面积、体积、温度、时间、速度、加速度，以及电路中的电压、润滑油的粘滞度、……都是量. 每一种量都可以使用事先规

---

[1] 本书每册分为篇、章、节、目，并用§表示目.

定的与之同类的单位量来加以度量. 度量得出来的数，叫做**量的值**或**数值**.

讨论一个问题时，在该问题中，始终保持相同数值的量，叫做**常量**；取不同数值的量，叫做**变量**. 例如:

1. 公共汽车由甲站向乙站行驶时，我们把车中的汽油余存量测量 10 次，就有 10 个不同的数；同时，车离甲站的距离也随车的行驶而有不同的数. 但是，把车中的乘客“数”10 次，就会得到 10 个相同的数. 所以，乘客的数目是常量，汽油余存量与距离是变量. 又在甲乙两站之间，乘客的数目虽然是常量，但在车的整个行程中，则是变量而不是常量；至于车的汽油余存量，当机器停止不动时，它又是常量而不是变量. 所以，常量与变量在一定的条件下，是要向对方转化的. 这就说明，现实世界中，没有不变的量. 实际问题中的常量一般是暂时的、相对的，只有变量才是永恒的、绝对的.

2. 玻意耳和马略特研究定量的气体时，把温度保持为常量，求出气体体积 V 与压强 p 的依从变化关系为

$$pV=C, \qquad C \text{ 为常量}.$$

又盖吕萨克研究气体时，把压强保持为常量，求出气体体积 V 与温度 T 的依从变化关系为

$$\frac{V}{T}=\frac{V_0}{T_0}.$$

又查理研究气体时，把体积保持为常量，求出气体压强 p 与温度 T 的依从变化关系为

$$\frac{p}{T}=\frac{p_0}{T_0}.$$

但是，在自然界或工程中所遇到的气体并不如此. 例如地面上的空气受热以后，向空中上升时，它的压强、体积、温度等都是

同时发生变化的. 只有在实验室条件下，才能使它们之中的某些量保持为常量.

从这两个例子可以看出，在高等数学中，常量也象变量一样重要，它们俩是对立统一、互相依存、互相转化的.

§1.2 函数的定义

函数是反映客观世界中量与量之间的变化关系的. 我们祖先对于这种变化关系的认识很早. 远在公元前 300 年左右，我国哲学家庄周在他所著的庄子①中就说过:“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”现在用数学的语言来解释，就是：如果一尺长的杖被截取后所余的量记为 y，那末，y 的值在第一天是$\frac{1}{2}$，第二天是$\frac{1}{2^2}$，第三天是$\frac{1}{2^3}$，第 n 天是$\frac{1}{2^n}$；于是 y 是随 n 的值而定的变量，或 y 是 n 的函数.

到了公元 600 年，我国数学家刘焯② 又提出求两个已知函数值的中间值的方法. 由此可知，他虽然没有提出函数这个名词，但他对于函数概念已经有了进一步的认识. 函数这个名词是 1694 年由德国数学家莱布尼兹提出的，可是他并没有给这个名词下过定义，因为他对于函数的概念还不是十分明确的. 瑞士数学家伯努利于 1698 年 7 月 5 日写信给莱布尼兹，首先提出函数概念的定义:“一个解析式子的值，如果随所含字母的值而变，这个解析式子，就叫做这个字母的函数”. 例如，对$\frac{1}{2}gt^2+v_0t$ 这个式子来说，当 t 每取一值时，它就有一值与 t 所取的值对应，所以它是 t 的函数.

---

① 庄周约为公元前 300 年前后的人，著书 52 篇，名叫庄子. 现存 33 篇，其中的天下篇载有惠施的话:“一尺之棰，……”但惠施并无其人（见范文澜著中国通史简编，修订本，203 页，人民出版社，1953 年）. 因此，所谓惠施的话应该是庄子的话.

② 见李俨著中国古代数学史料，77～79 页，中国科学图书仪器公司，1954 年.

后来，欧拉又提出第二个定义：在 xy 平面上任意画一曲线，这个曲线上一点的坐标 x，y 的关系是函数关系，也就是说 y 是 x 的函数或 x 是 y 的函数. 这个定义不仅允许用解析式子表示函数，同时，也允许用图形表示函数，它要比伯努利的定义来得广泛.

在 19 世纪以前，数学、物理或理论力学上所用的函数定义，都是上面所说的两个定义. 但是，19 世纪以后，由于自然科学与技术科学的不断发展，数学家就逐渐觉得原来的函数定义太狭隘，不能和科技的发展相适应，因此俄国数学家罗巴切夫斯基首先把函数概念加以扩充. 现在，函数概念虽然还在不断的发展中，但是，下面的定义仍旧是最基本的定义.

函数的定义[①] 如果有变量 x，y，当 x 每取一值时，y 依一定的规律也有一值或多值与之对应，我们就说 y 是 x 的函数.

函数 y 也叫做**因变量**，x 叫做**自变量**. 定义中所说的规律，叫做**对应律**.

单值函数与多值函数 如果函数 y 只有一值与 x 的每一值对应，我们就说 y 是**单值函数**；如果有两个，或两个以上的值与 x 的每一值对应，我们就说 y 是**多值函数**.

例如，$y=ax^2+bx+c$ 是单值函数，$y^2=2px$ 及 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 则是多值函数.

今后我们所研究的，一般都是单值函数；如果遇到多值函数时，我们则设法把它加以条件限制，使之成为单值函数，以便于今后的使用与处理（例如反三角函数）.

---

① 这里的函数定义也叫做狄里克莱(Dirichlet)的函数定义，狄里克莱(1805～1859)是德国数学家，他提出函数的定义要比罗巴切夫斯基稍晚几年. 罗巴切夫斯基在 1834 年已给出了函数的一般概念（参考 H. И. 罗巴切夫斯基全集，卷五，43 页，苏联国家技术图书出版社；或 B. Л. 岗恰罗夫著，何旭初、唐述钊译苏俄教育科学院初等数学全书，函数和极限，第一册，2 页）.

一元函数与多元函数 上面的函数定义，仅指一个自变量而论，但是在实际应用上，常有两个以上的自变量的函数．例如矩形的面积 $z=xy$ 就是两个自变量 x，y 的函数；又如长方体的体积 $V=xyz$ 就是三个自变量的函数；又如牛顿的万有引力定律 $F=$

$$=k\frac{m_1 m_2}{r^2},$$其中 F 就是 m_1、m_2 及 r 的函数．

只有一个自变量的函数，叫做**一元函数**；有两个自变量的函数，叫做**二元函数**；依此类推，可以有 n 元函数．二元，三元，以及 n 元的函数叫做**多元函数**．本书上册只讨论一元函数，多元函数将在下册中讨论．

我们把常量看做函数，这也是符合函数定义的．因为任意一个常量 k，可以写作 $y=k$；当 x 每取一值时，y 恒以 k 为对应值，所以 $y=k$ 是 x 的函数．

§1.3 函数的记号

在自然界中，量与量的函数关系，有些是简单的，也有些是复杂的．例如物体在真空中落下的公式写不到半行就可以写完，而月球运动公式却长达好几十页．欧拉为了避免复杂的书写而便于作抽象的理论研究起见，首先用记号“$f(x)$”代表 x 的函数．$f(x)$ 可读为“fx”．

法国数学家拉格朗日① 于 1797 年出版解析函数论时，除用欧拉的记号外，又用 $F(x)$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$等代表 x 的函数．近代也用 $y(x)$，$z(x)$代表 x 的函数．括弧内的 x 是自变量，括弧外的字母 $f, F,$ ……等等只代表函数的对应律，而不代表变量．如果两个函数的对应律不相同，那么括弧外的字母也不相同．例如：研究圆的

① 拉格朗日(Lagrange 1736—1813)法国人，对于数学分析与理论力学都有很大贡献．

性质时，我们知道圆的面积与圆周都是半径 x 的函数，但是对应律不相同，因此括弧外就要用两个不同的字母写为

$$f(x)=\pi x^2,$$

$$\varphi(x)=2\pi x.$$

如果对应律相同而自变量不相同，那末，括弧外的字母不变更而括弧内的字母要变更，例如：

若 $f(x)=x^3-5x+3$,

则 $f(t)=t^3-5t+3$.

由这个例子可知，函数的对应律如果确定，这个函数也就确定，而对应律与代表自变量的字母无关．我们只须根据对应律，就可以从自变量所取的值计算出函数的对应值．例如：以 $x=2$ 与 $t=2$ 代入上面两个等式，所得的函数值都是：

$$f(2)=2^3-5\times2+3=1,$$

但 $f(2)$ 不是 2 的函数，而是自变量等于 2 时，函数 $f(x)$ 或 $f(t)$ 的对应值，或函数值．

$f(x)$ 也常用一个字母 y 来代表它，写为

$$y=f(x).$$

依此类推，多元函数的记号为：

$$f(x,y),\quad F(x,y,z),\quad \varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

或 $$z=f(x,y),\quad u=F(x,y,z),\quad U=\varphi(x_1,\cdots,x_n).$$

欧拉用 $f(x)$ 代表函数时，原来只代表一个解析式子，但是，自从函数的概念扩充以后，它的代表性也跟着扩充．它不仅代表一个用解析式子表达的函数，同时，也代表一个不用解析式子表达的函数．

§1.4 函数表示法 函数的图形

表示函数关系的方法很多，最常用的有三种：解析法，图示

法，列表法.

1. 解析法 就是用算式表示函数对应律的方法. 上面所举的物体落下的路程是时间的函数，以及万有引力的定律都是这种表示法的例子. 用解析法表示函数最适宜于理论研究，所以，它是函数表示法中最重要的方法.

2. 图示法 就是用图形表示函数对应律的方法，也就是欧拉所定义的函数. 用图形表示函数，这在科学上是常用的，例如，"自记温度计"画出的图形就表示温度与时间的函数关系；又如"自记气压计"画出的图形就表示大气压力与时间的函数关系；此外还有统计学的统计图等，都是用图形表示函数的方法. 信重与邮资的函数关系，可用图 1.4 来表示. 当信重 20 克时，函数的值不能确定，即邮资可以是 8 分. 也可以是 16 分；信重 40 克时，邮资可以是 16 分，也可以是 24 分. 凡函数，其值不定时，可以根据具体情况，或某种原则来决定. 例如信重 20 克时，根据邮政章程，它的邮资应该是 8 分.

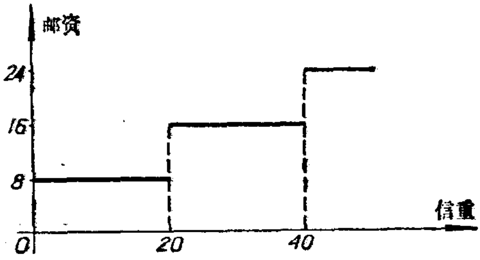

图 1.4

3. 列表法 就是用表格表示函数对应律的方法，也就是把自变量所取的值与函数的对应值列成一表，来表示函数的一种方法. 例如三角函数表、对数表、立方表、平方表等都是用表格表示函数的方法. 这种表格叫做函数表. 函数的列表法，在自然科学与技术科学上用得特别多. 这是因为由实验或观察所得的函数值，在研究的初级阶段，往往不能用解析式子来表示，而只能用表格来表示.

例如研究水的体积与温度的函数关系时，需根据测量结果列

成表格表示如下:

温　度（百度表）	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°
体　积（厘米³）	100	99.990	99.987	99.990	99.998	109.012	100.032	100.057

以上三种表示法都各有优点与缺点. 譬如解析法，它所表示的形式比较简单而全面,研究起来也比较方便;但是，它不能把量与量之间的变化过程很明显地表示出来,使人一目了然,并且每一函数值都要临时计算，不能立刻得到结果. 至于图示法虽然能把量与量之间的变化过程很明显地表示出来，但是，限于画图的技巧，每每缺乏足够的精确性. 列表法虽然可以从表上很快地查出函数的值,但不能查出函数的任何值. 所以每一种表示法,都各有优缺点. 因此,在数学分析教程中,每每把函数的三种表示法结合起来应用,例如研究函数 $f(x)$的变化过程时，为了使它明显起见，总把它的图形画出来. 所谓函数 $f(x)$的图形是指，在直角坐标系中，满足方程

$$y=f(x)$$

的点(x,y)的轨迹.

我们有了函数图形的概念，于是，函数与几何图形就统一起来,这不仅使研究函数的人,对于函数的变化状态可以从图形上一目了然,也使研究几何的人,可用分析方法来研究几何图形.

应该指出:由于解析法用得最多,因此,容易造成一种错觉,使初学的人误认为算式就是函数. 其实不然，函数是指变量间所具有的一一对应的依从关系，而算式却只是用来表示这种对应律的一种形式,前者是内容而后者是形式,两者不能同等看待.

另外,有的函数需要用好几个算式来表示. 例如前面图1.4所说的信重W和邮资P的关系就是这样:

$$P=\begin{cases}8, & \text{当}\quad 0<W\leqslant 20;\\ 8\times 2, & \text{当}\quad 20<W\leqslant 40;\\ 8\times 3, & \text{当}\quad 40<W\leqslant 60;\\ \cdots\cdots & \end{cases}$$

§1.5 函数的定义域 区间 单调数列

当自变量 x 在数轴上取一点 a 时，函数 y 如果有一值或多值与 a 对应，我们就说函数 y 在 a 点有定义. 使函数有定义的一切点的全体，叫做**函数的定义域**. 对应律与定义域是函数概念的两个要素. 每一函数都有它自己的对应律及定义域，这一点在研究函数时，应该加以注意.

在函数定义中虽然没有限定自变量在数轴上要取那些值，但是，论到每一个具体的函数时，就需要指出函数的定义域. 譬如下面两个函数

$$V=\frac{k}{p},\quad y=\frac{k}{x}$$

在形式上是一样的，但在实质上，前一函数是反映气体体积 V 与压强 p 的依从变化关系，因此，函数 V 的定义域是 $p>0$，而后一函数，并没有具体的物理意义，它只是一个解析式子，它的定义域是原点除外的全部数轴.

为了表示函数的定义域，常用一种记号，叫做区间，其定义如下：

定义 设 a 和 b 是两个任意实数，并且 a 小于 b；我们规定：

1° 满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的全体，叫做**闭区间**，记为 $[a,b]$；

2° 满足 $a<x<b$ 的所有实数 x 的全体，叫做 **开区间**，记为 (a,b)；