高考完全解读

王后雄考案

主编 王兴旺

数学

中国青年出版社

导航丛书系列

王后雄考案

高考完全解读

数学

主　编　王兴旺

编委会　张　丹　史开锋　余道乐

柳育云　王早春　方　金

中国青年出版社

X导航

（京）新登字083号

高考完全解读
数学
中国青年出版社出版发行
社址：北京东四12条21号
邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：(010) 64034341
发行部电话：(010) 64010813
湖北新华印务有限公司印刷　新华书店经销
890×1240　1/16　印张 15.625插页/50千字
2001年7月北京第 1 版　第 1次印刷
印数：2.3万册
定价：17.30元
本图书有任何印装质量问题，请与出版处联系调换
联系电话：(010) 64033570

高考完全解读 考试说明学生版

亲爱的读者,为了最充分地发挥本书的作用,挑战复习极限,我们建议您在选用和使用本书时,先阅读本书各板块功能和使用方法的**图示**。

能力测试点

透视《考试说明》"纲"、"目"要点,覆盖高考考点100%,完全锁定高考测试能力点。

高考考点解读

(老师释疑答题点)

《考试说明》完全解密,知识、方法、能力核心要点释疑

样板题解析

(看看以前怎样考的)

名题印证左栏答题点,高考已考、可考题型探讨。

1 知识要点

2 思维拓展

3 综合创新

高考解题思维、解题依据和答题要点三层解读,高考解题、答题诀密尽在其中!

再也不怕找不到解题之门!

名题诠释

双栏排版,讲例对照,有效地降低解题思维心理屏蔽作用,难题不难了,生题、新题更易上手 点击左栏,名题诠释,你还有什么题不会……

4 能力题型设计

(高考还会这么考)

切准高考各类题型,体现创新能力、综合能力、实践能力等能力立意方向,编著者对前瞻题、创新题、研究题等进行了大胆、科学预测!

点击考点

右栏注明解题依据,方便考生查阅解读要点,与讲例相互点击。

5 标准解答

参考答案以高考"标准答案"为模式,题解全面、精炼、规范,以利于考生解题模式科学的"定位"、"定型"、减少因不懂"答题技巧"而造成不必要的失分。

当发现解题有误时,建议您参照右栏提示,在"解读"栏中寻找解题依据。

为打造中国高考复习用书第一品牌,名师脱稿时都无比自豪道:"我无愧,我把毕生的最好的创造性的法宝交给了学生!"

阅读了上述图示,该是您作出选择的时机了。

一套书,能改变人的一生命运,一套好的复习用书,能让考生抢抓时遇、充满信心。

X导航—《高考完全解读》丛书主编 **王后雄**

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

能力测试点1　集合的概念与运算

高考考点解读

(名师释疑答题点)

1 知识要点

1.集合中元素的三要素

(1)确定性:对于一个给定的集合,任何一个对象或者是这个集合中的元素,或者不是它的元素,这是集合的最基本特征.

(2)互异性:集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的),相同的对象归入任何一个集合时,只能算作这个集合的一个元素.

(3)无序性:在一个集合中,通常不考虑它的元素之间的顺序,也就是说,由a,b两个元素组成的集合与由b,a两个元素组成的集合是相同的.

2.常用的集合的表示法

常用的有列举法,描述法,区间表示法和图示法.

有限集常用列举法表示,而无限集常用描述法或区间表示.

3.符号"$\in$"和"$\subseteq$"的含义

符号"$\in$"表示的是元素与集合之间的关系.如$\sqrt{2}\notin\{x|x<2,x\in Z\}$,$-1\in\{x|x<2,x\in Z\}$.

符号"$\subseteq$"表示的是集合与集合之间的关系.

2 思维拓展

4.集合运算中常用结论

(1)$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$　　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

(2)$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$　　$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$

(3)由n个元素所组成的集合,其子集个数为2^n个,即是$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

[例如]满足条件$\{0,1\}\cup A=\{0,1,2\}$的所有集合A的个数为(　　)

A.4个　B.3个　C.2个　D.1个

[解]由$\{0,1\}\cup A=\{0,1,2\}$可知,$A\subseteq\{0,1,2\}$且A中一定含有元素2,即$2\in A$,同时,A中除了元素2之外的所有元素所组成的集合是$\{0,1\}$的子集,则个数为$2^2=4$个,选A.

5.含参数的集合问题,应对所得结果进行检验.

样板题解析

(看看以前怎么考的)

名师诠释

[考题1]　已知$A=\{a,a+d,a+2d\}$,$B=\{a,aq,aq^2\}$,若$A=B$,求q的值.

[解]　由集合中元素的无序性,得(1)$\begin{cases}a+d=aq\\a+2d=aq^2\end{cases}$、(2)$\begin{cases}a+d=aq^2\\a+2d=aq.\end{cases}$　对于(1)消去d得$q^2-2q+1=0$,故$q=1$,但此时不满足集合B中元素的互异性,应舍去;对于(2)消去d得$2q^2-q-1=0$,$q=-\frac{1}{2}$或$q=1$(舍去),因此$q=-\frac{1}{2}$.

[点评]　由于集合中元素的互异性,因而对于求集合中参数的值的问题,必须具有检验的意识.

[考题2]　已知集合$M=\{(x,y)|x+y=2\}$,$N=\{(x,y)|x-y=4\}$,那么集合$M\cap N$为(　　)

A.$x=3,y=-1$　　B.$(3,-1)$

C.$\{3,-1\}$　　D.$\{(3,-1)\}$　　(1996年上海高考题)

[解]　因为集合M和N中的代表元素为有序实数对(x,y)且$M\cap N$的运算结果定是集合,所以只有答案D正确,选D.

[考题3]　已知集合$S=\{x|x\leqslant2\sqrt{5}\}$,又$a=3\sqrt{2}$,则(　　)

A.$\{a\}\in S$　B.$a\notin S$　C.$a\subset S$　D.$\{a\}\subset S$

[解]　由元素与集合的关系排除C,由集合与集合的关系排除A,又因$3\sqrt{2}<2\sqrt{5}$,故$a\in S$,$\{a\}\subset S$,于是应选D.

[考题4]　设全集$I=\{0,1,2,3,4\}$,集合$A=\{0,1,2,3\}$,集合$B=\{2,3,4\}$,则$\overline{A}\cup\overline{B}=$(　　)

A.$\{0\}$　B.$\{0,1\}$　C.$\{0,1,4\}$　D.$\{0,1,2,3,4\}$

(1994年全国高考题)

[解]　两种途径计算:一是$\overline{A}=\{4\}$,$\overline{B}=\{0,1\}$,$\overline{A}\cup\overline{B}=\{0,1,4\}$;二是利用$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$,先计算出$A\cap B=\{2,3\}$,再得出$\overline{A\cap B}=\{0,1,4\}$.选C.

[考题5]　已知$A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$,$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$,若$\varnothing\subset A\cap B$,且$A\cap C=\varnothing$,求$a$的值和集合$A$.

[解]　将$\varnothing\subset A\cap B$转化为$A\cap B\neq\varnothing$.

$\because B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}=\{2,3\}$,

$C=\{x|x^2+2x-8=0\}=\{-4,2\}$,

$\because A\cap C=\varnothing$,

[例如]设集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值．

[解]$A\cap B=\{-3\}$，$\therefore -3\in B$．

故 $a-3=-3 \Rightarrow a=0$

或 $2a-1=-3 \Rightarrow a=-1$

当 $a=0$ 时 $A=\{0,1,-3\}$，$B=\{-3,-1,1\}$ $A\cap B=\{-3,1\}$与 $A\cap B=\{-3\}$矛盾，经检验知 $a=-1$ 合题意．

6.进行集合运算时，要重视发挥数轴和图示法的作用，通过数形结合直观地解决问题．

[例如]如图1-3，I 是全集，M、P、S 是 I 的3个子集，则阴影部分所表示的集合是(　　)

A.$(M\cap P)\cap S$

B.$(M\cap P)\cup S$

C.$(M\cap P)\cap \overline{S}$

D.$(M\cap P)\cup \overline{S}$

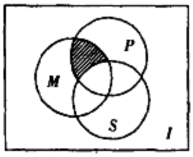


图1-3

[解]由图可知，阴影部分是 M 与 P 的公共部分，且在 S 的外部，故选 C．

7.空集$\varnothing$是一个特殊的集合，是任何集合的子集，在解题中要注意对空集的讨论．

如集合 $A=\{x|x^2+ax+4=0\}$，$B=\{1,4\}$且 $A\subseteq B$，求实数 a．

解此题的过程中，易遗漏 $A=\varnothing$的情况，首先可对 A 进行分类讨论，$A=\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\}$，四种情况逐一讨论．解题过程读者自己完成．

3 综合创新

8.集合问题多与函数、方程、不等式和解析几何有关，要注意各类知识的融汇贯通．

[例如]已知集合 $A=\{(x,y)|\dfrac{y-3}{x-2}=1,x,y\in R\}$，$B=\{(x,y)|y=ax+2,x,y\in R\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的值．

[分析]弄清 $A\cap B=\varnothing$意思，即两条直线平行或两直线相交于点(2,3)．

[解]A 是直线 $y=x+1$，但不包括点(2,3)，B 是过点(0,2)的直线，要 $A\cap B=\varnothing$，或者两直线平行，此时 $a=1$，或者直线 $y=ax+2$ 与直线 $y=x+1$ 交于(2,3)点，此时 $a=\dfrac{1}{2}$，所以 $A\cap B=\varnothing$时，$a=1$，或 $a=\dfrac{1}{2}$．

$\therefore -4\notin A,2\notin A$．

又$\varnothing\subset A\cap B$．

$\therefore A\cap B\neq\varnothing$，而 B 中有两个元素2和3．由上面知 $2\notin A$，

$\therefore 3\in A$，就有 $9-3a+a^2-19=0$，解得 $a=5$ 或 $a=-2$．

当 $a=5$ 时，$A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，与 $A\cap C=\varnothing$矛盾．

$\therefore a=-2$，此时 $A=\{-5,3\}$．

[点评] 求出参数 a 时，要对其进行检验，看是否满足题意，避免增解．

[考题6] 设集合 $P=\{x|x^2-4x-5<0\}$，$Q=\{x|x-a\leqslant 0\}$．

(1)若 $P\cap Q=\varnothing$，求实数 a 的取值范围．

(2)若 $P\subset Q$，求实数 a 的取值范围．

[分析] 应用数轴进行直观求解．

[解] $P=\{x|-1<x<5\}$，$Q=\{x|x\leqslant a\}$．

(1)由图1-1易知，当 $a\leqslant -1$ 时，$P\cap Q=\varnothing$；

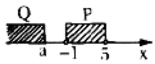


图1-1

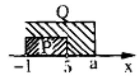


图1-2

(2)由图1-2易知，当 $a\geqslant 5$ 时，$P\subset Q$．

[点评] 将集合语言转化为图形语言，便使 a 的取值显而易见．可见，数形互化是解数学题的重要思想方法．

[考题7] 已知集合 $A=\{x|x^2-2x+a\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$，且 $A\subset B$，求实数 a 的取值范围．

[解] $B=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$．$A=\{x|x^2-2x+a\leqslant 0\}$

由于 $A\subset B$ 所以

①当 $A=\varnothing$时满足 $A\subset B$，则 $x^2-2x+a\leqslant 0$ 无解．

$\therefore \Delta=(-2)^2-4a<0\Rightarrow a>1$．

②当 $A\neq\varnothing$时，由于不等式 $x^2-2x+a\leqslant 0$ 对应二次函数 $y=x^2-2x+a$ 的对称轴是 $x=1$．要保证 $A\subset[1,2]$，当且仅当 $A=\{1\}$，$\therefore \Delta=0$ 得 $a=1$．

由①②知当 $a\leqslant 1$ 时，$A\subset B$．

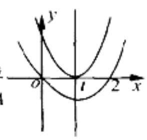


图1-4

[考题8] 已知 $M=\{(x,y)|y^2=2x\}$，$N=\{(x,y)|(x-a)^2+y^2=9\}$，求 $M\cap N\neq\varnothing$的充要条件．

[解] 考虑 $M\cap N\neq\varnothing$的充要条件是方程组

$$\begin{cases}y^2=2x\\(x-a)^2+y^2=9\end{cases}$$

至少有一个实数解，即

$x^2+2(1-a)x+a^2-9=0$ 至少有一个非负根，由 $\Delta\geqslant 0$ 得 $a\leqslant 5$，又因为上述方程有两个负根的充要条件是 $x_1+x_2<0$ 且 $x_1x_2>0$，即 $-2(1-a)<0$ 且 $a^2-9>0$，解得 $a<-3$，于是这个方程至少有一个非负根的 a 的取值范围是 $-3\leqslant a\leqslant 5$，此即为所求的充要条件．

[点评] 本题从正面求 $M\cap N\neq\varnothing$的充要条件比较困难，而是首先将集合问题转化为方程的问题，然后用补集思想来加以解决．

4 能力题型设计

（高考还会这么考）

[预测1]由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},(\sqrt{x^2})^2,-\sqrt[3]{x^3}$所组成的集合，最多含有

A.2个元素　B.3个元素　C.4个元素　D.5个元素

[预测2]设 I 是全集，集合 P、Q 满足 $P\subset Q$，则下面的结论中错误的是(　　)。

A. $P\cup Q=Q$　B. $\overline{P}\cup Q=I$　C. $P\cap\overline{Q}=\varnothing$　D. $\overline{P}\cap\overline{Q}=\overline{P}$

[预测3]设全集为 R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq 0\}$，$N=\{x|g(x)\neq 0\}$，那么集合$\{x|f(x)g(x)=0\}$等于(　　).

A. $\overline{M}\cap\overline{N}$　B. $\overline{M}\cap N$　C. $M\cup\overline{N}$　D. $\overline{M}\cup\overline{N}$

[预测4]集合 A 中有 m 个元素，若在 A 中增加一个元素，则它的子集个数将增加______个.

[预测5]设集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则实数 x 的集合是______.

[预测6]已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，$A=\{x|f(x)=2x\}=\{2\}$，试求 a、b 的值及 $f(x)$.

[预测7]已知集合 $A=\{y|y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$，$B=\{y|y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant 3\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

[预测8]已知 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in R\}$，若 $A\cap R^+=\varnothing$，求实数 p 的取值范围.

点击考点

测试要点1

测试要点6，上海高考题

测试要点4、8，全国高考题

测试要点4

测试要点1、2、5

测试要点1、8

测试要点6、8

测试要点7、8

5 标准解答

1.B. $-\sqrt[3]{x^3}=-x,\sqrt{x^2}=|x|,(\sqrt{x^2})^2=x^2$，$|x|$为 x 和 $-x$ 中之一，剩下 $x,-x,x^2$，故最多含有3个元素

2.D.依题意画出示意图，如图1－5，显然A、B、C均是正确的，故选D

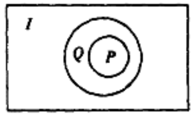


图1－5

3.D. $\{x|f(x)g(x)=0\}=\{x|f(x)=0\}\cup\{x|g(x)=0\}=\overline{M}\cup\overline{N}$

4. 2^m. $2^{m+1}-2^m=2^m$

5. $\{-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\}$，$B\subset A$. $\therefore x^2=3$ 或 $x^2=x$，再由元素的互异性，得 $x=\pm\sqrt{3},0$.

6. $\because A=\{x|x^2+ax+b=2x\}=\{2\}$，即$\{x|x^2+(a-2)x+b=0\}=\{2\}$

$$\therefore\begin{cases}\Delta=(a-2)^2-4b=0\\4+2(a-2)+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-4a+4-4b=0\\2a+b=0\end{cases}$$

$\Rightarrow a=-2,b=4,\therefore f(x)=x^2-2x+4.$

7. $\because a^2+1>a,\therefore A=\{y|y>a^2+1$ 或 $y<a\}$，又由 $y=f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ 知 $y_{min}=f(1)=2,y_{max}=f(3)=4,\therefore B=\{y|2\leqslant y\leqslant 4\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则$\begin{cases}a\leqslant 2\\a^2+1\geqslant 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\leqslant 2\\a\geqslant\sqrt{3}\text{或 }a\leqslant-\sqrt{3}\end{cases}$　$\therefore a\leqslant-\sqrt{3}$或$\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2.$

8. $\because A\cap R^+=\varnothing$，$\therefore$集合 A 有以下两种情况：

(1) $A=\varnothing$，则 $\Delta=(p+2)^2-4<0$，即 $-4<p<0$；

(2) $A\neq\varnothing$，则方程有两个非正数解，其充要条件是$\begin{cases}p+2>0\\\Delta=(p+2)^2-4\geqslant 0,\end{cases}$　解得 $p\geqslant 0$.

综上所述 $p>-4$.

能力测试点2 映射与函数

高考考点解读
（名师释疑答题点）

样板题解析
（看看以前怎么考的）

1 知识要点

映射

一般地，设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f:A\to B$.

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射，那么和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象.

由映射定义，可理解为下述三点：

(1) A 中每一个元素必有唯一的象；

(2)对于 A 中的不同的元素，在 B 中可以有相同的象；

(3)允许 B 中元素没有原象.

2. 函数

(1)定义：函数是由一个非空数集到另一个非空数集的映射.

由此可知，函数是一种特殊的映射 $f:A\to B$. 必须满足 A、B 都是非空数集，其象的集合是 B 的子集.

(2)函数的三要素

定义域、对应法则和值域

(3)函数的表示法

列表法、解析式法、图象法.

(4)常用函数

正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、常数函数（$y=c$，c 为常数）.

名师诠释

［考题1］ 已知映射 $f:A\to B$，其中，集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$，集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象，且对任意的 $a\in A$，在 B 中和它对应的元素是 $|a|$，则集合 B 中元素的个数是(　　)

A.4　B.5　C.6　D.7　（1999年全国高考题）

［解］ 对应法则是“取绝对值”，$\pm3,\pm2,\pm1,4$ 的象分别是 $3,2,1,4$. 故集合 $B=\{1,2,3,4\}$，有4个元素，选A.

［考题2］ 设集合 A 和 B 都是自然数集合 N，映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，象20的原象是(　　)

A.2　B.3　C.4　D.5　（2000年全国高考题）

［解］ 依题意 $2^n+n=20$，四个选项中只有 $n=4$ 为方程的解. 故选C.

［点评］ 从历年考查映射的知识的高考题来看，只要求了解映射的概念即可.

［考题3］ 下列对应是否为从 A 到 B 的映射？能否构成函数？

(1) $A=R$，$B=R$，$f:x\to y=\dfrac{1}{x+1}$

(2) $A=\{a\mid\frac{1}{2}a\in N\}$，$B=\{b\mid b=\frac{1}{n},n\in N\}$，$f:a\to b=\frac{1}{a}$

(3) $A=\overline{R^-}$，$B=R$，$f:x\to y$，$y^2=x$

(4) $A=\{$平面 α 内的矩形$\}$，$B=\{$平面 α 内的圆$\}$，f：作矩形的外接圆

［解］ (1)当 $x=-1$ 时，y 值不存在，所以不是映射.

(2) A、B 两集合分别用列举法表述为 $A=\{2,4,6,\cdots\}$ $B=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\}$，由对应法则 $f:a\to b=\frac{1}{a}$ 知，是映射，又 A、B 为非空数集，所以亦为函数.

(3)不是映射，如 A 中元素1有两个象 ±1.

(4)是映射，但不是函数.

2 思维拓展

3. 分段函数

若函数在定义域的不同子集上对应法则不同，可用几个式子来表示函数，这种形式的函数叫分段函数，它是一类重要函数.

［例如］已知 $f(x+1)=\begin{cases}\sin x & x\geq0\\ \lg(-x) & x<0\end{cases}$

求 $f(\frac{\pi}{2}+1)\cdot f(-9)$ 的值.

［解］$-9=-10+1$，$-10<0$，$\frac{\pi}{2}>0$

［考题4］ 如图1－6所示，在直角坐标系的第一象限内，ΔAOB 是边长为2的等边三角形，设直线 $x=t(0\leq t\leq2)$ 截这个三角形可得位于此直线左方的图形的面积为 $f(t)$，则函数 $y=f(t)$ 的图象（如图1－7所示）大致是(　　).

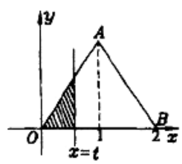


图1－6

［解］ 首先求出该函数的解析式.

当 $0\leq t\leq1$ 时，如图1－8所示，有

$f(t)=S_{\Delta MON}=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$.

$\therefore f(\frac{\pi}{2}+1)\cdot f(-9)=f(\frac{\pi}{2}+1)\cdot f(-10+1)$

$=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\lg 10=1$

4.复合函数

若y是u的函数，u又是x的函数，即$y=f(u)$，$u=g(x)$，$x\in(a,b)$，$u\in(m,n)$，那么y关于x的函数$y=f[g(x)]$，$x\in(a,b)$叫做f和g的复合函数，u叫做中间变量，u的取值范围是$g(x)$的值域.

[例如]设$f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，

$g(x)=\begin{cases}x & x\leqslant 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$，求$f[g(x)]$.

[解]分情况讨论：

当$x\leqslant 0$时，$g(x)=x$，则

$f[g(x)]=f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$

$\because x\leqslant 0$

$\therefore f[g(x)]=\frac{1}{2}(x-x)=0$

当$x>0$时，$f[g(x)]=f(x^2)=x^2$

$\therefore f[g(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$

5.判断两个函数为同一函数的方法

构成函数的三要素中，定义域和对应法则相同，则值域一定相同.所以，两个函数当且仅当定义域和对应法则相同时，才是相同的函数.

6.两个给定集合间的映射的个数

集合A中有m个元素，集合B中有n个元素，则从集合A到集合B的映射一共有n^m个.

由映射的定义可知，A中的m个元素在B中都有象.A中的第一个元素在B中的象有n种情况，A中的第二个元素在B中的象亦有n种情况，……，A中的第m个元素同样有n种情况，由乘法原理知，满足题设的映射个数为n^m个.

3 综合创新

7.用函数的思想方法解决"求范围"的问题，能取到意想不到的效果.

[例如]若方程$ax^2-4ax+1=0$的两个正根α和β满足$\frac{1}{10}\leqslant\frac{\alpha}{\beta}\leqslant 10$，求实数$a$的取值范围.

[分析]将a表示成α的函数关系，通过求函数最值的方法来求a的取值范围.

[解]由韦达定理，得

$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha\beta=\frac{1}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=4-\alpha,\\ a=\frac{1}{\alpha\beta}.\end{cases}$

当$1<t\leqslant 2$时，如图1-9所示，有

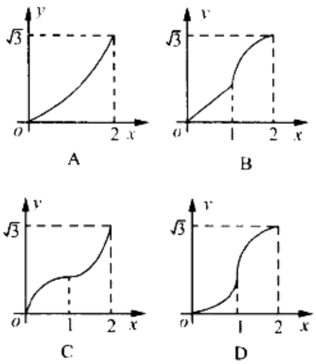


图1-7

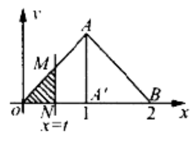


图1-8

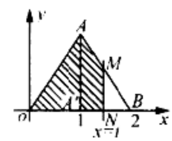


图1-9

$f(t)=S_{\triangle AOB}-S_{\triangle MNB}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)^2+\sqrt{3}$.

$\therefore f(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}t^2(0\leqslant t\leqslant 1),\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)^2+\sqrt{3}(1<t\leqslant 2).\end{cases}$

可见，本题应选D项.

[考题5] 判断下列各组函数是否表示同一个函数.

(1)$y=\frac{x^2-1}{x-1}$与$y=x+1$　　(2)$y=\lg x$与$y=\frac{1}{2}\lg x^2$

(3)$y=\sqrt{x^2}-1$与$y=x-1$　(4)$y=x$与$y=\log_a a^x$($a>0$且$a\neq 1$)

[分析] 判断两个函数是否相同，先观察定义域是否一致，若定义域一致，再看对应法则是否一致，由此即可判断.

[解] (1)表示不同函数，因为定义域不同.

(2)$\because$ $y=\lg x$的定义域为$(0+\infty)$，

而$y=\frac{1}{2}\lg x^2$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0+\infty)$，$\therefore$ 两函数不是同一函数.

(3)$\because$ $y=\sqrt{x^2}-1=\begin{cases}x-1 & (x\geqslant 0)\\ -x-1 & (x<0)\end{cases}$

与$y=x-1$的对应法则不相同，$\therefore$ 两函数不是同一函数.

(4)表示相同的函数.

[考题6] 已知集合$M=\{a,b,c\}$，$N=\{-1,0,1\}$，从M到N的映射f满足$f(a)-f(b)=f(c)$，那么映射f的个数为

A.2　　B.4　　C.5　　D.7

[解] 为避免重复和遗漏，将式子变为$f(a)=f(b)+f(c)$，再对f下的象的集合进行分类，因为允许N中元素无原象.

(1)象集为单元素集合时，只有$\{0\}$满足$0=0+0$

(2)象集为双元素集合时，

$\{-1,0\}$：$-1=0+(-1)$；$-1=-1+0$　($f(a)=-1,f(b)=-1,f(c)=0$)

$\{1,0\}$：$1=0+1,1=1+0$

$\{-1,0,1\}$：$0=-1+1,0=1+(-1)$

即有 $\frac{4}{11}\leqslant\alpha\leqslant\frac{40}{11}$.

$\therefore a=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha(4-\alpha)}=\frac{1}{4-(\alpha-2)^2}$

故知 a 的取值范围是 $\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant\frac{121}{160}$.

故有7个映射.选D.

4 能力题型设计

（高考还会这么考）

点击考点

[预测1]在给定的映射 $f:(x,y)\to(2x+y,xy)(x,y\in R)$ 的条件下,点 $\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right)$ 的原象是(　　).　　测试要点1

A. $\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{36}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{1}{36},-\frac{1}{6}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$ 或 $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right)$

[预测2]与函数 $y=10^{\lg(x-1)}$ 的图象相同的函数是(　　)　　测试要点2、5

A. $y=x-1$　　B. $y=\frac{x^2-1}{x+1}$　　C. $y=|x-1|$　　D. $y=\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right)^2$

[预测3]下面对应,不是 P 到 M 的映射是(　　)　　测试要点1

A. $P=\{$自然数$\}$, $M=\{-1,1\}$, $f:x\to(-1)^x$　　B. $P=\{$有理数$\}$, $M=\{$有理数$\}$, $f:x\to x^2$

C. $P=\{$正整数$\}$, $M=\{$整数$\}$, $f:x\to\frac{2x}{x}$　　D. $P=R$, $M=R$, $f:x\to y$, $y^2=|x|$

[预测4]下面的从集合 P 到集合 M 的对应是映射的是(　　)　　测试要点1

A. $P=\{$自然数$\}$, $M=\{$整数$\}$, f:求算术平方根

B. $P=\{$自然数$\}$, $M=\{$正数$\}$, f:求平方根

C. $P=\{$正数$\}$, $M=\{$实数$\}$, f:求平方根

D. $P=\{$正整数$\}$, $M=\{$实数$\}$, f:取常用对数

[预测5]已知 $f(x)=\begin{cases}0 & (x>0)\\ -e & (x=0)\\ x^2-1 & (x<0)\end{cases}$,则 $f\{f[f(\pi)]\}$ 的值为______　　测试要点2、4

[预测6]设集合 A 中含4个元素,B 中含3个元素.现建立从 A 到 B 的映射 $f:A\to B$,且使 B 中每个元素在 A 中都有原象,则这样的映射有______个.　　测试要点1、6

[预测7] A、B 两地相距150公里,某汽车以每小时50公里的速度从 A 地到 B 地,在 B 地停留2小时之后,又以每小时60公里的速度返回 A 地.写出该车离开 A 地的距离 S(公里)关于时间 t(小时)的函数关系,并画出图象.　　测试要点2、3

[预测8]已知 x_1、x_2 是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0(k\in R)$ 的两个实数根,求 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值.　　测试要点7

5 标准解答

1.B　2.D.因为A、B、C中定义域不同,只有D的定义域和对应法则与 $y=10^{\lg(x-1)}$ 相同.　3.D.因为 P 中任一非零实数在 M 中有相反的两个数与之对应.　4.D.因为对于任意一个正整数,它的常用对数值是唯一确定的实数.　5. e^2+1. $f\{f[f(\pi)]\}=f[f(0)]=f(-e)=e^2+1$.　6.36.由映射的概念和排列组合的知识可知,把3个元素当成"空",则映射个数为 $C_4^2P_3^3=36$.　7.当 $t\in[0,3]$ 时,$S=50t$　$t\in(3,5]$ 时,$S=150$　$t\in(5,7.5]$ 时,$S=150-60(t-5)$

故 S 与 t 的函数关系式为 $S=\begin{cases}50t, & t\in[0,3]\\ 150, & t\in(3,5]\\ 450-60t, & t\in(5,7.5]\end{cases}$ 图略.

8.由条件求出 k 的范围,再把 $x_1^2+x_2^2$ 表示为 $f(k)$,然后求 $f(k)$ 的最大值.　由 $\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\geqslant0$,解得 $-4\leqslant k\leqslant-\frac{4}{3}$.　$\because x_1+x_2=k-2$, $x_1x_2=k^2+3k+5$,　$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)=-k^2-10k-6=-(k+5)^2+19$.　$\therefore$ 当 $k=-4$ 时,$x_1^2+x_2^2$ 取得最大值18.

能力测试点3　函数的解析式与定义域

高考考点解读

（名师释疑答题点）

1 知识要点

1.函数的解析式，定义域，值域是函数概念的三要素，而值域是由定义域及解析式所确定的，故解析式与定义域是函数的两个独立要素．

解析式是表示定义域和值域之间的一种对应关系，与所取的字母无关，如 $y=3x^2+1$ 与 $y=3t^2+1$ 为同一个函数

2.求函数定义域的主要根据是：(1)分式的分母不得为零；(2)偶次方根的被开方数不小于零；(3)对数函数的真数必须大于零；(4)指数函数和对数函数的底数必须大于零且不等于1；(5)三角函数中的正切函数 $y=\operatorname{tg}x\left(x\in R \text{ 且 } x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right)$，余切函数 $y=\operatorname{ctg}x(x\in R \text{ 且 } x\neq k\pi,k\in Z)$；(6)还有如下求定义域的题型：

[例如]　若函数 $f(2^x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，求 $f(\log_2 x)$ 的定义域．

$\because y=f(2^x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，$\therefore \frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2$，

$\therefore y=f(x)$ 的定义域是 $\left[\frac{1}{2},2\right]$，由 $\frac{1}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant 2\Rightarrow\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4$．

$\therefore y=f(\log_2 x)$ 的定义域是 $[\sqrt{2},4]$

2 思维拓展

3.求函数的解析式常用的方法

(1)待定系数法

已知函数的模型（如指数函数、二次函数等），一般的方法是设出函数的解析式，然后根据题设条件求待定系数．

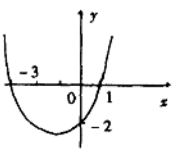


图 1－10

［例如］设二次函数的图象如图1－10所示，求此函数的解析式

［解］设函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c(a>0)$，由题设知

$x=0$ 时 $y=c=-2$

$$\begin{cases}-3+1=-\dfrac{b}{a}\\ -3\cdot 1=-\dfrac{2}{a}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{2}{3}\quad b=\frac{4}{3}$$

样板题解析

（看看以前怎么考的）

名师诠释

[考题1]　1992年底世界人口达到54.8亿，若人口的年平均增长率为 $x\%$，2000年底世界人口数为 y（亿），那么 y 与 x 的函数关系式是．　（上海高考题）

[解]　答案为 $y=54.8(1+x\%)^8$

作答时，首先能肯定为54.8与一个幂之积，关键是幂的指数为多少，不能想当然，要准确．

[考题2]　求下列各函数的定义域

(1) $y=\dfrac{\lg(|x|-x)}{\sqrt{1-x^2}}$；

(2) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$．

[分析]　依真数大于零，分母非零，偶次被开方式非负进行求解．

[解]　(1)由 $\begin{cases}1-x^2>0\\ |x|-x>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-1<x<1,\\ x<0.\end{cases}$

$\therefore$　函数的定义域为 $(-1,0)$．

(2)由 $\begin{cases}25-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\end{cases}$ 得

$$\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5,\\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z).\end{cases}$$

借助于数轴，解这个不等式组，得函数的定义域为 $\left[-5,-\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},5\right]$．

[考题3]　(1)已知 $f(1-\cos x)=\sin^2 x$，求 $f(x)$．

(2)已知 $f(x)=3x-1$，$f[h(x)]=g(x)=2x+3$，$h(x)$ 为 x 的一次函数，求 $h(x)$．

[解]　(1)令 $1-\cos x=t(0\leqslant t\leqslant 2)$，则 $\cos x=1-t$，

$\therefore f(1-\cos x)=f(t)=\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-(1-t)^2=-t^2+2t$．

故 $f(x)=-x^2+2x\quad(0\leqslant x\leqslant 2)$．

(2)依题意，可设 $h(x)=kx+b\quad(k\neq 0)$．

由 $f[h(x)]=g(x)$，得 $3h(x)-1=2x+3$，即 $3(kx+b)-1=2x+3$，

亦即 $3kx+(3b-1)=2x+3$．

$$\therefore\begin{cases}3k=2,\\ 3b-1=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=\dfrac{2}{3},\\ b=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

故 $h(x)=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}(x\in R)$．

[点评]　第(1)小题用的是换元法．在引入新变量 t 后，要注意变量

故解析式为 $y=\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x-2$

(2)换元法

如果已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式时，可用换元法求解，但要注意在换元时引起的定义域的变化．最后结果要注明所求函数的定义域，如［考题3］(1)

(3)赋值法

可以是取特殊值，亦可以是变量换变量，然后通过解方程组求出参数．

［例如］已知 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=cx(a、b、c\in R,ab\neq0,a^2\neq b^2)$，求 $f(x)$

［解］由题设 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=c\cdot x\cdots①$

用 x 代换①中的 $\frac{1}{x}$，则 $af(\frac{1}{x})+bf(x)=\frac{c}{x}\cdots②$

由①②得 $(a^2-b^2)f(x)=(ax-\frac{b}{x})c\Rightarrow$

$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}(ax-\frac{b}{x})$

4.如果函数是由实际意义确定的，这时应根据自变量的实际意义，确定其取值范围

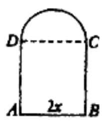


图 1－11

［例如］用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆型的框架(如图 1－11 所示)．若矩形底边长为 $2x$，求此框架围成的面积 y 与 x 的函数解析式，并写出它的定义域．

［分析］面积 y 为矩形 $ABCD$ 面积与半圆面积之和．

［解］$\because CD=AB=2x$，

$\therefore \overset{\frown}{CD}=\pi x$．

$\therefore AD=\frac{l-AB-\overset{\frown}{CD}}{2}=\frac{l-2x-\pi x}{2}$，

故 $y=2x\cdot\frac{l-2x-\pi x}{2}+\frac{\pi x^2}{2}$

$=-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2+lx$．

由 $\begin{cases}2x>0\\ \frac{l-2x-\pi x}{2}>0\end{cases}$ 得 $x\in(0,\frac{l}{\pi+2})$

3 综合创新

5.对于含有字母参数的函数，求其定义域，必须对字母的参数分类讨论．

［例如］已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $x\in(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，求 $g(x)=f(ax)+f(\frac{x}{a})\quad(a>0)$ 的定义域．

的取值范围，t 的取值范围即为函数 $f(t)$ 的定义域．需要指出的是，两个函数是否相同，与它们的自变量用什么字母表示无关，所以 $f(t)$ 与 $f(x)$ 表示同一函数．

［考题4］ 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$，且图象在 y 轴上的截距为1，被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求 $f(x)$ 的解析式．

［解法1］ 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$．由 $f(x-2)=f(-x-2)$ 得 $4a-b=0$①；又 $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\sqrt{2}$，$\therefore b^2-4ac=8a^2$②；由已知 $c=1$③．由①、②、③解得 $b=2,a=\frac{1}{2},c=1$，$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$．

［解法2］ $f(x-2)=f(-x-2)$ 即 $f(-2+x)=f(-2-x)$，故 $y=f(x)$ 的图象有对称轴 $x=-2$，可设 $y=a(x+2)^2+k$(余略)．

［解法3］ $\because y=f(x)$ 的图象有对称轴 $x=-2$，又 $|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$，$\therefore y=f(x)$ 与 x 轴的交点为 $(-2-\sqrt{2},0),(-2+\sqrt{2},0)$．故可设 $f(x)=a(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$．$\because f(0)=1$，$\therefore a=\frac{1}{2}$(余略)．

［点评］ 三种方法均是用待定系数法求二次函数的解析式，可以看到充分挖掘题目的隐含条件及充分利用图形的直观性，是简化运算的有效手段．

［考题5］ 某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从二月一日起的300天内，西红柿市场售价与上市时间的关系用图 1－12 的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图 1－13 的抛物线段表示．

(1)写出图 1－12 表示的市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$；

写出图 1－13 表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$；

(2)认定市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿纯收益最大？

(注：市场售价和种植成本的单位：元/10^2 kg，时间单位：天)

(2000 年全国高考题)

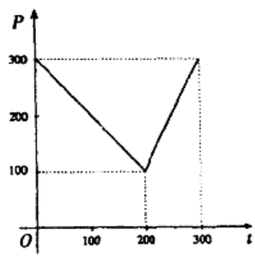


图 1－12

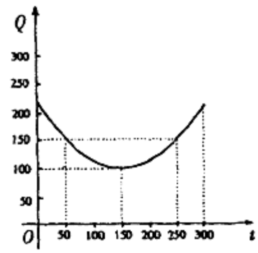


图 1－13

［解］ (1)由图 1－12 可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t)=\begin{cases}300-t,0\leqslant t\leqslant200,\\2t-300,200<t\leqslant300;\end{cases}$$

由图 1－13 可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100,0\leqslant t\leqslant300.$$

(2)设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$，则由题意得

$$h(t)=f(t)-g(t).$$

[解]$\begin{cases}-\frac{1}{2}<ax<\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}<\frac{x}{a}<\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2a}<x<\frac{3}{2a}\\-\frac{a}{2}<x<\frac{3a}{2}\end{cases}$

①当 $a=1$ 时，定义域为$\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\}$

②当$\begin{cases}\frac{3}{2a}<\frac{3}{2}a\\-\frac{1}{2a}<-\frac{a}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}<a\\\frac{1}{a}>a\end{cases}\Rightarrow a\in\varnothing$

③当$\begin{cases}\frac{3}{2a}<\frac{3}{2}a\\-\frac{1}{2a}>-\frac{a}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}<a\\\frac{1}{a}<a\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{a}<a\Rightarrow$

$a>1$ 时定义域$\{x|-\frac{1}{2a}<x<\frac{3}{2a}\}$

④当$\begin{cases}\frac{3}{2a}>\frac{3}{2}a\\-\frac{1}{2a}<-\frac{a}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}>a\\\frac{1}{a}>a\end{cases}\Rightarrow 0<a<1$

时，定义域$\{x|-\frac{a}{2}<x<\frac{3}{2a}\}$

⑤当$\begin{cases}\frac{3}{2a}>\frac{3}{2}a\\-\frac{1}{2a}>-\frac{a}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}>a\\\frac{1}{a}<a\end{cases}\Rightarrow a\in\varnothing$

故当 $a\geqslant1$ 时，定义域$\{x|-\frac{1}{2a}<x<\frac{3}{2a}\}$

当$0<a<1$时，定义域$\{x|-\frac{a}{2}<x<\frac{3a}{2}\}$

即 $h(t)=\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2},0\leqslant t\leqslant200,\\-\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t-\frac{1025}{2},200<t\leqslant300.\end{cases}$

当 $0\leqslant t\leqslant200$ 时，配方整理得

$$h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100,$$

所以，当 $t=50$ 时，$h(t)$取得区间$[0,200]$上的最大值 100；

当 $200<t\leqslant300$ 时，配方整理得

$$h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100,$$

所以，当 $t=300$ 时，$h(t)$取得区间$(200,300]$上的最大值 87.5.

综上，由 $100>87.5$ 可知，$h(t)$在区间$[0,300]$上可以取得最大值 100，此时 $t=50$，即从二月一日开始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大.

[点评] 与历年试题相比，2000 年的应用题难度明显降低，得分情况较好。(1)要求用图象表示的函数转换为用解析式表示，试题的(2)求指定区间二次函数的最大值，考生都比较熟悉。应用题难度降低有利于在校学生增强解决应用问题的信心，有利于提高用数学解决实际问题的兴趣.

4 能力题型设计

(高考还会这么考)

点击考点

[预测 1]根据条件分别求出函数 $f(x)$的表达式. —— 测试要点 3

(1)$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$

(2)$f(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}-1$

(3)$f(x)$满足关系式 $f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x$.

[预测 2]已知函数 $f(x)$的定义域为$[a,b]$，且 $b>0$，求 $f(x^2)$的定义域 —— 测试要点 2

[预测 3]设二次函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=f(2-x)$，且 $f(x)=0$ 的两实根平方和为 10，图象过点(0，3)，求 $f(x)$的解析式. —— 测试要点 3

[预测 4]求函数 $y=\lg(a^x-2\cdot3^x)(a>0$，且 $a\neq1)$的定义域 —— 测试要点 1、5

[预测 5]已知 y 是 x 的函数，其中 $x=\log_s t+\log_t s$，$y=\log_s^4 t+\log_t^4 s+m(\log_s^2 t+\log_t^2 s)(s>1,t>1$，常数 $m\in R)$，求函数 $y=f(x)$的解析式，并求出它们的定义域. —— 测试要点 3

[预测 6]一个圆柱形容器的底面直径是 d 厘米，高是 h 厘米，现以每秒 s 厘米^3 的速度向容器内注入某种溶液，求容器内溶液的高度 y 与注入时间 x(秒)的函数关系式. —— 测试要点 3、4

[预测 7]已知函数 $y=\lg(mx^2-4mx+m+3)$的定义域为 R，求实数 m 的取值范围. —— 测试要点 1、2

[预测 8]某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当范围内，决定对淡水鱼养殖提供政府补贴。设淡水鱼的市场价格为 x 元/kg，政府补贴为 t 元/kg. 根据市场调查，当 $8\leqslant x\leqslant14$ 时，淡水鱼的市场日供应量 Pkg 与市场日需求量 Qkg 近似地满足关系： —— 测试要点 3

$P=1000(x+t-8)\quad(x\geqslant8,t\geqslant0)$，

$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}\quad(8\leqslant x\leqslant14)$.

当 $P=Q$ 时的市场价格称为市场平衡价格.

(1)将市场平衡价格表示为政府补贴的函数,并求出函数的定义域;

(2)为使市场平衡价格不高于每千克 10 元,政府补贴至少为每千克多少元?

5 标准解答

1.(1)凑配法:$\because f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$ 用 x 代替式中的 $x+\frac{1}{x}$,又考虑到 $|x+\frac{1}{x}|\geq 2$,$\therefore f(x)=x^2-2(|x|\geq 2)$

(2)换元法:令 $1+\frac{1}{x}=t$,则 $\frac{1}{x}=t-1$,且 $t\neq 1$,

$\therefore f(t)=(t-1)^2-1=t^2-2t$, 即 $f(x)=x^2-2x(x\neq 1)$

(3)由 $f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x$……①中的 x 全换为 $\frac{1}{x}$ 得 $f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{3}{x}$……②,由①②得 $f(x)=\frac{2}{x}-x(x\neq 0)$

2.(1)据题意,$b>0$.由 $a\leq x^2\leq b$,得当 $a\leq 0$ 时,$x\in[-\sqrt{b},\sqrt{b}]$;当 $a>0$ 时,$\sqrt{a}\leq|x|\leq\sqrt{b}$,即 $x\in[-\sqrt{b},-\sqrt{a}]\cup[\sqrt{a},\sqrt{b}]$.

3.设 $f(x)=ax^2-bx+x(a\neq 0)$ 因有三个需求的系数,所以本题给出了三个已知条件,由 $f(x+2)=f(2-x)$,知该函数的图象关于直线 $x=2$ 对称,$\therefore\frac{-b}{2a}=2$ 即 $b=-4a$…①

又图象过点(0,3)$\therefore c=3$…② 由二实根平方和为 10 得 $(-\frac{b}{a})^2-\frac{2c}{a}=10$ 即 $b^2-2ac=10a^2$…③

由①、②、③得 $a=1,b=-4,c=3$($a=0$ 应舍去),$\therefore f(x)=x^2-4x+3$.

4.要使此函数有意义,必须 $a^x-2\cdot 3^x>0$ 即 $(\frac{a}{3})^x>2$,当 $a>3$ 时,此函数的定义域为 $\{x|x>\log_{\frac{a}{3}}2\}$.

当 $0<a<3$ 且 $a\neq 1$ 时, 此函数的定义域为 $\{x|x<\log_{\frac{a}{3}}2\}$.

5.$y=(\log_s^2t+\log_t^2s)^2-2+m(\log_s^2t+\log_t^2s)=[(\log_s^t+\log_t^s)^2-2]^2-2+m[(\log_st+\log_ts)^2-2]=(x^2-2)^2-2+m(x^2-2)=x^4+(m-4)x^2+2(1-m)$.

$\because s>1,t>1$, $\therefore\log_st>0,\log_ts>0$. $\therefore x=\log_st+\log_ts\geq 2\sqrt{\log_st\cdot\log_ts}=2$.

故 $f(x)=x^4+(m-4)x^2+2(1-m)$,定义域为$[2,+\infty)$.

6.由题意知,容器内溶液每秒升高 $\frac{4s}{\pi d^2}$(厘米),从而 $y=\frac{4s}{\pi d^2}x$.又知注满容器所需时间为 $h\div\left(\frac{4s}{\pi d^2}\right)=\frac{\pi hd^2}{4s}$(秒),其定义域是 $0\leq x\leq\frac{\pi hd^2}{4s}$.

7.(1)显然 $m=0$ 时函数的定义域为 R;

(2)$m\neq 0$ 时,$mx^2-4mx+m+3>0$ 对一切实数 x 均成立的充要条件是 $\begin{cases}m>0,\\ \Delta=(-4m)^2-4m(m+3)<0,\end{cases}$ 解得 $0<m<1$.由(1)、(2)知 $m\in[0,1)$.

8.(1)依题设有 $1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2}$.

化简得 $5x^2+(8t-80)x+(4t^2-64t+280)=0$.当判别式 $\Delta=800-16t^2\geq 0$ 时, 可得 $x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$.

由 $\Delta\geq 0,t\geq 0,8\leq x\leq 14$,得不等式组: ① $\begin{cases}0\leq t\leq\sqrt{50},\\ 8\leq 8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 14;\end{cases}$ ② $\begin{cases}0\leq t\leq\sqrt{50},\\ 8\leq 8-\frac{4}{5}t-\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 14.\end{cases}$

解不等式①,得 $0\leq t\leq\sqrt{10}$,不等式组②无解. 故所求的函数关系式为

$x=8-\frac{4}{5}t-\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$, 函数的定义域为$[0,\sqrt{10}]$.

(2)为使 $x\leq 10$,应有 $8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 10$. 化简得 $t^2+4t-5\geq 0$.

解得 $t\geq 1$ 或 $t\leq -5$,由于 $t\geq 0$,知 $t\geq 1$,从而政府补贴至少为每千克 1 元.

能力测试点4 函数的值域

高考考点解读

（名师释疑答题点）

1 知识要点

1. 值域的概念和常用函数的值域

函数的值域取决于定义域和对应法则，不论采用什么方法求函数的值域均应考虑其定义域.

下面为常见函数的值域：

一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的值域为 R；

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，当 $a>0$ 时值域是 $[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$，当 $a<0$ 时值域为 $(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}]$；

反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的值域为 $y\in R$ 且 $y\neq0$；

指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的值域为 R^+；

对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的值域为 R；

正、余弦函数的值域为 $[-1,1]$，正、余切函数的值域为 R.

2 思维拓展

2. 分析观察法求值域

有的函数的结构并不复杂，可以通过基本函数的值域及不等式的性质观察出函数的值域. 如函数 $y=\frac{1}{2+x^2}$ 的值域为 $\{y|0<y\leq\frac{1}{2}\}$.

3. 反函数法求值域

用函数和它的反函数的定义域和值域的关系，通过求反函数的定义域而得到原函数的值域. 形如 $y=\frac{cx+d}{ax+b}(a\neq0)$ 的函数值域可用此法.

4. 换元法求值域

运用代数或三角代换. 将所给函数转化成值域容易确定的另一函数，从而求得原函数的值域. 形如：$y=ax+b\pm\sqrt{cx+d}$（a、b、c、d 均为常数，且 $ac\neq0$）的函数常用此法求值域.

5. 配方法求值域

二次函数或转化为形如 $F(x)=a[f^2(x)+bf(x)+c]$ 类的函数的值域问题，均可用配方法，而后面的函数要注意 $f(x)$ 的范围.

样板题解析

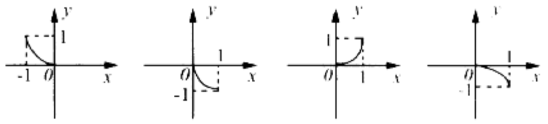
（看看以前怎么考的）

名师诠释

[考题1] 函数 $f(x)=\log_2 x+1(x\geq4)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的定义域是（　　）.（1999年上海高考题）

[解] 由 $x\geq4$ 得 $\log_2 x\geq2$，$\log_2 x+1\geq3$. 所以 $f(x)$ 的值域为 $[3,+\infty)$，$f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[3,+\infty)$.

[考题2] 设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leq x\leq0)$，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是（　　）（全国高考题）



A　　B　　C　　D

图1-14

[解] 先确定函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leq x\leq0)$ 的图象. 由 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}=y$，变形为 $x^2+(y-1)^2=1$，此函数图象是以点(0,1)为圆心，1为半径，且 $-1\leq x\leq0,0\leq y\leq1$ 的 $\frac{1}{4}$ 圆弧，如图1-15，它的反函数的图像是关于 $y=x$ 对称的 $\frac{1}{4}$ 圆弧. 故选B.

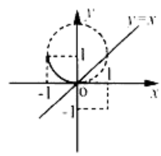


图1-15

[考题3] 求下列函数的值域

(1) $y=\frac{3x-1}{3x-2}$

(2) $y=x+\sqrt{2x-1}$

[解] (1) 由 $y=\frac{3x-1}{3x-2}$，求其反函数，得 $x=\frac{2y-1}{3y-3}$，整理为 $y=\frac{2x-1}{3x-3}$. 反函数的定义域为 $3x-3\neq0$ 即 $x\neq1$.

$\therefore$ 原函数的值域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 由 $2x-1\geq0$，得定义域为 $[\frac{1}{2},+\infty)$.

$\therefore$ 函数 x 和 $\sqrt{2x-1}$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 上都是增函数，

$\therefore y=x+\sqrt{2x-1}$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 上是增函数.

$\therefore y\geq\frac{1}{2}+\sqrt{2\times\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}$，即 $y\in[\frac{1}{2},+\infty)$.

[考题4] 求函数 $y=4x^2+2x+\frac{18}{2x^2+x+1}$ 的值域

[解] 可将 $4x^2+2x$ 化为 $2(2x^2+x+1)-2$，利用换元的办法简化函数式

6.不等式法求值域

利用基本不等式：$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$、$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.用此法求函数值域时，要注意条件“一正二定三相等”.如：利用 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 求某些函数值域(或最值)时应满足三个条件：①$a>0,b>0$；②$a+b$(或 ab)为定值；③取等号条件 $a=b$.三个条件缺一不可.

7.判别式法求值域

把函数转化成关于 x 的二次方程 $F(x,y)=0$，通过方程有实根，判别式 $\Delta\geqslant 0$，从而求得原函数的值域.形如 $y=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$($a_1,a_2$ 不同时为 0)的函数的值域常用此法求得.

8.利用函数的单调性求值域

确定函数在定义域(或某个定义域的子集上)的单调性质求出函数的值域的方法为单调性法.考虑用单调性法求值域常见的有 $y=ax+b+\sqrt{dx+e}$(a、b、d、e 均为常数，且 $ad\neq 0$)，看 a 与 d 是否同号，若同号用单调性求值域，若异号则用换元法求值域；还有的在利用重要不等式求值域失效(等号不满足)的情况下，可采用单调性求值域，但须熟悉下述结论.

函数 $y=x+\dfrac{k}{x}(x>0,k>0)$

$x\in(0,\sqrt{k}]$，函数递减

$x\in[\sqrt{k},+\infty)$，函数递增.

[例如]求函数 $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的值域，由 $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}=t+\dfrac{1}{t}(t\geqslant 2)$

因 $t>0,t\cdot\dfrac{1}{t}=1$，但 $t=\dfrac{1}{t}\Rightarrow t=\pm 1$ 不在区间$[2,+\infty)$，故等号不成立，考虑单调性.

因 $y=t+\dfrac{1}{t}$ 在区间$[1,+\infty)$单调递增，所以在其子区间$[2,+\infty)$为单调递增函数.

故 $y\in[2.5,+\infty)$

9.数形结合法求函数的值域

数形结合法：利用函数所表示的几何意义，借助于几何方法或图象来求函数的值域.

3 综合创新

10.值域可以理解为“范围”，在涉及到求范围的问题时，看能否建立函数关系通过求值域的办法求出范围，参看[考题 7]，还有一些有关值域的逆向思维题.

[例如]已知函数 $f(x)=\log_3\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,2]$，求 m、n 的值.

设 $2x^2+x+1=t$，则 $t=2(x+\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{7}{8}\geqslant\dfrac{7}{8}$，$y=2t+\dfrac{18}{t}-2\geqslant 10$

当 $2t=\dfrac{18}{t}$ 即 $t=3$ 时，此时 $x=-\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{17}}{4}$ 时等号成立.

故原函数的值域为$[10,+\infty)$.

[点评] 利用重要不等式求值域，要注意满足三个条件“一正二定三等”，特别是等号能否成立.

[考题 5] 求下列函数的值域

(1)$y=\dfrac{2x^2+4x-7}{x^2+2x+3}$

(2)$y=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$

[解] (1)观察函数式，可用判别式法将已知的函数式变形为

$yx^2+2yx+3y=2x^2+4x-7$,

$(y-2)x^2+2(y-2)x+3y+7=0$.

显然 $y\neq 2$.将上式视作关于 x 的一元二次方程：

$\because x\in R$，即上述关于 x 的一元二次方程有实根.所以

$[2(y-2)]^2-4(y-2)(3y+7)\geqslant 0$.

解这个不等式得 $-\dfrac{9}{2}\leqslant y\leqslant 2$.

又 $y\neq 2$ $\therefore$ 函数的值域为$[-\dfrac{9}{2},2)$.

(2)利用三角函数的有界性较数形结合($y=\dfrac{0-(-\sin x)}{2-\cos x}$为点$(2,0)$与点$(\cos x,-\sin x)$连线的斜率)的过程要简单.

将原函数化为 $\sin x+y\cos x=2y$

$\sqrt{1+y^2}(\sin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\cos x)=2y$

令 $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ 且 $\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$,

$\therefore\sin(x+\varphi)=\dfrac{2y}{\sqrt{1+y^2}}$，$|\dfrac{2y}{\sqrt{1+y^2}}|\leqslant 1$，平方得

$3y^2\leqslant 1$ $\therefore$ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

[考题 6] 已知 $f(x)$ 的值域是$[\dfrac{3}{8},\dfrac{4}{9}]$，试求 $y=g(x)=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$ 的值域.

[解] 令 $t=\sqrt{1-2f(x)}$，则 $t\in[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$，$f(x)=\dfrac{1}{2}(1-t^2)$，$\therefore y=F(t)=\dfrac{1}{2}(1-t^2)+t=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+1$.由于函数 $y=F(t)$ 在区间$[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$上递增，$\therefore y_{min}=F(\dfrac{1}{3})=\dfrac{7}{9}$，$y_{max}=F(\dfrac{1}{2})=\dfrac{7}{8}$，$\therefore y\in[\dfrac{7}{9},\dfrac{7}{8}]$.

[考题 7] 如图，已知梯形 $ABCD$ 中，$|AB|=2|CD|$，点 E 分有向线段$\overline{AC}$所成的比为 λ，双曲线过 C、D、E 三点，且以 A、B 为焦点，当$\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{3}{4}$时，求双曲线离心率 e 的取值范围.

[解] 已知条件 $\lambda\in[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}]$，求离心率 e 的范围，可以大胆地构造做题框架，找出 λ 与 e 的关系式再往下作.

如图，以 AB 的垂直平分线为 y 轴，直线 AB 为 x 轴，建立直角坐标