



数据加载失败，请稍后重试！

介质谐振器微波电路

顾其净 编著

吴万春 审订

人民邮电出版社

内 容 简 介

微波介质谐振器是一种新颖的、有发展前途的器件。

本书系统地介绍了微波介质谐振器的理论和分析方法，特别着重其电路设计和应用。内容有介质谐振器的基本理论及其与各种传输线的耦合，各种介质谐振器滤波器、鉴频器及多工器等原理和设计，以及用介质谐振器稳频的各种固态源的分析和设计。最后还介绍了一些介质谐振器微波电路组件。

本书可供从事微波通信、雷达、导航、制导、电子对抗、遥控遥测遥感以及微波测量等方面的工程技术人员和大专院校师生参考。

介 质 谐 振 器 微 波 电 路

顾其净 编著

吴万春 审订

责任编辑：俞天林

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

开本：787×1092 1/32 1986年5月第 一 版
印张：7 24/32 页数：124 1986年5月河北第一次印刷
字数：182 千字 印数：1—2,500 册

统一书号：15045·总3156-无6360

定价：1.70 元

前 言

介质谐振器微波电路是近十多年来发展起来的一种新型微波电路。这种电路除应用了介质谐振器外，在形式上并不十分新奇，因为其余部分还是普通的微波传输线和器件。但由于介质谐振器的作用，却给这种电路带来了一些优异特性，这主要是因为介质谐振器的体积小、 Q 值高、结构简单和成本低廉等。介质谐振器的体积只有相同谐振频率的金属空腔谐振器的几十到几百分之一，但两者的 Q 值却相差无几。用它来稳定振荡源频率，可以做到在几乎不增加体积情况下，获得提高频率稳定性和降低噪声的双重好处，这是金属空腔谐振器无法做到的。介质谐振器与微波集成电路结合起来，可以获得可靠性高、性能价格比好的微波电路，这也是其它微波电路无法与之相比的。正因为如此，介质谐振器微波电路一出现就受到人们的重视。在国外，尤其是日本和美国，几乎所有有关公司和研究部门都花了不少人力和物力对介质谐振器的材料和电路作了大量研究工作。在短短的几年里，不仅研制出了各种功能的介质谐振器电路，而且不少已成为商品出售。更值得注意的是，这种微波电路不仅被广泛应用在通信、雷达、制导和导航等微波设备中，而且也为民用卫星直播电视接收机和汽车防撞雷达等民用产品所普遍采用。可见这是一种很有前途的微波电路。

国内在这方面的的工作虽比美、日等国起步要迟些，但近几年来已有很大的进展，与国外水平相差不算太大。在材料方面，已前后研制成钛酸钡和钛酸锆锡等几种性能良好的陶瓷介质。在电路方面的研制工作更是遍及可应用介质谐振器的各种

场合，如滤波器、鉴频器和稳频振荡器等等，而且不少电路已达到实用阶段，有的已用于设备中，并收到较好的效果。既然介质谐振器电路如此吸引人，发展又如此迅速，所以从事微波工程和电路的工程技术人员，了解和学习一些有关微波介质谐振器及其电路的知识，是非常必要的。

本书是根据作者多年来从事介质谐振器电路的研制工作所积累的资料和实践经验，并汲取国外有关资料编写而成的。在编写中力求做到概念清楚，方法正确，对各种介质谐振器微波电路的阐述一般都包括工作原理、理论分析和设计方法三方面的内容，目的是使本书适合更多的读者对象。对于从事微波工程和电路的设计人员，利用本书所介绍的设计方法和有关公式与曲线，即可进行设计和研制有关电路的工作。

本书共分六章。第一章主要介绍介质谐振器的工作原理、材料及其特性等。第二章讨论介质谐振器的集总参数等效电路及其与微波传输线和电路的耦合，并对一些基本电路作了理论分析。这两章是本书的基础部分。第三章到第五章是本书的主体，其内容是目前介质谐振器电路应用的几个重要方面。第三章和第四章分别讨论了各种微波介质谐振器滤波器、鉴频器以及多工器等无源电路。第五章则着重讨论用介质谐振器稳频的各种类型振荡器等有源电路。第六章介绍了介质谐振器微波电路的几个方面的应用实例。

编写此书时得到许多同志的帮助和提出宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限和编写时间仓促，不当和错误之处在所难免，请读者指正。

作者

目 录

第一章 介质谐振器的基本特性	(1)
§ 1.1 引言	(1)
§ 1.2 介质谐振器的工作机理	(4)
§ 1.3 矩形介质谐振器的特性	(6)
§ 1.4 圆柱形介质谐振器的特性	(17)
§ 1.5 圆环形介质谐振器	(26)
§ 1.6 介质谐振器的品质因数	(29)
§ 1.7 介质谐振器的材料	(32)
§ 1.8 介质谐振器的主要参数测量	(36)
§ 1.9 电路结构对介质谐振器的影响	(39)
第二章 介质谐振器的基本电路	(45)
§ 2.1 介质谐振器的集总参数等效电路	(45)
§ 2.2 介质谐振器间的直接耦合	(51)
§ 2.3 介质谐振器与微带线间的耦合	(57)
§ 2.4 介质谐振器与截止波导间的耦合	(70)
§ 2.5 介质谐振器与变容管电路的耦合	(75)
第三章 介质谐振器滤波器	(81)
§ 3.1 截止波导型介质谐振器带通滤波器	(82)
§ 3.2 微带型介质谐振器带通滤波器	(95)
§ 3.3 半波长介质谐振器同轴型带通滤波器 ...	(106)
§ 3.4 TM_{010} 模圆柱形介质谐振器带通滤波器	(114)
§ 3.5 微带型带阻滤波器	(119)

§ 3.6	悬置带线型带阻滤波器	(123)
§ 3.7	波导型带阻滤波器	(124)
§ 3.8	电调谐介质谐振器滤波器	(126)
§ 3.9	有源滤波器··	(130)
§ 3.10	寄生模的抑制	(133)
第四章	介质谐振器鉴频器和多工器电路	(136)
§ 4.1	微波鉴频器电路	(136)
§ 4.2	双工器电路	(147)
§ 4.3	多工器电路	(158)
第五章	介质谐振器稳频微波固态源	(161)
§ 5.1	引言	(161)
§ 5.2	加载带阻滤波器型稳频振荡器	(163)
§ 5.3	传输型稳频振荡器	(180)
§ 5.4	反馈型稳频振荡器	(188)
§ 5.5	电调谐介质谐振器振荡器	(195)
§ 5.6	功率合成介质谐振器振荡器	(199)
§ 5.7	有源稳频振荡器	(200)
第六章	应用介质谐振器的微波电路组件	(218)
§ 6.1	微波接收机的小型前端组件	(218)
§ 6.2	超低噪声微波频率综合器	(226)
§ 6.3	高概率截获接收机的频率分析组件	(232)

第一章 介质谐振器的基本特性

§ 1.1 引言

电磁谐振器是一种储存一定电磁能量的元件，电能和磁能在其中周期地互相转换，这种转换过程称为振荡，振荡的频率称为谐振频率。电磁谐振器最常见的例子，是电感 L 和电容 C 组成的串联或并联谐振电路，电感储存磁能，电容储存电能，谐振时两者互相转换。在微波频率上，低频 LC 电路不能应用。传统的谐振器是金属空腔，电能和磁能在腔内互相转换。实际上，能够限定电磁能量在一定区域内振荡的结构，都可以构成电磁谐振器，各种金属传输线谐振器即是其例。不用金属也可以构成电磁谐振器，如YIG谐振器和介质谐振器等。YIG磁调谐振器已有专著介绍，本书只介绍介质谐振器。介质谐振器是用高介电常数和低损耗的介质材料制成，具有优良的电磁特性。

介质谐振器虽然是本世纪六十年代才被人重视、七十年代才得到迅速发展的一种新型微波元件，但它孕育的时间很长，可追溯到本世纪30年代末。美国斯坦福大学的学者R. D. Richmyer在1939年就从理论上证明了：未金属化的高介电常数和低损耗的介质可作为微波电磁谐振器。他把这种谐振器称为介质谐振器。但限于当时的工艺和技术水平，没有研制出微波损耗足够小的高介电常数介质材料，因而介质谐振器一直未能得到推广和应用。直到六十年代，由于材料科学和技术的进展，

研制低损耗、高介电常数的微波介质材料已有可能，同时由于空间技术的发展，对电子设备的高可靠性和小型化的要求日益迫切，因此，对介质谐振器的研究又重新活跃起来。这时已从理论上分析了各种形状介质谐振器的工作模式和谐振频率，探讨了它们的电路特性及其应用。但这时可作微波谐振器的介质只有金红石 (TiO_2) 和钛酸锶 (SrTiO_3) 单晶和多晶材料，它们的相对介电常数很高，分别为100和300左右，微波损耗也很小。实验表明，一个以最低次模工作的3厘米波段的单晶金红石矩形谐振器，在室温下的无载品质因数 Q_0 高达9000，温度降至绝对温度4.2K时， Q_0 值增加5倍以上，在此温度下，即使工作频率高达50GHz，其 Q_0 值还有 10^4 数量级。性能好的3厘米波段金红石谐振器，在绝对温度78K下的 Q_0 值可达85,000，它完全可以与金属空腔谐振器相匹敌。这里要着重指出，这类高 Q 值介质谐振器的体积只有相同频率金属空腔的几百分之一到千分之一，重量也比后者轻两个数量级。但是，当时的介质谐振器主要用于顺磁自旋共振实验，还不能作为微波电路元件，这是因为金红石等介质材料的温度性能太差。金红石谐振器的频率温度系数高达400ppm/ $^{\circ}\text{C}$ ($1\text{ppm} = 1 \times 10^{-6}$)，钛酸锶谐振器的频率温度系数高达1500ppm/ $^{\circ}\text{C}$ 。这样一个10GHz金红石谐振器，当环境温度变化达100 $^{\circ}\text{C}$ 时，其谐振频率将漂移400MHz，比铜制的空腔谐振器要差一个数量级。当然，钛酸锶谐振器的谐振频率随温度变化就更大了。寻求一种更为实用的高介电常数、低微波损耗和小频率温度系数的介质材料，就成为当时材料科学的目标之一。

经过几年努力，七十年代终于在美国和日本等国先后研制成几种性能符合要求的陶瓷介质系列材料，如钛酸钡、锆酸盐和钛酸锆锡等。从此，介质谐振器才真正作为一种新的微波元

件用到微波电路中，尤其是混合微波集成电路中。上述这些新材料的特点是：相对介电常数比金红石等要低，只有35~40，损耗比金红石略大，但频率温度系数却十分优异，远比铜低，可同殷钢媲美，而且温度系数的正负和大小都可调节，它们的 Q 值在微波波段上可达10,000。由于新材料相继涌现，对介质谐振器的理论和应用两方面的研究，再次出现新的高潮。在理论方面主要研究的问题，是介质谐振器的谐振频率、 Q 值及其与外电路耦合的准确计算；在应用方面主要研制滤波器、鉴频器、稳频固态源以及各种可应用介质谐振器的微波组件。可以说所有用谐振器的微波电路，均有介质谐振器电路与之对应，也许比金属空腔谐振器应用得还要广泛。因为介质谐振器的体积小，同微波集成电路的元件尺寸相匹配，可以广泛地用在混合微波集成电路中，这是空腔谐振器所办不到的。

微波介质谐振器及其电路应用的发展，在很大程度上与空间和军事电子技术的发展对微波电路小型化、集成化和高可靠性的迫切要求有关。但介质谐振器及其电路的出现，也为微波电路的民用开辟了新的现实的途径。由于介质谐振器的性能良好，加工方便，价格便宜，它与微波集成电路相结合，可能将成为民用产品中微波电路的一种重要形式。因为对民用产品来说，价格或更确切地说性能价格比是个极其重要的指标，例如，卫星直播电视接收机的室外单元中的微波组件，以及汽车上用的防撞雷达中的微波电路，大都可采用介质谐振器微波电路，以降低价格，提高性能。

介质谐振器的应用，实际上，现在已越出厘米波段，跨进了毫米波和亚毫米波领域。最近已有关于可用作90GHz谐振器的介质材料报导，据称其 Q 值可达10,000，这是一个值得注意的新动向。

§ 1.2 介质谐振器的工作机理

我们知道，理想导体壁（电阻率为零）在电磁理论中称为电壁，在电壁上，电场的切向分量为零，磁场的法向分量为零。电磁波入射到电壁上将被完全反射回来，没有透射波穿过电壁。因此，用电壁围成一个封闭腔，一旦有适当频率的电磁波馈入，波将在腔的电壁上来回反射，在腔内形成电磁驻波，发生电磁谐振。此时即使外部停止向腔内馈送能量，已建立起来的电磁振荡仍将无衰减地维持下去。可见电壁空腔是一种谐振器，电磁能量按一定频率在其中振荡。当然，非理想导体壁构成的空腔，也具有电壁空腔的类似特性，只不过外部停止馈送能量后，其内部已建立起来的电磁振荡，不会长期地维持下去，将随时间而逐渐衰减，终于消逝，成为阻尼振荡。谐振器中电磁振荡维持时间的长短（时间常数）是其 Q 值高低的一种度量。

现在我们来研究电磁波在高介电常数介质与空气交界面上的

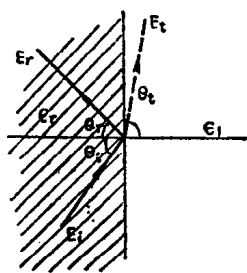


图 1.2-1 电磁波在介质界面上的反射与折射

的反射和折射情况。如图1.2-1，假设有一平面电磁波 E_i 由介质向空气入射，入射角为 θ_i ，则在界面上将有一部分波被反射回来，称为反射波 E_r ，反射角 θ_r 等于 θ_i ；另一部分波穿过界面，称为透射波 E_t ，折射角为 θ_t 。按照折射定律，入射角 θ_i 与折射角 θ_t 间的关系是

$$\sqrt{\epsilon_r} \sin \theta_i = \sin \theta_t \quad (1.2-1)$$

由于相对介电常数 ϵ_r 总是大于1，故 θ_i 总是大于 θ_c 。当

$$\theta_i = \theta_c = \sin^{-1}(1/\sqrt{\epsilon_r}) \quad (1.2-2)$$

时，折射角 $\theta_t = 90^\circ$ ，这时空气中的波沿界面传输，它的能量来自无限远处的场源，而与入射波无关，谓之表面波。于是介质中的入射波能量全部反射回介质，没有平均能流穿过界面，发生全反射。开始发生全反射的入射角 θ_i ，称为临界角 θ_c 。只要入射角大于临界角，都要发生全反射。相对介电常数 ϵ_r 愈大，临界角愈小，如 $\epsilon_r = 36$ ，则 $\theta_c = 9^\circ 37'$ 。这样，即使波沿着很靠近界面的方向从介质斜入射（ θ_i 大于 $9^\circ 37'$ ）到界面，能量也会全部反射回来。所以高介电常数介质的界面与导体壁有类似的特性，能使电磁波发生完全的或近似完全的反射。当然，这两类界面的性质不同，其对电磁波的反射特性也不尽相同。电磁波在导体壁上电场切向分量为零，故入射波与反射波的电场切向分量相消，仅有法向分量，因而合成场的电力线垂直导体表面，亦即垂直电壁；而在高介电常数的介质界面上，磁场切向分量近似为零，入射波与反射波的磁场切向分量近似相消，合成场的磁力线近似垂直于介质界面。在电磁理论中，垂直于磁力线的壁，称为磁壁，故高介电常数的介质表面可近似看成磁壁，只有 $\epsilon_r \rightarrow \infty$ 时，才是真正磁壁。在磁壁上，磁场切向分量为零，电场法向分量为零，它与电壁对偶。既然电壁所构成的空腔可作为微波谐振器，显然，磁壁所围的介质块亦可作为微波谐振器。所以高介电常数介质块近似是个磁壁谐振器，电磁能量在介质块内振荡，不会穿过磁壁泄漏到空气里。

我们还可以用介质波导观点来说明介质谐振器产生电磁振荡的机理。早在三十年代就知道高介电常数的介质棒能导行微波频率的电磁波。若将介质棒变成一个环，令其首尾接在一起，并使连接处电磁波有相同相位，该电磁波就能在环内循环

传输，成为一个行波环。如果介质损耗非常小，循环时间就很长，于是电磁波被“禁锢”在介质环内，成为一个环形介质谐振器。介质环的最小平均周长应是被导波的一个波导波长。上述的谐振条件并未对介质环的形状加以任何限制，所以环可以是圆的、方的或其它任意形状。此外，环的内径大小对谐振来说也不是实质性的，内径缩小至零，照样能维持振荡，储存电磁能量。

最常用的介质谐振器形状有矩形、圆柱形和圆环形三种，前两种用得更普遍。矩形介质谐振器的工作主模是 TE_{111} 模，圆柱形的工作主模是 TE_{011} 模。图1.2-2示出这两种谐振器及其主模场分布。关于介质谐振器的振荡模式，将在下面几节讨论。

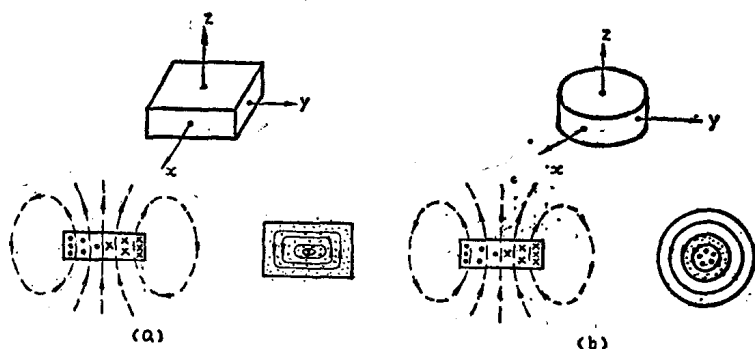


图 1.2-2 矩形和圆柱形介质谐振器及其主模场分布

§ 1.3 矩形介质谐振器的特性

分析研究介质谐振器特性的方法有好几种，如完全磁壁法、混合磁壁法、开波导法、变分法、突变端法以及高介电常

数的场展开法等等。这些方法的主要差别表现在如何给定其数学模型，即如何描绘介质谐振器内外的电磁场分布上。完全磁壁法和混合磁壁法的优点是简单直观，但磁壁模型对介质界面是一种比较粗糙的近似，所以用这两种方法计算出的谐振频率，精度较差，只有百分之几，甚至百分之十几。开波导法稍复杂些，但精度较高，约为3%左右。其余方法则更复杂些，但精度更高，一般在1%以内。在微波电路中，通常用混合磁壁法或开波导法来计算谐振频率就可以满足需要，因为利用电路中的频率微调措施，可将其调整到正确频率上。但对一些要求较高的电路，这两种方法的精度是不够的，必须用象变分法等比较准确的方法来计算。这些方法虽然复杂些，但借助电子计算机，利用已有的计算程序，可以很快地计算出其谐振频率来。当然，编制一个设计程序，需要花费一定时间和精力，但对现代微波工程师来说，这是必须具备的能力。

基于本书目的，下面我们主要用混合磁壁法和开波导法来研究介质谐振器的特性。

1.3.1 混合磁壁法

我们现在来研究图 1.3-1(a) 所示的矩形介质谐振器的电路结构。这个结构是将一个矩形介质谐振器放在一块介质衬底上，衬底的相对介电常数 ϵ_2 小于谐振器的 ϵ_r ，衬底下部和谐振器上部都有一块金属板，用来屏蔽谐振器。谐振器的截面尺寸为 $A \times B$ ，长为 L ，距离上下金属板分别为 h_1 和 h_2 。当 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ ， $h_1 = h_2 \rightarrow \infty$ 时，这个结构就变成自由空间里的孤立矩形介质谐振器。

用混合磁壁法分析图 1.3-1(a) 结构中的电磁场时，先将

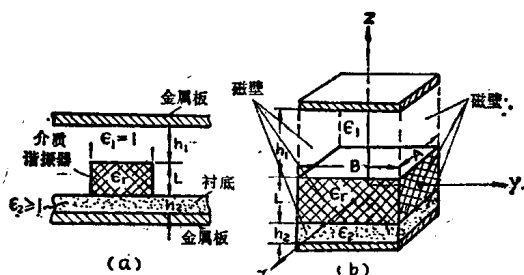


图 1.3-1 介质谐振器的电路结构及其等效磁壁波导模型

介质谐振器看作一段长为 L 、截面为 $A \times B$ 的磁壁波导, 再将此波导段的四周磁壁向上下延伸到金属板面, 形成两段一端短路、中间填充不同介质的磁壁波导, 如图 1.3-1(b) 所示。由于谐振器的上下界面不是磁壁, 故上下两段磁壁波导中仍有电磁场存在, 该波导的截面 $A \times B$ 不很大, 而 ϵ_1 和 ϵ_2 又小于 ϵ_r , 所以它们处于截止状态。这样, 介质谐振器的振荡模式和谐振频率, 应由这三段磁壁波导来确定, 谐振器段磁壁波导是传输的, 而上下两段短路磁壁波导是截止的。

图 1.3-1(b) 的磁壁波导结构中的电磁场, 可分解为 TE 模和 TM 模, 并能分立存在。下面我们先讨论 TE 模, 再讨论 TM 模。

选取直角坐标系如图 1.3-1(b) 所示, 则其 TE 模的磁场 z 分量满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \quad (1.3-1)$$

应用分离变量法, 同时考虑到磁壁上的边界条件: 磁场切向分量 $H_z = 0$ 和电场法向分量 $E_z = 0$, 则由上面亥姆霍兹方程可解得各场分量为

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = -\frac{k_y}{k_0^2} A_0 \sin k_x x \cos k_y y f'(z) \\ H_y = -\frac{k_x}{k_0^2} A_0 \cos k_x x \sin k_y y f'(z) \\ H_z = A_0 \cos k_x x \cos k_y y f(z) \\ E_x = \frac{j\omega \mu_0 k_y}{k_0^2} A_0 \cos k_x x \sin k_y y f(z) \\ E_y = \frac{-j\omega \mu_0 k_x}{k_0^2} A_0 \sin k_x x \cos k_y y f(z) \\ E_z = 0 \end{array} \right. \quad (1.3-2)$$

式中, A_0 是积分常数, μ_0 是导磁率, 而

$$\left\{ \begin{array}{l} k_x = \frac{m\pi}{A} \quad (m = 1, 2, \dots) \\ k_y = \frac{n\pi}{B} \quad (n = 1, 2, \dots) \\ k_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2} \end{array} \right. \quad (1.3-3)$$

为了确定函数 $f(z)$, 我们知道, 上下两段短路磁壁波导中的场是衰减场, 可设为双曲函数 $\text{sh}\alpha z$ 形式, 在上下金属板表面上, $H_z = 0$, 即 $f(z) = 0$; 介质谐振器内的场是驻波场, 可设为三角函数 $\cos\beta z$ 形式, 并在其上下界面上 H_z 连续, 即 $f(z)$ 连续。由此得出

$$f(z) = \begin{cases} \cos(\beta z + \varphi) & (|z| \leq L/2) \\ \frac{\cos\left(\frac{BL}{2} + \varphi\right)}{\text{sh}\alpha_1 h_1} \text{sh}\alpha_1 \left(\frac{L}{2} + h_1 - z\right) & \left(\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} + h_1\right) \end{cases} \quad (1.3-4)$$

$$\left\{ \frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2} - \varphi\right)}{\operatorname{sh}\alpha_2 h_2} \operatorname{sh}\alpha_2 \left(z + \frac{L}{2} + h_2\right) \left(-\frac{L}{2} - h_2 \leq z \leq -\frac{L}{2}\right) \right.$$

式中

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{k_o^2 - \epsilon_1 k_o^2}, & \alpha_2 = \sqrt{k_o^2 - \epsilon_2 k_o^2} \\ \beta = \sqrt{\epsilon_r k_o^2 - k_o^2}, & k_o = \frac{2\pi}{\lambda_o} = \omega_r \sqrt{\mu_o \epsilon_o} \end{cases} \quad (1.3-5)$$

在上面各式中，谐振频率 ω_r (k_o 或 λ_o) 是个未知数。再应用谐振器的上下界面上 E_z 或 E_r 连续，即 $f'(z)$ 连续，可以求得

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\beta L}{2} + \varphi\right) = \frac{\alpha_1}{\beta} \operatorname{cth}(\alpha_1 h_1) \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\beta L}{2} - \varphi\right) = \frac{\alpha_2}{\beta} \operatorname{cth}(\alpha_2 h_2) \end{cases} \quad (1.3-6)$$

由上式消去 φ 或 $\beta L/2$ 得到

$$\beta L = s\pi + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} \operatorname{cth}\alpha_1 h_1\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta} \operatorname{cth}\alpha_2 h_2\right) \quad (s=0, 1, 2, \dots) \quad (1.3-7)$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} \operatorname{cth}\alpha_1 h_1\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta} \operatorname{cth}\alpha_2 h_2\right) \quad (1.3-8)$$

式(1.3-7)是求传输常数 β 的特征方程，它还可简写为

$$\beta L = s\pi + \delta\pi = (s + \delta)\pi \quad (1.3-9)$$

其中

$$\delta = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} \operatorname{cth}\alpha_1 h_1\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta} \operatorname{cth}\alpha_2 h_2\right) \right]$$

因为上式方括号内的角都是第一象限角，故 δ 值在0与1之间。