GAOZHONG SHUXUE AOLINPIKE TONGBU JIAOCAI

高中数学

主编　刘凯年

第一册

奥林匹克

同步教材

西南师范大学出版社

GAOZHONG SHUXUE AOLINPIKE TONGBU JIAOCAI

高中数学

第一册

主　编　刘凯年
副主编　黄梦熊　李开珂
编　委　（以姓氏笔划为序）
周迎春　欧　健
郭希连　童明国
谢家渝

奥林匹克

同步教材

西南师范大学出版社

责任编辑　胡小松
封面设计　王　煤

高中数学奥林匹克同步教材
第一册
刘凯年　主编

西南师范大学出版社出版、发行
（重庆　北碚）
重庆九宫庙印刷厂印刷
开本:850×1168 1/32 印张:11.25 字数:310千
2000年6月　第1版　2001年12月　第4次印刷
ISBN 7-5621-2345-4/G·1382

定价:12.00元

奥林匹克金、银、铜牌得主指导教师

部分作者简介

吴国庆

多位金、银、铜牌得主的指导教师之一
担任数十届国际化学奥林匹克竞赛中国队领队
第 27 届国际化学奥林匹克学术委员会主任和命题组组长
中国化学会科普工作委员会主任
全国化学竞赛命题组组长
中国化学会理事
中国化学会化学教育委员会副主任
教育部高师教改指导委员会委员兼化学学科组组长

曹居东

多位金、银牌得主的指导教师之一
北京市化学奥林匹克竞赛集训队主教练
中国化学会理事
中国化学会化学教育委员会副主任
中国化学会有机化学学科委员会委员
教育部高校有机化学及高分子专业指导组成员

严宣申

多位金、银、铜牌得主的指导教师之一
第 27 届、第 28 届、第 29 届
国际中学生化学奥林匹克竞赛国家集训队主教练
全国化学竞赛命题组成员

轩植华

多位金、银、铜牌得主的指导教师之一
第 28 届、第 29 届、第 30 届
国际中学生物理奥林匹克竞赛国家队主教练
第 28 届、第 29 届、第 30 届
国际中学生物理奥林匹克竞赛国家队教学领队

缪钟英

第 26 届、第 28 届国际中学生物理奥林匹克竞赛
2 位金牌得主的指导教师之一
全国中学生物理奥林匹克竞赛委员会委员

范小辉

第 26 届
国际中学生物理奥林匹克竞赛 1 位金牌得主的指导教师
全国“五一”劳动奖章获得者

刘凯年

第 37 届国际中学生数学奥林匹克竞赛
金牌得主的指导教师
全国初中数学联赛组委会委员

施　华

第 29 届、第 30 届
国际中学生化学奥林匹克竞赛 2 位银牌得主的指导教师

卷首语

亲爱的读者，我们正在迈向一个崭新的世纪，怎样树立创新意识，跟上时代前进的步伐，已成为广大青少年面临的富有挑战性的课题。面对世界范围方兴未艾的奥林匹克竞赛，我们把视角投向挖掘广大青少年的创新潜力，推崇发现、发明、革新、开拓、进取的百折不挠的奥林匹克精神。该系列教材在选材和编写结构上，对推进中学学科素质教育，拓展中学生的知识视野，训练中学生的实验操作能力以及培养中学生的社会活动参与意识等方面做出了有益的尝试，并在保持该系列教材初中版优势的基础上再创特色：

同 步 与课堂教学同步进行初赛训练，使竞赛训练既是课堂教学的巩固和延伸，又有利于中学生参与高考角逐。

递 进 知识水平由浅入深、循序渐进地拓宽和提高，能力训练由初赛的热身训练（见各分册）自然过渡到初赛实战训练（见综合卷），并在保持每分册相对

独立的基础上体现出较强的系统性。

融 合 知识生长点注重与新数学思想和新课程标准融合,能力训练注重与社会生活和科研情景融合。

新 颖 人有我新的魅力所在

——《高中数学奥林匹克同步教材》注重数学方法的渗透,提高数学竞赛的综合素质能力和应变技能。

——《高中物理奥林匹克同步教材》专题点拨竞赛难点,浓缩物理竞赛解题方法精华,启迪发展多向思维。

——《高中化学奥林匹克同步教材》追踪最新竞赛动态,提问式地分析归纳重点、难点、热点,独具新颖、直观的思维训练匠心。

——《高中英语奥林匹克同步教材》知识水平高于现行人教版教材,能力训练模拟新高考题型,其综合卷与即将实施的新课程标准接轨,听力试题配有录音磁带。

该系列教材凝结着一大批为我国奥林匹克竞赛事业做出成绩的教练员们的热情与心智,他们为了使奥赛训练的宝贵经验连同他们对奥林匹克竞赛内涵的深刻理解尽可能完美地跃然纸上,不辞辛劳地几易其稿,用爱与心的奉献沐浴奥林匹克竞赛的花蕾。

亲爱的读者,我们衷心祝愿高中奥林匹克同步教材伴你走向成功!

前　言

1985 年，中国数学会派出两名选手参加了在芬兰举办的第 26 届国际数学奥林匹克(IMO)，从此揭开了中国数学竞赛活动的新的一页。在很短的时间内，我国在 IMO 中取得了令世界瞩目的成绩。从第 26 届到第 40 届国际数学奥林匹克，中国代表队 7 次获得团体总分第一名，3 次获得第二名。这样好的成绩归功于选手和各级数学奥林匹克教练员，也是全国广大中学师生在大面积提高数学教学质量的基础上，各地广泛开展数学竞赛活动的结果。

作为课堂学习的补充，数学竞赛活动在扩大知识领域、开发智力、培养能力、激发学生学习兴趣、开拓视野、交流信息，以及激励学生的爱国热情、树立为科学献身的志向等方面都起着积极的促进作用。事实证明，大量在数学竞赛活动中涌现出来的优胜者，他们在学校里也是各科成绩拔尖的姣姣者，品学兼优的好学生。数学竞赛培训产生的强大素质教育功能已普遍为广大中学师生和社会各界所认同。可以说，数学竞赛活动(以及培训活动)已成为中学数学教育活动的一个有机组成部分。

为适应高中学生在牢固灵活地掌握数学基础知识的基础上系统地学习竞赛数学知识；学习并掌握大量现代数学中的数学思想方法，

我们编写了这套《高中数学奥林匹克同步教材》。教材分“第一册”、“第二册”和“综合卷”。第一册和第二册为系统学习基础知识、基本技能使用;综合卷更加突出数学奥林匹克的思维训练功能,作系统学习后的强化提高培训使用。

数学是锻炼思维的体操,奥林匹克数学更是如此。本教材立足基础,突出数学思想方法,结合学生课堂学习进度,注意学生各阶段接受能力,注重启迪数学思维,适合不同层次的学习需要。竞赛能力训练及解答为高中数学竞赛培训班使用本教材提供了极大的方便。

本套教材可供各级数学奥林匹克学校(培训班)作高中数学竞赛培训教材使用,也可供教练员和教师参考。

编　者

目录

MU LU

第 1 课

平面几何证明（一）

【竞赛知识点拨】

1. 线段或角相等的证明

（1）利用全等三角形或相似多边形；

（2）利用等腰三角形；

（3）利用平行四边形；

（4）利用等量代换；

（5）利用平行线的性质或利用比例关系；

（6）利用圆中的等量关系等.

2. 线段或角的和差倍分的证明

（1）转化为相等问题. 如要证明 $a = b \pm c$，可以先作出线段 $p = b \pm c$，再去证明 $a = p$，即所谓“截长补短”，角的问题仿此进行.

（2）直接用已知的定理. 例如：中位线定理，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；三角形的外角等于不相邻的内角之和，圆周角等于同弧所对圆心角的一半等等.

3. 两线平行与垂直的证明

（1）利用两线平行与垂直的判定定理.

（2）利用平行四边形的性质可证明平行；利用等腰三角形的“三线合一”可证明垂直.

（3）利用比例关系可证明平行；利用勾股定理的逆定理可证明垂直等.

【竞赛例题剖析】

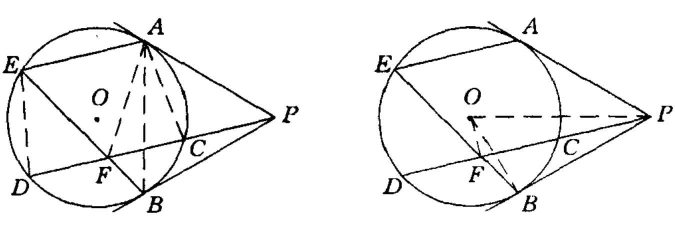
【例 1】 从圆 O 外一点 P 向圆引两条切线 PA、PB 和割线 PCD. 从 A 点作弦 AE 平行于 CD,连结 BE 交 CD 于 F,求证:BE 平分 CD.

【分析 1】 如图 1-1(1),要证 BE 平分 CD,即 $CF=DF$. 可考虑构造出分别以 CF、DF 为边的两个全等三角形. 结合 $AE \parallel CD$ 分别连结 ED、AC、AF. 证明思路如下:

$$CF=DF \Leftarrow \begin{cases} \text{连结 } AC、AF、ED \\ \triangle ACF \cong \triangle EDF \Leftarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} AC=ED \\ \angle ACF=\angle EDF \end{array}\right\} \Leftarrow AE \parallel CD \\ \angle AFC=\angle EFD \Leftarrow \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} \angle EFD=\angle AEF=\angle ABP \\ \angle AFC=\angle ABP \Leftarrow A、F、B、P \text{ 四点共圆} \Leftarrow \end{cases}$$

$$\Leftarrow \angle PAB=\angle PFB \Leftarrow \angle PAB=\angle AEB.$$



(1) (2)

图 1-1

【分析 2】 CD 是圆的弦,要证 $CF=DF$,只需证 $OF \perp DC$,只需证 O、F、B、P 共圆,如图 1-1(2) 所示. 思路如下:

$$CF=DF \Leftarrow \begin{cases} \text{连结 } OF \\ \angle OFP=90^\circ \Leftarrow \begin{cases} \angle OBP=90^\circ \\ O、F、B、P \text{ 四点共圆} \Leftarrow \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftarrow \angle PFB = \angle POB \Leftarrow \begin{cases} AE // CD \Rightarrow \angle PFB = \angle AEB \\ PA、PB \text{ 是切线} \Rightarrow \angle POB = \angle AEB \end{cases}$$

【例2】 $\triangle ABC$ 内接于圆 O，P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上的一点，过 P 作 OA、OB 的垂线，与 AC、BC 分别交于 S、T，与 AB 交于 M、N，求证：$PM = MS$ 的充要条件是 $PN = NT$.

【分析】 要证 $PM = MS$ 的充要条件是 $PN = NT$，只要证 $\frac{PM}{MS} = \frac{NT}{PN}$，只需证 $PM \cdot PN = MS \cdot NT$. 只需证 $PM \cdot PN = x \cdot y$ 且 $x \cdot y = MS \cdot NT$. 结合题设条件连结 PA、PB 考虑证明 $\triangle PBN \backsim PMA$ 以产生 x、y. 证题思路如下：

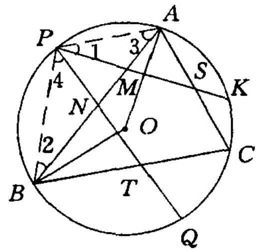


图 1-2

$OA \perp PS \Rightarrow \overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{PA} \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$，如图 1-2 所示，同理有：$\angle 3 = \angle 4$. 于是 $\triangle AMP \backsim \triangle PNB$，$\frac{PM}{BN} = \frac{AM}{PN}$，$PM \cdot PN = MA \cdot BN$.

下面证明 $MS \cdot NT = MA \cdot BN$，只需证 $\triangle BNT \backsim \triangle SMA$. 显然 $\angle BNT = \angle AMS$，又 $\angle BTN = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PB} + \overset{\frown}{QC}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BQ} + \overset{\frown}{QC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \angle MAS$，所以 $\triangle BNT \backsim \triangle SMA$. 故原命题成立.

【例3】 已知 A 为平面上两半径不等的圆 O_1 和 O_2 的一个交点，两外公切线 P_1P_2、Q_1Q_2 分别切两圆于 P_1、P_2、Q_1、Q_2，M_1、M_2 分别为 P_1Q_1、P_2Q_2 的中点，求证：$\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

【证明】 设 B 是两圆的另一交点，连 AB 并延长交 P_1P_2 于 C，则 $CP_1^2 = CA \cdot CB = CP_2^2$，即：$CP_1 = CP_2$. 设 AB 交 M_1M_2 于 M，由 $P_1M_1 // CM // P_2M_2$ 知 M 为 M_1M_2 的中点，即 $M_1M = MM_2$. 又 $AM \perp O_1O_2$，所以 $AM_1 = AM_2$. 在 O_1O_2 上取 $MO_3 = MO_2$，则 $AO_3 = AO_2$，所以 $\triangle O_3AM_1 \cong \triangle O_2AM_2$. $\angle O_3AM_1 = \angle O_2AM_2$.

又因 $O_1P_1 // O_2P_2$，$P_1M_1 // P_2M_2$，所以 $\triangle O_1P_1M_1 \backsim O_2P_2M_2$，

因此，$\frac{O_1M_1}{O_3M_1}=\frac{O_1M_1}{O_2M_2}=\frac{O_1P_1}{O_2P_2}=\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{O_1A}{O_3A}$，由此可知 AM_1 平分 $\angle O_1AO_3$，所以 $\angle O_1AM_1=\angle O_3AM_1=\angle O_2AM_2$.

而 $\angle O_1AO_2=\angle O_1AM_1+\angle M_1AO_2$，$\angle M_1AM_2=\angle O_2AM_2+\angle M_1AO_2$. 所以，$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$.

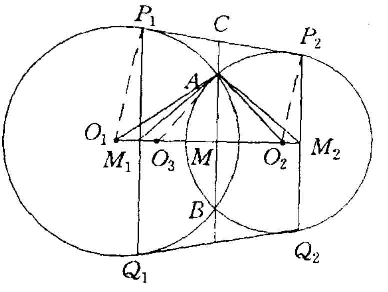


图 1-3

【例 4】 在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，$\angle A$ 的外角平分线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D，$DE\perp AB$ 于 E，求证：$AE=\frac{AB-AC}{2}$.

【分析】 要证 $AE=\frac{AB-AC}{2}$，只需证 $2AE=AB-AC$. 在 EB 上取 $EF=AE$，从而 $AF=2AE$，因此只需证 $AF=AB-AC$，$AB-AF=AC$，只需证 $BF=AC$. 连结 DC，只需证 $\triangle DBF\cong\triangle DCA$.

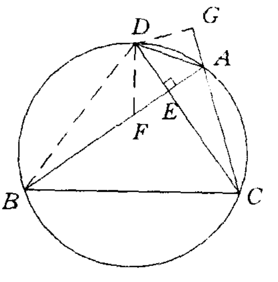


图 1-4

显然 $\angle DBF=\angle DCA$. $\angle DAG+\angle DAC=180°$，$\angle DFA+\angle DFB=180°$，且由 DE 垂直平分 AF 知：$DF=DA$，$\angle DFA=\angle DAF=\angle DAG$，所以 $\angle DFB=\angle DAC$，因此 $\triangle DBF\cong\triangle DAC$ 得证.

【评注】 此题的证法就是将线段的和差倍分转化为相等问题的方法. 这是解决和差倍分问题重要的方法. 此题除了上述转化之外，还可将 $AE=\frac{AB-AC}{2}$ 转化为 $AB-AE=AC+AE$. 从而可在 CA 的延长线上截取 $AG=AE$，证明 $BE=CG$. 从而转化为证 $\triangle DEB\cong\triangle DGC$.

【例5】 $\angle ABC$ 的顶点B在圆外,BA、BC均与圆相交,过BA与圆的交点K引垂直于$\angle ABC$平分线的垂线,交圆于P,交BC于M,试证:线段PM为圆心到$\angle ABC$平分线距离的2倍.

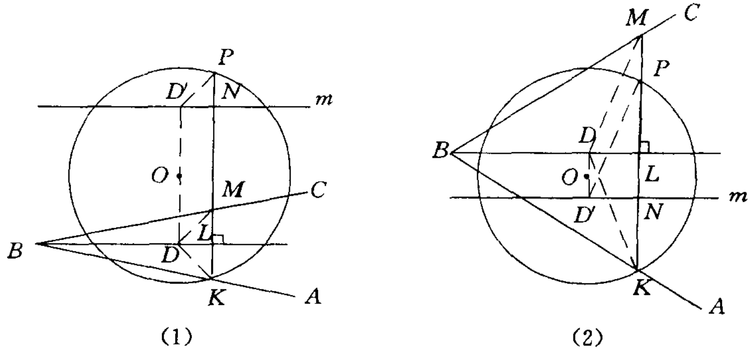


图1-5

【证明】 若$\angle ABC$的平分线过圆心,由对称性知,点M与P重合,$PM=0$,结论显然成立.

若$\angle ABC$的平分线不过圆心,且M在K与P之间,如图1-5(1)所示,设KP交$\angle ABC$平分线于L,则$KL=ML$,过O作OD垂直$\angle ABC$平分线于D. OD即为圆心O到$\angle ABC$平分线的距离. 作BL关于O的对称直线m,设直线m与KP交于N,则$NP=KL=LM$. 延长DO交于m于D',则$DD'=2OD$. 故只需证$PM=DD'$,只需证$DMPD'$为平行四边形. 根据对称性有$\angle DKM=\angle D'PN$,而$\angle DKM=\angle DMK$,所以$\angle DMK=\angle D'PN$,于是$D'P\parallel DM$,又显然$DD'\parallel PM$,因此四边形$DMPD'$为平行四边形成立.

若M在KP的延长线上,如图1-5(2)所示,同样作BL关于O的对称直线m,与M在K、P之间时同样的方法去证$DD'PM$为平行四边形.

【例6】 在$\triangle ABC$中,AP为$\angle A$的平分线,AM是BC边上的中线,过B作$BH\perp AP$于H,AM的延长线交BH于Q,求证:

$PQ /\!/ AB$.

【分析 1】　结合角平分线和中线的性质，显然应考虑用比例证平行.

延长 AM 至 A' 使 $AM = MA'$，连结 BA'，如图 1-6(1).

$$PQ /\!/ AB \Leftarrow \frac{PM}{BM} = \frac{QM}{AM} \Leftarrow \frac{BM+MP}{BM-MP} = \frac{AM+MQ}{AM-MQ} \Leftarrow \frac{BP}{PC} =$$

$$\frac{AQ}{QA'} \Leftarrow \begin{cases} \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{AB}{AC} \text{ 且 } AC = A'B \\ \dfrac{AQ}{QA'} = \dfrac{AB}{A'B} \Leftarrow \angle ABQ = \angle A'BQ. \end{cases}$$

可以证 $\triangle MAC \cong \triangle MA'B$，$\angle CAM = \angle MA'B$，$AC /\!/ A'B$，所以 $\angle CAB + \angle A'BA = 180°$，$\angle CAP + \angle BAP + \angle A'BH = 180°$，而 $\angle BAP + \angle ABH = 90°$. 因此 $\angle CAP + \angle A'BH = 90°$. 又 $\angle BAP = \angle CAP$，所以 $\angle ABH = \angle A'BH$. 即 $\angle ABQ = \angle A'BQ$.

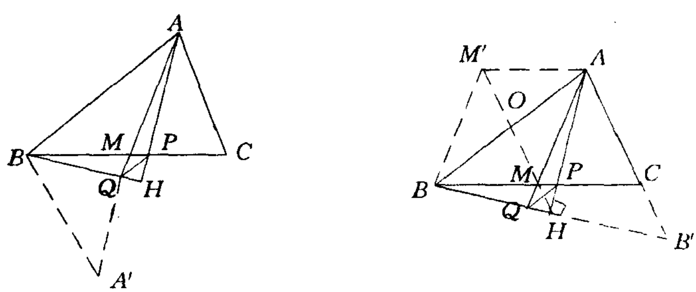


图 1-6

【分析 2】　结合角平分线和 $BH \perp AH$ 的条件联想对称知识解此题.

延长 BH 与 AC 的延长线交于 B' 如图 1-6(2). 由 AP 平分 $\angle BAC$ 及 $BH \perp AH$ 知：$BH = B'H$. 连结 HM，则 $HM /\!/ AB'$，延长 HM 交 AB 于 O，则 O 为 AB 中点，延长 MO 至 M' 使 $MO = M'O$，连结 BM'、AM'，则 $AM'BM$ 是平行四边形，所以 $MP /\!/$