● 高等学校教学用书

●〔美〕陈惠开　著

● 王兆明　田福庸等　译

● 赵国南　审校

● 电子工业出版社

线性网络与系统

内 容 提 要

本书反映了当前美国科技教育界对传统的“网络理论”及“系统理论”两门课程最新的一种改革趋向，本书同时也是这种改革的一个卓有成效的贡献。其主要特点有：一、把“网络”及“系统”融合在一门课程内，并相互紧密联系以减少学时；二、为了适应大系统分析及计算机辅助分析，因此较多地引入了图论知识；三、各个部分都强调了基本概念而精简了若干传统的“技巧性”内容；这有助于开拓思路，触类旁通，推陈出新；四、书中引入了大量的机助分析方法及程序，俾便充分利用计算机作为工具。

全书共十二章。内容包括：基本概念、图及网络方程、网络方程的时域解及频域解、拉普拉斯变换、卷积积分、傅里叶变换(包括离散傅里叶级数及快速傅里叶变换)、状态变量法等。

本书可供高等工业学校电工类各专业大学生及研究生作为教学用书，也可供有关科技人员参考。

线 性 网 络 与 系 统

［美］ 陈惠开 著

王兆明 田福庸 等译

责任编辑 梁祥丰

*

电子工业出版社出版（北京海淀区万寿路）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

山东电子工业印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：32 字数：783千字

1988年4月第1版 1988年4月第1次印刷

印数：1—3,000册 定价：5.30元

ISBN 7-5053-0194-2/TN 99

著者为中译本写的序

中国学者面临的一个普遍问题是不能及时得到许多现代的工程教材，特别是电气工程的最新教材。由于他们的翻译和出版需要较长的时间，以致这个问题更加复杂。此一版本力求弥补上述不足。我对这个计划的兴趣起源于我在伊利诺大学和俄亥俄大学同来自中国的访问学者的广泛接触；也起源于1982年我对北京中国科学院研究生院的访问，在那里我在《图论及其应用》夏季研讨会上作了一系列有向图及其应用的讲座。从此使我深信：如果能尽早得到最新的教材，网络理论的学习和研究将会大大地得到促进。

我自己对网络理论的兴趣开始于1962年，当时我在 Urbana-Champaign 伊利诺大学前田渡（Wataru Mayeda）教授的指导下工作。多年来我对网络理论的兴趣是多方面的，包括应用图论、分布放大器、量纲分析、滤波器、宽带匹配理论、有源网络、反馈放大器理论及通讯网络等。据我所知，这将是我的第三本译成中文的书，其他两本是人民邮电出版社的"宽带匹配网络理论与设计"和"有源网络与反馈放大器理论"。期望中国的学者和研究工作者能更方便地得到它们。

翻译这本书的计划是在1981年由成都电讯工程学院王兆明先生提议的，当时他作为访问学者在芝加哥伊利诺大学进修。在提出这个计划的最初阶段我还正忙于写手稿，他希望1983年英文原版出版之后不久就能译出。我愿借此机会对他的提议表示赞赏，并对他不遗余力的热心于科学的探索怀有坚定的信念，相信并感谢这个努力将对中国电气工程界有所裨益。

我也感谢所有参加中文版工作的同志，首先是译者赵国南、王兆明、田福庸、严晓浪、张达明、关华昭、唐素兰、张晓云、章望生、朱双鹤、刘昌孝等老师们。他们大多是杭州电子工业学院和成都电讯工程学院的教师，他们做了一件出色的工作。同时我很清楚其中有多少工作要做，而做这些工作又是多么的辛苦！对这个成果我很高兴。

美国芝加哥伊利诺大学
电气工程及计算机科学系
陈惠开
1983年11月8日
于美国伊利诺州

目　录

第一章 基本概念

1.1 引 言

最近20年来，电气工程技术，尤其是固体电子学技术，进展非常迅速。不久前，固体器件：晶体管、隧道二极管、 齐纳二极管等取代了真空管，而集成电路技术的出现又使得这些不久前的新发明成为过时的、逐渐被淘汰的东西。为了跟上这日新月异的发展形势，就要求培养出来的工程师必须具备坚实、雄厚的数理基础。为此，在当代电气工程教学中，就必须进一步加强数学、物理等基础理论课程。本书把现代数学方法应用于工程系统分析，就是为培养新一代工程技术人材而做的。

系统这一术语通常有多种含义。可以把系统想象为某些物体的一个集合，这些物体依靠彼此相互作用来实现一个共同的计划或者为一个共同的目的服务。这个较为广泛的定义包含了所有物质的及非物质的系统。不论自然的和人造的系统，都以多样形式存在着。例如：电子系统、机械系统、水力系统和热力学系统为物质系统，而非物质系统的例子有政治系统、经济系统和社会系统等。在某种意义上可将整个宇宙看作为一个巨大的系统。但是，这样一种推广，在解决工程问题时是没有任何用处的。因而我们不去探讨如此浩瀚的复杂系统，而是宁可把问题的范围缩小，考虑一个由少数物体组成的有界的系统。只有这样，当分析系统在各种条件下的特性时，才能得到有意义的、有用的解。

在本书中，系统这一术语是指由诸如电阻、电容、电感、变压器、晶体管、运算放大器和电源等元件组成的电气网络。这些实际元件可理解为能完成一定数学功能的器件。例如，电阻器是乘法器，电容器和电感器是积分器或微分器。如果我们把注意力集中在这些元件所起的作用上，而不是集中在实际元件本身，那么，一个系统可看作为一个处理器，它的处理功能可以用模拟的、数字的或混合的网络来实现。如果采用数字网络，那么，系统就是一个具有离散输入和输出的数字装置。由此可见，一个系统便有这三种不同的解释。

作为工程师，不仅对分析一个系统感兴趣，同时也对设计一个系统感兴趣。然而，和许多创造性的工作一样，在着手设计之前，必须学会如何分析一个系统。一般来说，系统分析可以分为三个步骤：

1．建立模型：建立一个数学表达式，这个表达式要能恰如其分地反映原系统的多方面的特性。

2．求解：在得到一个适当的模型之后，可以用各种方式求得它的解。

3．解释：把数学模型的解与实际问题联系起来，即根据实际问题对所得到的解进行解释。

为了对系统分析方法有个大致的了解，我们来研究如图 1.1 的框图所示的简单的通信系统。图中的方框代表功能子系统，子系统本身也可以用系统分析方法来研究。在大多数情况下，几个信号会同时通过一个传输系统，每一个信号来自独立的信号源，并且被送到每一单

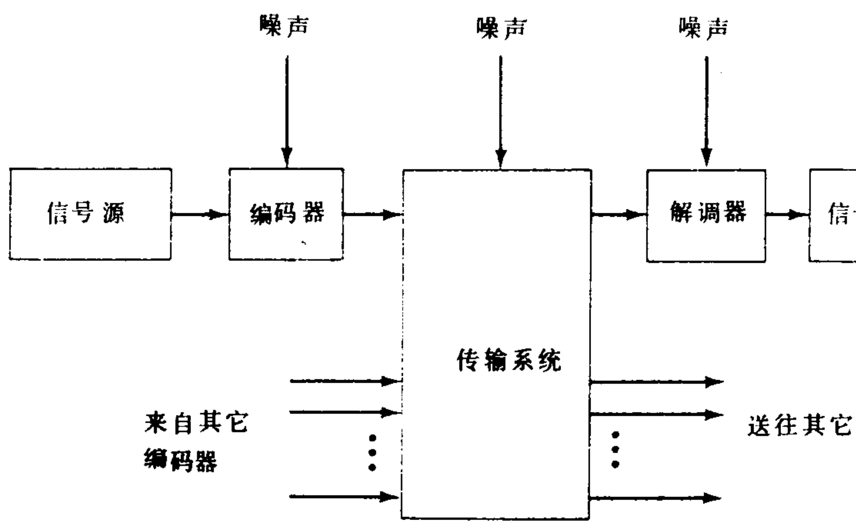

图1.1 一个通信系统的框图

独的接收机。无线电是一个例子，其中公共传输系统可能是电离层。为了把一个信号与其它信号区别开来，每一个信号要用一个编码器进行编码。这个过程叫“调制”。这时解码器不仅要能为信号接收者选择出所需要的信号，而且还要把信号变换为原来的形式。这个过程称为“解调”。

本书所讨论的系统分析方法在各种应用中都是极为有效的。事实上，这些方法构成了现代工程系统分析的基础。虽然，书中的例子基本上只涉及到电信号与电系统，但这些方法也适用于用类似的数学模型描述的其它系统。

1.2 信　　号

信号是信息的具体体现。在大多数系统中，信号可视为一个随时间变化的变量。例如，在电网络中，信号体现为各个电压和电流。在飞行控制雷达系统中，阴极射线管荧光屏上的一个光点就是一个信号，它可能表明出现了一架飞机。这个光点由一个很短的脉冲所产生，其脉宽从几分之一个微秒到几个微秒。因而，信号是时间的函数。为了设计能处理上述随时间变化的信号的系统，就需要更详细地了解信号的性质。可以证明，一个信号无论怎样复杂，总可以用频谱或所含的频率分量来进行分析，也就是把信号看成具有确定相对幅度的各频率分量的总和。在本书的最后几章，我们将要详细地讨论和确定这些频率分量。因而，在这里只作一般性的讨论。

一个连续时间信号是时间t的函数$f(t)$，它在给定的时间区间内的每一点具有确定的值。例如，我们所熟悉的正弦信号

$$f(t) = A\cos(\omega t + \theta) \tag{1.1}$$

是一个连续时间信号，它在$-\infty \leq t \leq \infty$的整个时间区间有定义。系数$A$是正弦信号的振幅，$\theta$是相位，而$\omega$是角频率，它可由下式

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.2}$$

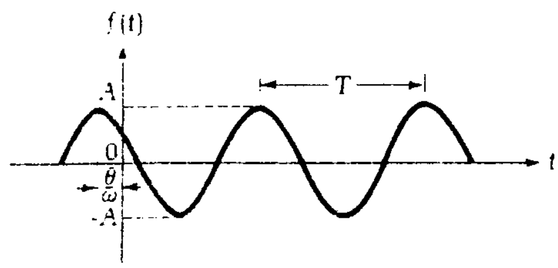

图1.2 正弦连续时间信号

来确定，式中T是正弦的周期。这个信号的波形如图1.2所示。若θ为正数，则$f(t)$超前于$B\cos\omega t$，若θ是负数则$f(t)$滞后于$B\cos\omega t$。值得注意的是一个连续时间信号不一定是数学上的连续函数。它可以包含间断点，我们称这样的函数为**分段连续函数**。对于$\epsilon>0$的连续时间信号$f(t)$，如果

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(t_0+\epsilon) \neq \lim_{\epsilon\to 0} f(t_0-\epsilon) \tag{1.3}$$

那么，我们说$f(t)$在t_0处有一个间断点。为了简单起见，可采用下述符号

$$f(t_0+) = \lim_{\epsilon\to 0} f(t_0+\epsilon) \tag{1.4a}$$

$$f(t_0-) = \lim_{\epsilon\to 0} f(t_0-\epsilon) \tag{1.4b}$$

函数$f(t)$在t_0处之跳变值由下式定义

$$f(t_0+) - f(t_0-) \tag{1.5}$$

图1.3所示的矩形脉冲是连续时间信号的一个例子。它在$t=0$和$t=t_1$处有两个间断点。函数在这些点上的跳变值可用下式求得。

$$f(0+) - f(0-) = A - 0 = A \tag{1.6a}$$

$$f(t_1+) - f(t_1-) = 0 - A = -A \tag{1.6b}$$

在其它点上，信号由下述方程所定义

$$\begin{aligned} f(t) &= A, \quad 0 < t < t_1 \\ &= 0, \quad t < 0 \quad \text{or} \quad t > t_1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

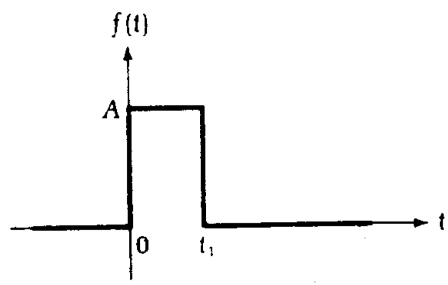

图1.3 具有两个间断点的连续时间信号

一个**离散时间信号**是时间t的函数，它的定义域是一组离散的时刻，对连续时间信号进行采样就得到这一类信号。例如：对如图1.3所示的连续时间信号$f(t)$进行采样就得到图1.4的信号。虽然采样点可以是任意的离散时刻，但通常是选择等距离点。此处，假设离散时间信号在$t=0$，±1，±2，…… 的点上总具有确定值。事实上，t的值可以取实际的瞬时，在这些时刻信号的值已知；t也可取一个时间序列，其中各时刻之间的间隔可以相等，也可以不等。如果采样是等距离的，那么，离散信号$f(nT)$、$n=0$、±1、±2、……中的常数T叫做**采样间隔**。把模拟量变为数值形式的装置叫做**模数变换器**或**A-D变换器**。这种装置已被普遍采用。例如有一种数字电压表就采用了A-D变换器。对图1.3的信号采样就得到了图1.4的离散时间信号，可用下述解析式表示这个信号

$$\begin{aligned} f(nT) &= A, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, M \\ &= \text{无定义，其余各点} \end{aligned} \tag{1.8}$$

式中$MT \leq t_1 < (M+1)T$，

在网络中，电压、电流和其它物理量通常用连续时间信号来表示。然而，在对这些信号进行数值处理过程中，只需要知道信号在离散时刻的值。因此用离散时间信号来表示它们也是方便的。

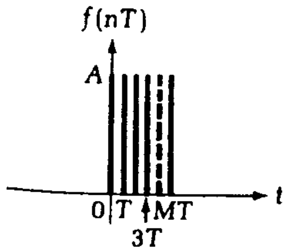

图1.4 图1.3中连续时间信号的采样值

1.3 信号的处理

为了各种目的，常常要对信号进行处理以便得到新的信号。这一节里，我们将用简单的例子说明如何从已知信号得到新的信号。

和与积

两个信号的和是一个信号，它在任一时刻的值等于两个信号在该时刻的值之和。例如，两个连续时间信号

$$f_1(t) = A\cos\omega t \tag{1.9a}$$

$$f_2(t) = B\sin(\omega t + \phi) \tag{1.9b}$$

的和是一个由下面方程定义的连续时间信号

$$f(t) = A\cos\omega t + B\sin(\omega t + \phi) \tag{1.10}$$

同样，两个离散时间信号〔图1.5(a)和(b)〕

$$\begin{aligned} f_1(n) &= 0, & n &< -2 \\ &= 3^{-n}, & n &\geqq -2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} f_2(n) &= 2^n + 1, & n &\leqq 0 \\ &= \frac{1}{n}, & n &> 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

的和是一个离散时间信号〔图1.5(c)〕

$$\begin{aligned} f(n) &= 2^n + 1, & n &< -2 \\ &= 3^{-n} + 2^n + 1, & -2 \leqq n &\leqq 0 \\ &= 3^{-n} + \frac{1}{n}, & n &> 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

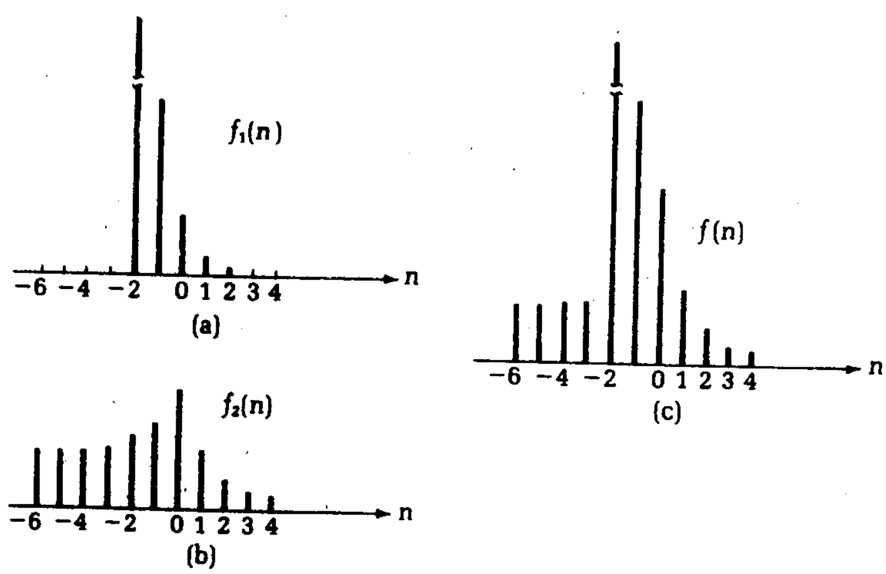

图1.5 两个离散时间信号(a)、(b)及它们的和(c)

如果一个系统的输出信号是几个输入信号的和，这样的系统叫加法器，可用图1.6中的符

号形式表示，其中

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k} f_i(x) \tag{1.14}$$

式中$x=t$或n。

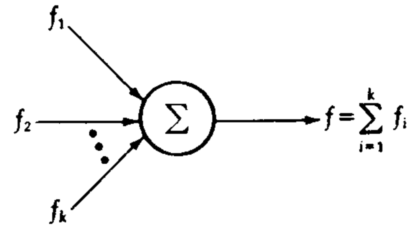

图1.6　加法器的符号

两个信号的积是一个信号，它在任一时刻的值等于两个信号在该时刻的值的乘积。例如，式(1.9)所示的两个连续时间信号的积是信号

$$g(t)=AB\cos\omega t\sin(\omega t+\phi) \tag{1.15}$$

而式(1.11)和式(1.12)所示的两个离散时间信号的积是由$h(n)$（图1.7)定义的另一个离散时间信号

$$\begin{aligned} h(n)&=0, & n<-2 \\ &=3^{-n}(2^n+1), & -2\leqq n\leqq 0 \\ &=\frac{3^{-n}}{n}, & n>0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

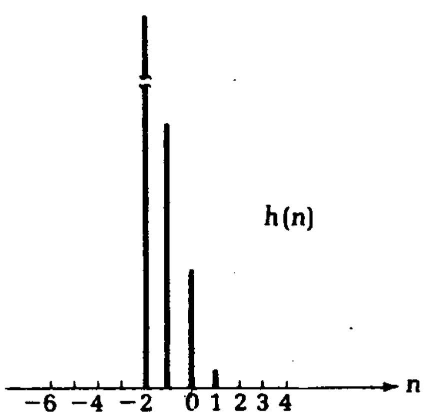

图1.7　图1.5(a)、(b)中的两个离散时间信号之积

如果一个系统的输出信号是各输入信号的积，这样的系统叫乘法器，用图1.8所示的符号表示，其中

$$f(x)=\prod_{i=1}^{k} f_i(x) \tag{1.17}$$

通信中的幅度调制（AM）就是利用信号相乘的一个例子。

搬移

如果一个连续时间信号$f(t)$的独立变量t用$t-T$来取代，这里T是一个正实数，那么，信号$f(t)$便被延迟了T秒。对于连续时间信号，这种运算如图1.9所示。同样，用$t+T$取代t，信号$f(t)$便被提前了T秒，如图1.10所示。在离散时间信号的情况下，该运算是类似的。如果用$n+k$来取代离散时间信号$f(n)$中的独立变量n，其中k是某个整数(正数或负数)，那么，信号便被提前或延迟了$|k|$个单位，是提前还是延迟取决于k是正数还是负数。

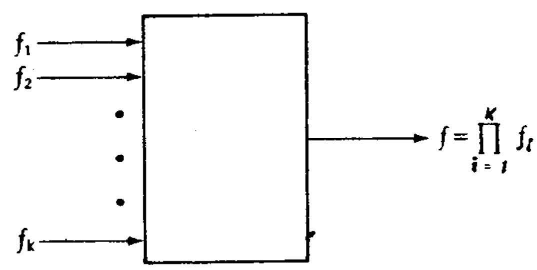

图1.8　乘法器的符号

例如，考虑离散时间信号

$$\begin{aligned} h(n)&=0, & n<-2 \\ &=3^{-n}(2^n+1), & -2\leqq n\leqq 0 \\ &=\frac{3^{-n}}{n}, & n>0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

即式(1.16)和图1.7所示的信号，若$k=2$，则有

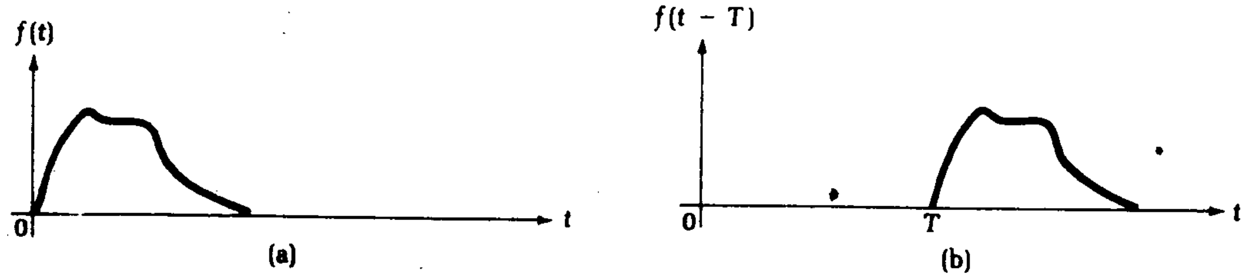

图1.9　搬移运算使信号延迟

$$
\begin{aligned}
h(n-2) &= 0, && n-2<-2 \\
&= 3^{-(n-2)}(2^{n-2}+1), && -2 \leqq n-2 \leqq 0 \\
&= \frac{3^{-(n-2)}}{n-2}, && n-2>0
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

简化为

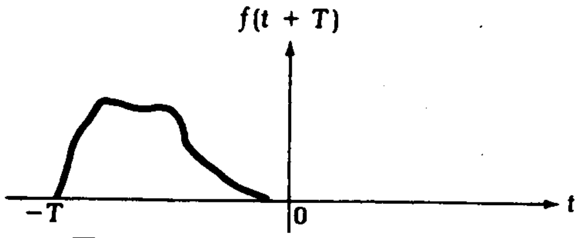

图1.10　搬移运算使信号提前

$$
\begin{aligned}
h(n-2) &= 0, && n<0 \\
&= 9\cdot 3^{-n}(\tfrac{1}{4}\cdot 2^{n}+1), && 0 \leqq n \leqq 2 \\
&= \frac{9\cdot 3^{-n}}{n-2}, && n>2
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

迟延信号$h(n-2)$如图1.11所示。

对图1.3所示的连续信号$f(t)$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= A, && 0<t<t_1 \\
&= 0, && \text{其余时间}
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

当$T=t_1$时，则有

$$
\begin{aligned}
f(t+t_1) &= A, && 0<t+t_1<t_1 \\
&= 0, && \text{其余时间}
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

将它简化为

$$
\begin{aligned}
f(t+t_1) &= A, && -t_1<t<0 \\
&= 0, && \text{其余时间}
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

图1.2画出了提前的信号$f(t+t_1)$。

如果一个系统的输出信号等于它的输入信号，但延迟了一段时间，这样的系统叫延迟单元。另一方面，如果一个系统的输出信号等于它的输入信号，但提前了一段时间，这样的系

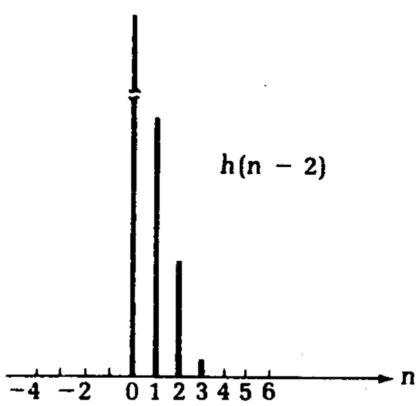

图1.11　搬移运算使图1.7的离散时间信号延迟

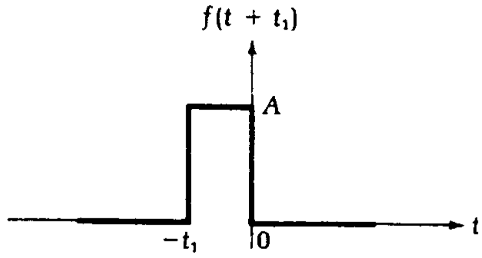

图1.12　搬移运算使图1.3的连续时间信号提前

统叫预估器。在1.5节中，我们将指出，一个预估器实际上是不可能实现的。但是，搬移已被广泛应用，通信中的相位调制就是采用搬移运算的一个实例。

转置

一个连续时间信号$f(t)$，如果用$-t$取代它的独立变量t，那么我们就说对信号$f(t)$作了转置运算；同理，一个离散时间信号$f(n)$，如果用$-n$取代n，则称对信号$f(n)$作了转置运算。这种运算等效于把信号围绕$t=0$的直线折叠过来，或者，等效于把时间信号的“过去”和“将来”互换。例如，图1.3和图1.4的转置信号如图1.13所示，其解析表达式为

$$\begin{aligned} f(-t) &= A, \quad -t_1 < t < 0 \\ &= 0, \quad \text{其余时间} \end{aligned} \tag{1.24}$$

和

$$\begin{aligned} f(-nT) &= A, \quad n = 0, \ -1, \ \cdots, \ -M \\ &= 0, \quad \text{其余时间} \end{aligned} \tag{1.25}$$

与前述相同，此处，$MT \leqq t_1 < (M+1)T$。另外，转置意味着把信号的“过去”和“将来”互换，而实际上没有任何系统能够完成这样一种运算，我们介绍它仅仅是为了数学上的方便。

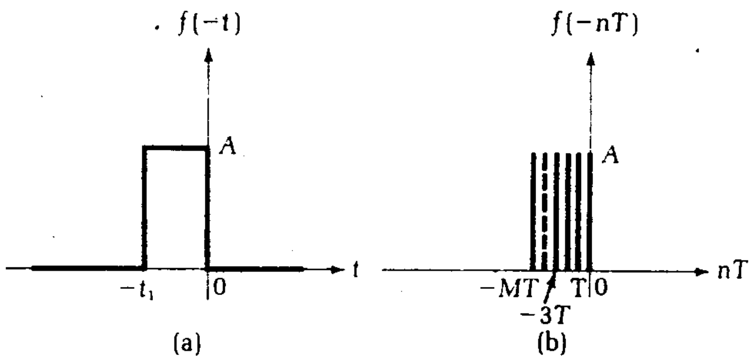

图1.13 图1.3连续时间信号的转置(a)和图1.4离散时间信号的转置(b)

一个信号可以同时被转置和延迟。这种运算等效于用$-t+T$或$-n+k$取代t或n。现在，我们来考虑一个连续时间信号$f(t)$，它既被转置又被延迟T秒。为了得到一个转置信号，先用$-t$取代$f(t)$中的t，于是得到$f(-t)$。然后再将已转置的信号$f(-t)$延迟为T秒便得到其结果

$$f[-(t-T)] = f(-t+T) \tag{1.26}$$

作为一个例子，我们将式(1.18)的离散时间信号转置并延迟2秒。其作用等效于用$-n+2$取代$h(n)$中的变量n，结果如下

$$\begin{aligned} h(-n+2) &= 0, \quad -n+2 < -2 \\ &= 3^{n-2}(2^{-n+2}+1), \quad -2 \leqq -n+2 \leqq 0 \\ &= \frac{3^{n-2}}{-n+2}, \quad -n+2 > 0 \end{aligned} \tag{1.27}$$

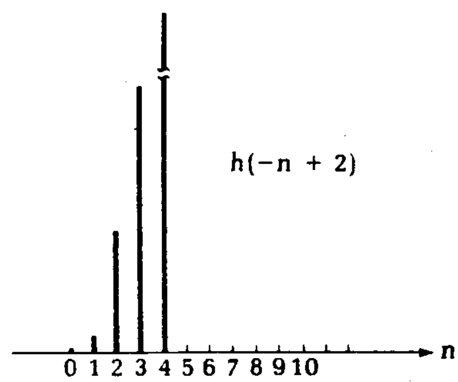

图1.14 图1.7离散时间信号的转置及延迟

它还可以简化为

$$h(-n+2)=0, \qquad n>4$$

$$=\frac{3^n(4\cdot 2^{-n}+1)}{9}, \qquad 2\leq$$

$$=\frac{3^n}{-9n+18}, \qquad n<2 \tag{1.28}$$

式(1.28)的图形示于图1.14。

现在，我们来证明用另外两种方法也可以得到 $h(-n+2)$ 的图形。对图1.7所示 的信号 $h(n)$可以先求出它的转置信号如图1.15(a)，然后将 已 转置的信号 $h(-n)$ 延迟两个单位得到$h(-n+2)$，其图形如图1.15(b)所示。或者，对图1.7所示的信号，先使它提前两个单位得到$h(n+2)$，如图1.16(a)所示。然后，将提前了的信号转置得到$h(-n+2)$，如图1.16(b)所示。其结果显然是与图1.14相同。

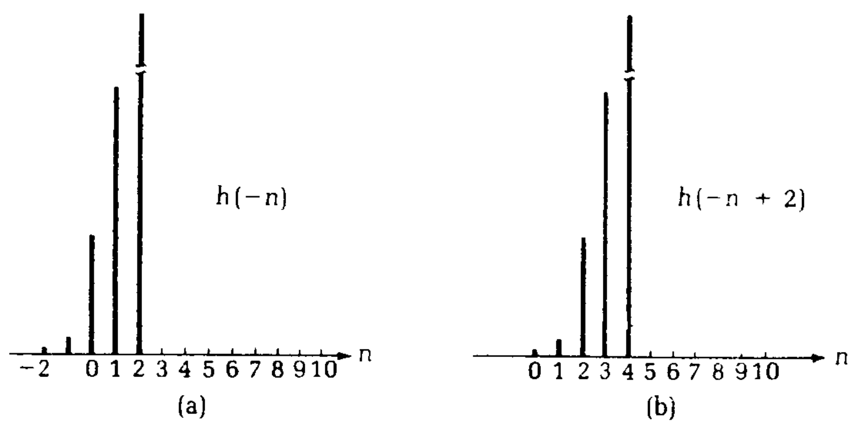

图1.15 (a)图1.7离散时间信号的转置，(b)把(a)的信号延迟两个单位

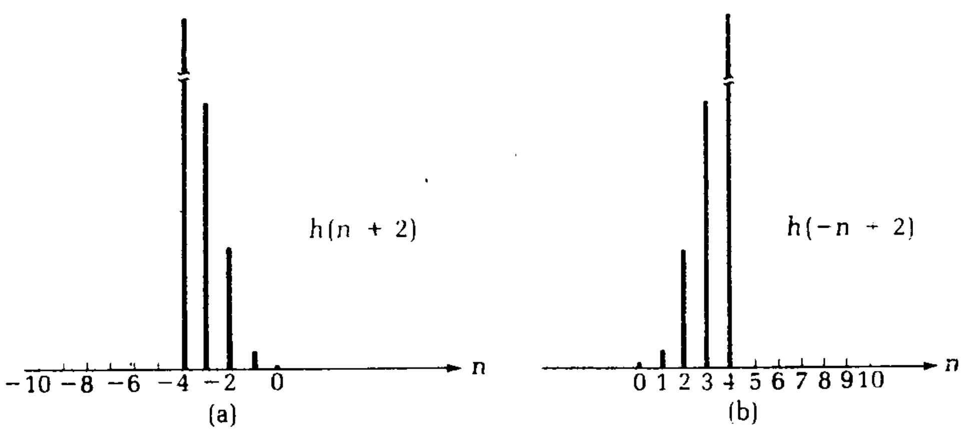

图1.16 (a)把图1.7离散时间信号$h(n)$提前，(b)图(a)信号的转置

标度变换

如果用常数b去乘信号在每个时刻的值，那么信号的幅度就会按因子b进行标度变换。当系统的输出信号等于输入信号按常数因子b标度变换时，如果$|b|>1$，则该系统叫做放大器，如果$|b|<1$则叫衰减器。同样，如果信号$f(t)$中的t被at取代，则称这连续时间信号$f(t)$的时间变量t按一个正的常数a进行标度变换。

例如，我们讨论一个衰减的正弦信号(图1.17)

$$f(t) = Ae^{-\sigma t}\cos\omega t, \qquad \sigma > 0 \tag{1.29}$$

假设信号的幅度乘以标度变换因子$b=2$，则得到如图1.18(a)所示的信号。如果信号幅度的标度变换因子$b=0.5$，则如图1.18(b)所示。

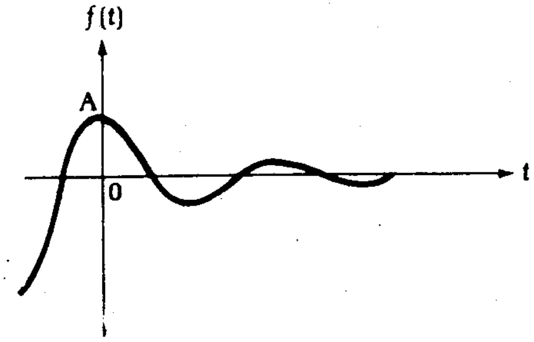

图1.17 衰减正弦信号$Ae^{-\sigma t}\cos\omega t$

如果用$2t$取代式(1.29)衰减正弦信号中的时间变量t，则得

$$f(2t) = Ae^{-2\sigma t}\cos 2\omega t, \qquad \sigma > 0 \tag{1.30}$$

这就叫做时间变量按比例因子$a=2$进行变换，所得到的响应如图1.19(a)所示。如果因子$a=0.5$，则得如图1.19(b)所示的图形。最后，如果对信号$f(t)$

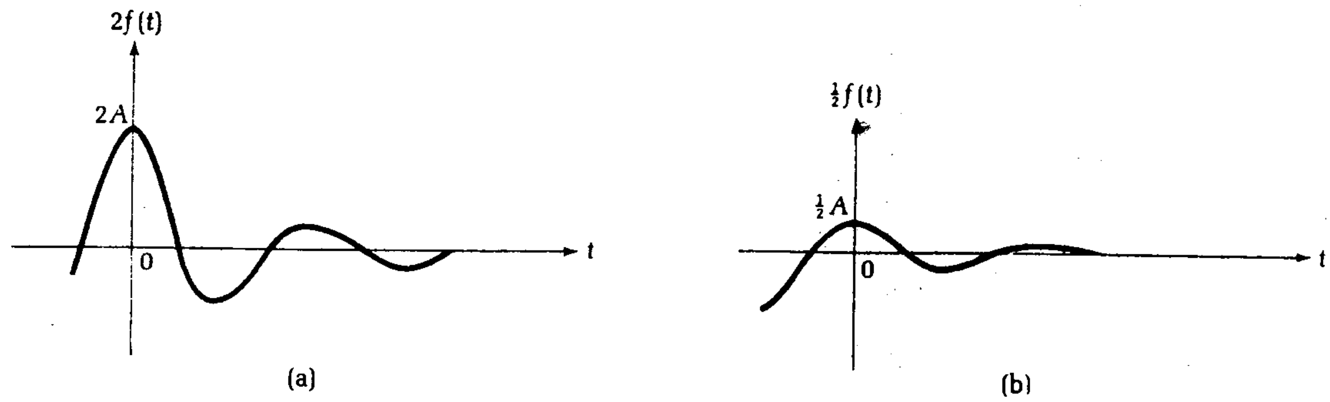

图1.18 图1.7衰减正弦函数的标度变换，(a)幅度放大，(b)幅度衰减

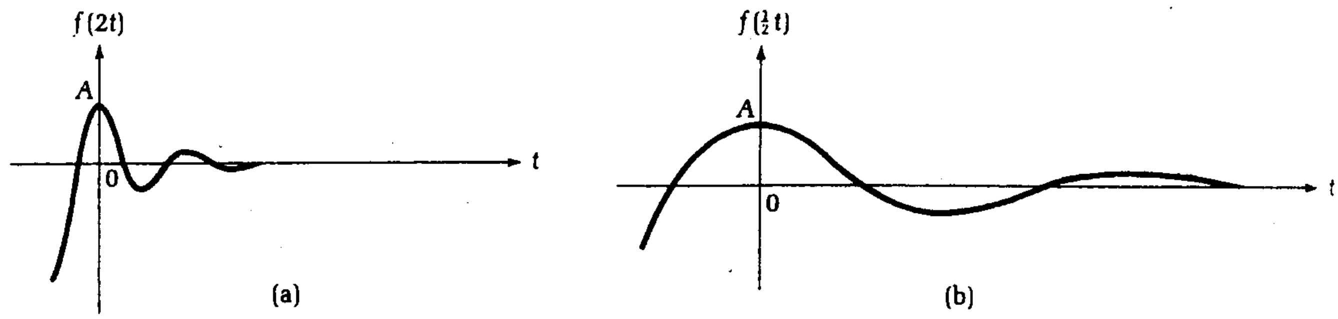

图1.19 图1.17衰减正弦函数的时间标度变换，变换因子分别为2和$\frac{1}{2}$

同时作因子$b=0.5$的幅度变换和因子为$a=2$的时间变换时，则得

$$\frac{1}{2}f(2t) = \frac{1}{2}Ae^{-2\sigma t}\cos 2\omega t, \qquad \sigma > 0 \tag{1.31}$$

其相应的时间响应如图1.20所示。

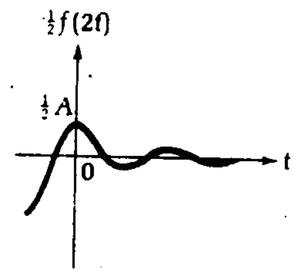

图1.20 对图1.17衰减正弦函数同时进行幅度和时间标度变换

直观地说，幅度变换因子b是一个正常数时，相当于幅度扩大或压缩，这取决于变换因子b是大于1或是小于1。另一方面，若时间变换因子a是一个大于1的正常数，那么，它相当于将时间轴及相应的信号压缩；反之，若比例因子a是小于1的常数，则时间轴及相应的信号被扩展。连续时间信号的这种压缩和扩展示于图1.18—1.20。对离散时间信号的标度变换，我们不作定义。

1.4 冲激函数

在实际应用中，我们常会遇到含有间断点的连续时间信号$f(t)$。这样的信号在其间断点上不存在有限的导数。而由于概念上和计算上的原因，在讨论中希望把信号$f(t)$的导数包括在内；为此我们将介绍单位冲激函数的概念，并具用一种不太严格的方法来讨论它的一些性质。

定义单位冲激函数的方法有若干种。其中之一是：令 $f_n(t)$ 为 由下式定义的一个脉冲序列

$$\begin{aligned} f_n(t) &= 0, \qquad t<0 \\ &= n, \qquad 0<t<\frac{1}{n} \\ &= 0, \qquad t>\frac{1}{n} \end{aligned} \tag{1.32}$$

对于$n=1$、2和3，相应的脉冲$f_1(t)$、$f_2(t)$和$f_3(t)$如图1.21所示。当n增加时，脉冲宽度变小而幅度增大。因而对每一个n，脉冲的面积始终等于1：

$$\int_0^{\epsilon} f_n(t)\,dt = 1, \qquad \epsilon>\frac{1}{n} \tag{1.33}$$

在极限情况下，当n趋于∞时，对任一正数ϵ，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\epsilon} f_n(t)\,dt = 1 \tag{1.34}$$

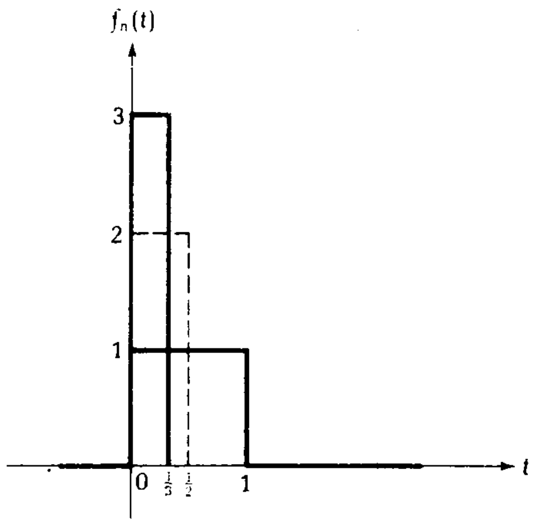

图1.21 单位冲激函数的图解说明——它是面积为1、宽度趋于零的脉冲的极限

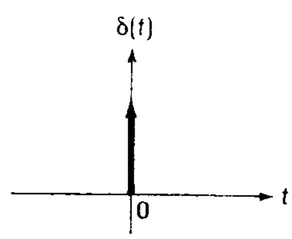

图1.22 表示单位冲激的图示符号

我们用$\delta(t)$表示**单位冲激函数**，它定义为

$$\delta(t) \triangleq \lim_{n\to\infty} f_n(t) \tag{1.35}$$

故有

$$\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0$$
$$= \infty, \qquad t = 0 \tag{1.36}$$

用图1.22中带箭头的垂线来表示单位冲激函数，其在原点处的值为无穷大，而在除原点外的其余各点上其值等于零。

实际上，例如在雷达系统中，经常出现极短的脉冲，该脉冲非常近似于冲激函数。

与单位冲激密切相关的一个函数是**单位阶跃函数**。它用$u(t)$表示，由下式来定义[①]：

$$u(t) \triangleq 0, \qquad t < 0$$
$$= 1, \qquad t > 0 \tag{1.37}$$

在$t=0$处单位阶跃的值可取0，$\frac{1}{2}$或1。图1.23给出了$u(t)$的波形。单位阶跃函数是一个在$t=0$处有间断点的连续时间信号，在数学上，它是一个分段连续函数。

下面来证明单位阶跃函数的导数就是单位冲激函数：

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t) \tag{1.38}$$

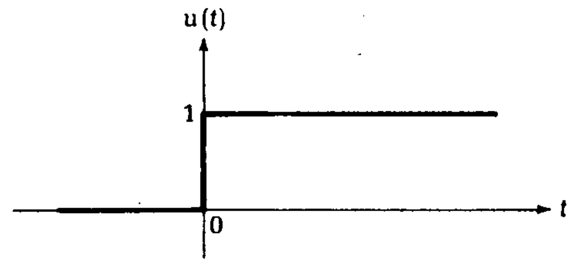

图1.23　单位阶跃函数

考虑图1.24所示的函数$f(t)$

$$f(t) = 0, \qquad t < 0$$
$$= \frac{t}{\epsilon}, \qquad 0 < t < \epsilon$$
$$= 1, \qquad t > \epsilon \tag{1.39}$$

显然，当ϵ趋于零时，$f(t)$的极限就是单位阶跃函数：

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(t) = u(t) \tag{1.40}$$

$f(t)$的导数由下式给出：

$$g(t) = \frac{d}{dt}f(t) = 0, \qquad t < 0$$
$$= \frac{1}{\epsilon}, \qquad 0 < t < \epsilon$$
$$= 0, \qquad t > \epsilon \tag{1.41}$$

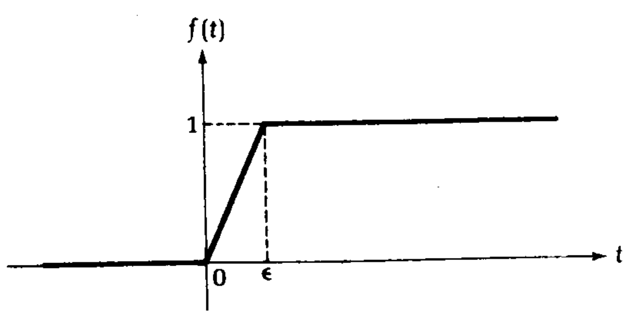

图1.24　一个分段连续函数$f(t)$，当$\epsilon \to 0$时它趋于单位阶跃函数

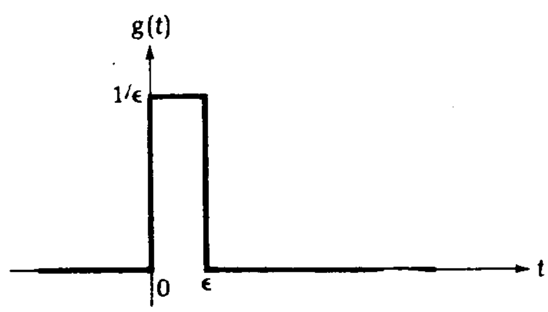

图1.25　图1.24函数的导数

① 式(10.139)将定义一个与此有关的函数，这个函数称为**符号函数**，式(10.140)是它的导数。试与式(1.37)和(1.38)作比较。