

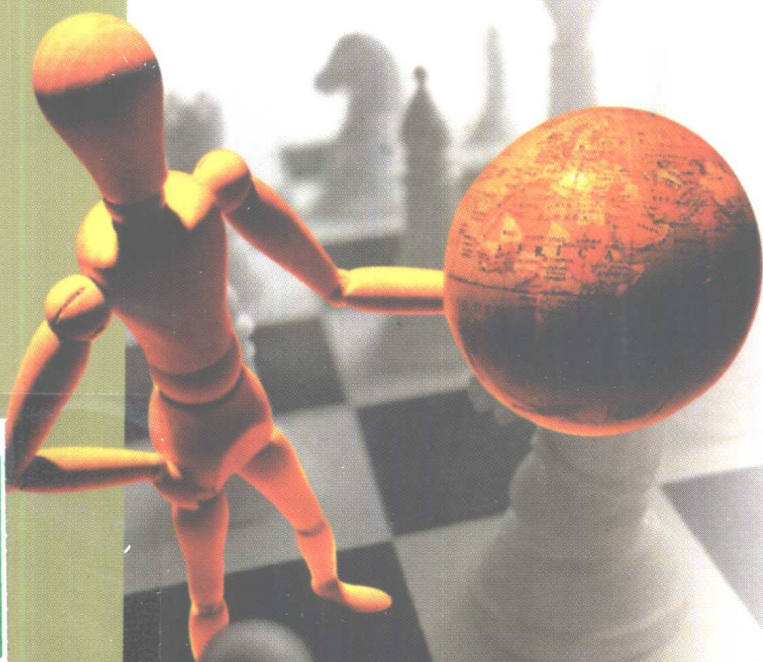
///
TIDIAN

工程数学 题典

(一)

● 贺才兴 编

4



上海交通大学出版社

工程数学题典(一)

线性代数、概率论与数理统计

贺才兴 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本题典(一)精选了 300 余道“线性代数”与“概率统计”的典型题,以基础概念和基本思想方法为核心;突出重点,简明扼要,清晰易懂,层次分明,内容丰富。对于一些较难或难的题目,则在题号前标上“*”或“**”,便于读者选择。

本书分两篇。第一篇为线性代数,从行列式到线性变换和线性空间,共六章。第二篇为概率论与数理统计,从随机事件到数理统计,也是六章。

研读本书,参考一些典型的题目,并独立地思考和演算一些题目,必能有助于提高读者的数学素养。对于各级各类高等院校的学生和学习这两门课程的广大读者来说,本书不失为一本合适的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学题典(一)/贺才兴编. —上海:上海交通大学出版社,2001

ISBN 7-313-02632-3

I. 工… II. 贺… III. 工程数学-习题 IV. TB11-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 02831 号

工程数学题典

(一)

贺才兴 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 张天蔚

立信会计常熟市印刷联营厂印刷 全国新华书店经销

开本: 890mm×1240mm 1/32 印张: 10.25 字数: 294 千字

2001 年 4 月第 1 版 2001 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1~4050

ISBN 7-313-02632-3/TB·056 定价: 17.00 元

版权所有 侵权必究

序 言

《工程数学题典(一)》包含线性代数、概率论与数理统计两部分内容。

“线性代数”与“概率论与数理统计”是两门既有理论上的抽象性和逻辑推理的严密性,又有很强的应用性的数学学科。它是提高数学素养,培养高素质人才的重要的基础课。目前,各级各类高等院校的大部分专业都开设了这两门课程,全国统一命题的硕士研究生入学考试数学试卷包括 MBA 招生考试,都将其纳入必考内容。显然,对于高校的学生来说,学好这两门课程是十分重要的。

要学好这两门课程,必须对其基本概念和基本理论、基本方法有较全面的理解,并能准确而灵活地加以运用。参考一些典型的题目及其解析过程,并独立地思考和演算一些题目,是达到这些目标的有效方法之一。

本题典编入了 300 余道具有典型示范作用的“线性代数”和“概率论与数理统计”的题目,涵盖了这两门学科的基本概念与基本方法。全书突出重点,简明扼要,清晰易懂,层次分明。对于一些较难或难的题目,则在题号前打上“*”或“**”,便于读者辨识。

笔者认为,一本好的题典不能是大量题目的简单堆砌。为适应读者特别是大学生的学习需要,在选题上应进行必要的筛选,同时既要符合科学的理性思维训练,又要具有必要的系统性和严谨性。讲概念注意其背景,讲数学思想有演化过程。合理运用“推导”与“归纳”的方法,通过典型题目,教会读者如何思考和分析,使读者从不同内容的内在联系上体会数学思维和应用的精髓,同时加强分析问题和解决问题的综合能力的培养与训练。

面向 21 世纪,我国的人才培养和大学的数学教育是一个十分重大的研究和实践课题,需要多做开拓和创新。本书的出版也是一种探索

和改革,希望它是一把钥匙,能为广大读者打开方便之门;是一座桥梁,能引导广大读者顺利通向成功之路。

希望广大读者提出宝贵的意见。

编 者

于上海交通大学

2001 年元月

目 录

第一篇 线性代数

第一章	行列式	1
第二章	矩阵	23
第三章	线性方程组	48
第四章	矩阵的特征值与特征向量	81
第五章	二次型	108
第六章	线性空间与线性变换	130

第二篇 概率论与数理统计

第七章	随机事件及其概率	167
第八章	随机变量及其分布	205
第九章	多维随机变量及其分布	228
第十章	随机变量的数字特征	247
第十一章	大数定律和中心极限定理	275
第十二章	数理统计初步	289

第一篇 线性代数

第一章 行列式

1. 计算以下各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性:

(1) 9 8 7 6 5 4 3 2 1;

(2) 2 1 7 9 8 6 3 4 5。

解 (1) $I(9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1) = \frac{9(9-1)}{2} = 36$, 此排列为偶排列;

(2) $I(2\ 1\ 7\ 9\ 8\ 6\ 3\ 4\ 5) = 17$, 此排列为奇排列。

2. 选择 i 和 k , 使 $1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ 6\ k\ 9$ 成偶排列。

解 在排列 $1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ 6\ k\ 9$ 中缺数字 3 和 8, 若令 $i=3, k=8$, 则得排列 $1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9$ 。因为 $I(1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9) = 5$, 此排列为奇排列, 所以对上述排列施行一次对换 $(3, 8)$, 即取 $i=8, k=3$, 便得偶排列 $1\ 2\ 7\ 4\ 8\ 5\ 6\ 3\ 9$ 。

3. 若排列 $j_1\ j_2 \cdots j_{n-1}\ j_n$ 的逆序数是 k , 则排列 $j_n\ j_{n-1} \cdots j_2\ j_1$ 的逆序数是多少?

解 因为由排列 $j_1\ j_2 \cdots j_n$ 变成排列 $j_n\ j_{n-1} \cdots j_2\ j_1$, 共进行了 $1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ 次对换, 且本来 k 个逆序的数对变成了顺序, 所以排列 $j_n\ j_{n-1} \cdots j_2\ j_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2} - k$ 。

4. 试确定 5 阶行列式中项 $a_{23}\ a_{41}\ a_{15}\ a_{32}\ a_{54}$ 所带的符号。

解 1 因为 $I(2\ 4\ 1\ 3\ 5) + J(3\ 1\ 5\ 2\ 4) = 3 + 4 = 7$, 所以该项带负号。

解 2 因为 $a_{23}\ a_{41}\ a_{15}\ a_{32}\ a_{54} = a_{15}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{41}\ a_{54}$, 而 $I(5\ 3\ 2\ 1\ 4) = 7$, 所以该项带负号。

5. 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

解1 将第2行乘以-1加到第1行,第4行乘以-1加到第3行,第1行、第3行分别提取公因子后,再将第1行乘以-1加到第2行,第3行乘以-1加到第4行,得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \\ &= xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2 y^2. \end{aligned}$$

解2

$$\begin{aligned} D &\stackrel{(1)-(2)}{=} \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \\ 4-1 \end{pmatrix}}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+y & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{按(1)展开}}{=} x \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 0 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \\ &= -x^2 \begin{vmatrix} 1+y & 1 \\ 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2 y^2. \end{aligned}$$

解 3

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \\
 &= xy^2 + x \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 0 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \right] \\
 &= xy^2 + x(-y^2 + xy^2) = x^2y^2.
 \end{aligned}$$

解 4 把 D 升为 5 阶行列式, 得

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y} & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2.
 \end{aligned}$$

6. 计算下列行列式:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (2) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}; \\
 (3) \quad & \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

解 (1) 由行列式定义, 该行列式只含一个非零项

$$1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!,$$

且其所带的符号为

$$(-1)^{I[n(n-1)\cdots 2 \cdot 1]} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

故该行列式的值为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$;

(2) 此行列式也只含一个非零项 $n!$, 其所带的符号为

$$(-1)^{I[2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot 1]} = (-1)^{n-1},$$

故该行列式的值为 $(-1)^{n-1} n!$;

(3) 此行列式只含一个非零项 $n!$, 其所带的符号为

$$(-1)^{I[(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot n]} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}},$$

故该行列式的值为 $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$ 。

*7. 计算下列 n 阶行列式:

$$(1) D = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix};$$

$$(2) D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(3) D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix};$$

$$(4) D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

解 (1) 将最后一列分别乘以 $-a_1, -a_2, \cdots, -a_{n-1}$ 后, 依次加到第 $1, 2, \cdots, n-1$ 列上, 得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & \cdots & a_{n-2}-a_{n-1} & 1 \\ 0 & x-a_2 & \cdots & a_{n-2}-a_{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} (x-a_i); \end{aligned}$$

(2) 依次将第 $j-1$ 列加到第 j 列上 ($j=2, 3, \cdots, n$), 得

$$D = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n a_1 a_2 \cdots a_{n-1};$$

(3) 从最后一列开始, 逐次往前一列加, 然后再按第 1 列展开, 得

$$D = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{(n-1)(n+2)}{2} & \cdots & 2n-1 & n \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) \end{vmatrix} \\ = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{n(n+1)}{2};$$

(4) 当 $n=2$ 时,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7,$$

当 $n \geq 3$ 时, 将第 3 行乘以 -1 后加到其余各行上, 得

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$$= 6(n-3)!.$$

*8. 计算下列 n 阶行列式:

$$(1) D = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}; \quad (2) D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix};$$

$$(3) D = \begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix};$$

$$(4) D = \begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & a & \beta & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}, (a \neq 0, \alpha \neq \beta).$$

解 (1) 按第 1 列展开, 得

$$D = x \begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1} y^n, (n \geq 2);$$

(2) 将第 2 列至第 n 列都加到第 1 列上, 然后提取公因式, 得

$$\begin{aligned}
 D &= (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[\substack{(2)-(1) \\ (3)-(1) \\ \cdots \\ (n)-(1)}]{(a+n-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} \\
 &= (a+n-1)(a-1)^{n-1};
 \end{aligned}$$

(3) 因为各行的和相等, 所以将第 2 列至第 n 列都加到第一列上, 然后再提取公因式, 得

$$\begin{aligned}
 D &= \left(\sum_{i=1}^n a_i - b \right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[\substack{(2)-(1) \\ (3)-(1) \\ \cdots \\ (n)-(1)}]{\left(\sum_{i=1}^n a_i - b \right)} \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{n-1} b^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i - b \right);
 \end{aligned}$$

(4) 将第 1 行乘以 $-\frac{\beta}{a}$ 后加到其余各行上, 得

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b - \frac{\lambda\beta}{a} & \alpha - \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b - \frac{\lambda\beta}{a} & 0 & \alpha - \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b - \frac{\lambda\beta}{a} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha - \beta \end{vmatrix},$$

再将第 2 列到第 n 列分别乘以 $-\frac{1}{a-\beta}(b-\frac{\lambda\beta}{a})$ 后都加到第 1 列上, 得

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} \lambda - \frac{(n-1)(ab-\lambda\beta)}{a-\beta} & a & \cdots & a \\ 0 & a-\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-\beta \end{vmatrix} \\
 &= \left[\lambda - \frac{(n-1)(ab-\lambda\beta)}{a-\beta} \right] (a-\beta)^{n-1} \\
 &= (a-\beta)^{n-2} [\lambda a + (n-2)\lambda\beta - (n-1)ab].
 \end{aligned}$$

*9. 计算下列 n 阶行列式:

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & a\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & a\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}, (\alpha \neq 0);$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ -b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & -b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 (1) 按第 1 列展开, 得

$$\begin{aligned}
 D_n &= (\alpha+\beta) \begin{vmatrix} \alpha+\beta & a\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & a\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix} \\
 &\quad - \begin{vmatrix} a\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & a\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= (\alpha + \beta) D_{n-1} - \alpha \beta D_{n-2},$$

于是,有递推关系式

$$D_n = (\alpha + \beta) D_{n-1} - \alpha \beta D_{n-2},$$

即

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}),$$

从而由

$$D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = \beta (D_{n-2} - \alpha D_{n-3})$$

$$\dots\dots\dots$$

$$D_3 - \alpha D_2 = \beta (D_2 - \alpha D_1),$$

得

$$\begin{aligned} D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta^2 (D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) \\ &= \dots = \beta^{n-2} (D_2 - \alpha D_1) \\ &= \beta^{n-2} [(\alpha + \beta)^2 - \alpha \beta - \alpha(\alpha + \beta)] \\ &= \beta^n, \end{aligned}$$

于是

$$\frac{D_n}{\alpha^n} = \frac{D_{n-1}}{\alpha^{n-1}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n,$$

递推得

$$\begin{aligned} \frac{D_n}{\alpha^n} &= \frac{D_{n-2}}{\alpha^{n-2}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \\ &= \dots = \frac{D_1}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 + \dots + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \\ &= 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n. \end{aligned}$$

因此,当 $\alpha \neq \beta$ 时,

$$\begin{aligned} D_n &= \alpha^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\beta}{\alpha}} \\ &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}; \end{aligned}$$

当 $\alpha = \beta$ 时,

$$\begin{aligned} D_n &= a^n(1+1+\cdots+1) \\ &= (n+1)a^n, \end{aligned}$$

综合,得

$$D_n = \begin{cases} \frac{a^{n+1} - \beta^{n+1}}{a - \beta}, & a \neq \beta, \\ (n+1)a^n, & a = \beta; \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ -b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & -b & \cdots & -b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 \\ -b & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & -b & \cdots & a+b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ -2b & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & -b & \cdots & -b \end{vmatrix} + (-1)^{n+n}(a+b) \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ -b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & -b & \cdots & a \end{vmatrix}_{(n-1)} \\ &= -b(a-b)^{n-1} + (a+b)D_{n-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

又

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ -b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & -b & \cdots & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 \\ -b & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & -b & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\ &= b(a+b)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

将式(1)与式(2)联立,可得

$$D_n = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}.$$

“10. 试证: