高等数学习题课30讲

徐兵编著

$y=f(x)$

北京航空航天大学出版社

高等数学习题课30讲

徐　兵　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

高等数学习题课是高等数学教学的一个重要环节。本书为高等数学习题课提供了参考教材。

本书的特点是以讨论式、启发式的教学方式进行编写的。对易于出现误解的基本概念、重要性质，计算方法等，尽量以思考题的形式出现，予以澄清。本书力图以思考题为引线，以典型练习题为导向，来引导、启发学生进一步明确教学基本要求，发现自己学习中的薄弱环节，并及时得以弥补，进而明了概念的实质、归纳出计算方法的规律性。

本书可供工科院校大学生、夜大、电视大学学生学习、参考。

高等数学习题课30讲

GAODENG SHUXUE XITIKE 30 JIANG

徐 兵 编著

责任编辑 郭维烈

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

北京农业工程大学印刷厂印装

•

850×1168 1/32 印张：6.75 字数：178千字

1990年3月第一版 1990年3月第一次印刷

ISBN 7-81012-157-X/O·015

印数：10000册 定价：3.30元

前　言

高等数学习题课是高等数学的一个重要环节。我和我的同事们都深悟此理，并且积多年教学经验，认为成功的习题课应能起到教与学、疏与熟、学与用的桥梁作用。笔者认为在习题课上与其熟记几个概念、性质，不如明了其要素；与其多做几类练习题，不如明了解题思路，进而将解题方法条理化，总结出其规律性。习题课“成功”的标志应是：

能使教师了解到学生掌握本学科知识的程度；

能使学生明了教学基本要求，发现自己学习中的薄弱环节，并且及时得以弥补；

能使学生对概念中的模糊观念得以澄清，明了基本概念的要点；对基本计算方法得以条理化，明了计算方法中应该注意的问题；对课内讲授的基本知识面得以拓宽，学会解决综合性问题的分析方法。

一本好的习题课参考书必然是习题课能得以成功的重要因素之一。

本书力图以讨论式、启发式的教学方式展开，对易于引起误解的基本概念、性质、计算方法等，尽量以思考题的形式出现。以思考题为引线，以典型练习题为导向，以引导、启发学生明了概念的要素，归纳出计算方法的规律性，使学生能步步深入、提高。

笔者对使用本书的学生有两点希望：

一是对课内思考题要先行思考，并揣摩作者的目的；对课内练习题自行给出解题思路，归纳计算中的规律，尔后再参看书中解题要点或解说。这样能使学生加深印象，起到事半功倍的作用。

二是对书中课外练习题应独立解决，对照课内总结的有关解题规律，以起到巩固提高的作用。

本书是北航高等数学教研室组织编写的高等数学教学参考丛书之一。自一九八五年以来，这套丛书已陆续出版了：

《高等数学是非300例分析》，北航出版社，1985年版，本书目的在于引导学生勤于思考，学会提出问题，加深对高等数学中基本概念、基本理论的理解。

《高等数学证明300例分析》，北航出版社，1989年版，本书目的在于帮助学生提高分析与证明的能力。

《高等数学方法》，北航出版社，1989年版，本书目的在于引导学生对高等数学方法条理化，对高等数学各方法间的联系加以探讨，为学生提供高等数学纵向深入的读物。

《高等数学概观》，知识出版社，1989年版，本书目的是为学生提供高等数学各主要概念、理论的产生、发展史况，使学生对高等数学有个历史的、整体性的框架。

《高等数学学习导引》，知识出版社，即将出版，本书目的在于加强学生对基本计算的训练。

另外北航印刷厂于1988年先后出版了«高等数学讲义»,«高等数学习题集»，并作为教学试点教材，现在正总结修改，期待正式出版。

我们期待本书及上述各书能从不同的侧面给读者提供帮助。

本书适用于工科院校大学生，也适用于夜大、电大的学生选作为高等数学习题课的教学参考书。

北京航空航天大学李心灿教授审阅了本书部分书稿，并提出了宝贵意见。王日爽教授、李恒沛副教授，计慕然副教授、郭维烈副编审对本书的写作曾提出了良好的建议，在此一并致谢。

由于作者学识有限，疵误难免，恳请读者指正。

作者于北京航空航天大学

一九八九年七月

目　　录

第1讲 函 数

目的与要求

1. 清晰地理解函数的概念。明确函数定义中的两个要素：依赖关系式、定义域。

2. 熟练地运用函数的符号。掌握分段函数表示方法。

3. 熟练地将复合函数拆成基本初等函数串。

教学方式

以思考题为引线，启发、引导学生明确函数概念的基本要素，以典型练习题为导向，引导学生掌握函数符号的运用规律性。

分析与思考

由于中学代数中已经对函数的概念、性质进行过讨论，对函数的定义域也做了较详细的研究，这里先用思考题引起读者对函数的回顾，然后对以后各章常用到的函数符号的运用及将复合函数拆为基本初等函数串等问题进行讨论，以期引起读者对函数概念的进一步理解。

一、函数的概念

先请读者考虑：

思考题1 （1）$y=x$与$y=\dfrac{x^2}{x}$是否表示同一个函数？为什么？

（2）$y=x$与$y=\sqrt{x^2}$是否表示同一个函数？为什么？

读者不难得知上述两个问题的答案：

题（1）中$y=x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，而$y=\dfrac{x^2}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，即$x\neq 0$，因此$y=x$与$y=\dfrac{x^2}{x}$不表示同一函数。

题(2)中$y=x$与$y=\sqrt{x^2}$的定义域虽然皆为$(-\infty,+\infty)$，但易知后者可表示为分段函数：

$$y=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

它与$y=x$的依赖关系式不同。因此$y=x$与$y=\sqrt{x^2}$也不表示同一个函数。

说明 上述思考题的目的在于强调函数定义中的两个要素：依赖关系式、定义域。对于两个函数，只有当它们的定义域相同，且它们的依赖关系式相同时，才认为它们是同一个函数。

二、函数符号的运用

读者在中学代数中已熟知，$y=f(x)=x^3+2x^2-x+5$，它表示函数y与自变量x间的依赖关系式为

$$f(\quad)=(\quad)^3+2(\quad)^2-(\quad)+5$$

例1 设$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求$f(f(x))$。

解 $$f(f(x))=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$$

有必要提请读者注意，对于分段函数需要特别仔细。为此，请读者考虑：

思考题2 试分析下列运算是否正确？如果你认为错误，请指出其原因何在？

“设
$$f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ x^2, & x<0 \end{cases}$$
试求$f(-x)$。

解 由于$f(x)$的表达式已给定，欲求$f(-x)$，只需将$-x$代换$f(x)$的表达式中x的位置，即
$$f(-x)=\begin{cases} -x, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ (-x)^2=x^2, & x<0 \end{cases}$$”

读者不难发现，上述运算中的问题可以归属于函数符号的运算问题。由所给函数表达式可以看出 $f(x)=x$仅当$x>0$时才成立，因此运算中必须考虑自变量的取值范围。本题正确的运算应为
$$f(-x)=\begin{cases} -x, & -x>0 \\ 1, & -x=0 \\ (-x)^2, & -x<0 \end{cases}$$
即
$$f(-x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$$

例2 设
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x|<1 \\ x^2+1, & |x|\geqslant 1 \end{cases}$$
求$f(f(x))$。

解 由于当$0<|x|<1$时，$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$，故

$$f(f(x))=\sqrt{1-f^2(x)}=\sqrt{1-(1-x^2)}=\sqrt{x^2}=|x|$$

当 $|x|\geqslant 1$ 时，$|f(x)|=|x^2+1|>1$，故此时

$$f(f(x))=f^2(x)+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$

当 $x=0$ 时，$|f(0)|=|\sqrt{1-0^2}|=1$，因此

$$f(f(0))=(f(0))^2+1=2$$

故
$$f(f(x))=\begin{cases}-x, & -1<x<0\\ 2, & x=0\\ x, & 0<x<1\\ x^4+2x^2+2, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

请读者作几个练习题，并总结运算规律：

1. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\ b\neq a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\varphi(x)=3x-1$$

求 $f(\varphi(x))$ 和 $\varphi(f(x))$。

2. 若 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它们的定义域。

3. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

读者可以发现，题1与题3可以归并为两类相反的运算。

对于题1，

$$f(\varphi(x))=f(3x-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant 3x-1\leqslant b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

即 $$f(\varphi(x))=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \dfrac{1+a}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{1+b}{3}\\ 0 & ，其它\end{cases}$$

而 $$\varphi(f(x))=3f(x)-1=\begin{cases}\dfrac{3}{b-a}-1, & a\leqslant x\leqslant b\\ -1 & ，其它\end{cases}$$

对于题 2，只需由 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$ 与 $f(\varphi(x)]=1-x$，解出 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，即 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，可得知 $\varphi(x)$ 的定义域为 $x\leqslant 0$。

对于题 3，可由 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，先导出右方为 $x+\dfrac{1}{x}$ 的表达式，即 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，可得知 $f(x)=x^2-2$。

题 1，题 2 的运算也可以认为是函数的复合运算，必须注意“自变量”、“中间变量”的变化范围。对于题3这类运算的关键是依据给定的关系式求出 $f(\quad)$ 的关于 $(\quad)$ 的表达式，因此，主要是想办法将右端的表达式朝着（　）的形式变化。

三、复合函数

为了给函数微分法打下良好基础，希望读者熟练掌握将初等函数由外到里拆成基本初等函数串的技能。

如 $y=2^{\sin^2 x}$，可拆成 $y=2^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$。

请读者将下列函数由外到里拆成基本初等函娄

4. $y=a^{\sqrt[3]{x^2+1}}$

5. $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$。

练 习 题 1

1. 设$f(x)=\frac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，求$f(x)$的定义域及$f(f(-7))$。

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$$

求$f(f(x))$。

3. 设
$$f(x)=\frac{x+|x|}{2}$$

$$g(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$$

求$f(g(x))$。

4. 是否任意两个函数$f=f(u)$，$u=\varphi(x)$总能复合成复合函数$y=f(\varphi(x))$？如不能，请举例说明。

5. 将下列初等函数由外到里拆成基本初等函数串：

（1）$y=\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2$.

（2）$y=\sec^3(\ln x)$。

第2讲　极限与无穷小量

目 的 与 要 求

1. 理解极限的概念，明瞭变量的极限是描述变量的变化趋势。

2. 了解“ε-N”与“ε-δ”的极限定义的涵意，会用定义解简单问题。

3. 了解无穷小量与无穷大量的涵意与关系。

教 学 方 式

以思考题为引线，启发、引导学生明了极限的概念及无穷小量的概念；明了用定义证明极限的关键是找出极限过程中的“那个时刻”。

分 析 与 思 考

一、极限的概念

为了加深对极限概念的理解，先请读者考虑

思考题1　试讨论下列各种情形中数列$\{u_n\}$是否以A为极限？为什么？如果$\{u_n\}$不一定以A为极限，请举例说明。

（1）当n越大时，u_n-A越小；

（2）当n越大时，$|u_n-A|$越小；

（3）当n越大时，$|u_n-A|$越接近于零；

（4）对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数N，当$n>N$时，

总有无穷多个 u_n 满足 $|u_n-A|<\varepsilon$；

（5）对于任意给定的$\varepsilon>0$，数列$\{u_n\}$中仅有有限多项不满足 $|u_n-A|<\varepsilon$；

（6）对于某给定的$\varepsilon>0$，存在自然数N，当$n>N$时，恒有 $|u_n-A|<\varepsilon$。

对照极限定义，读者不难发现除(5)之外，都不能说 $\{u_n\}$ 以 A为极限，且其反例不难举出。

进而请读者考虑，能否对数列的极限进行如下解说性的定义：

对于数列$\{u_n\}$，若存在数A，当 n 足够大时，$|u_n-A|$ 可以小到任意小的程度（或称之 u_n 与A可以任意接近），则称数列$\{u_n\}$以A为极限。

说明 此题的目的在于引导读者加深对极限定义的理解。

思考题2 试分析下列证明是否正确？如有问题，请指出在何处？

"利用定义证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$。

证 对于任意任给定的$\varepsilon>0$，总存在一个时刻，在这个时刻之后，恒有

$$|2^x-0|=2^x<\varepsilon$$

故$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$。"

仔细分析上述证明过程，即可发现，其问题在于没有指明"那个时刻"，而这正是极限证明中的关键。正确的做法是应该从$2^x<\varepsilon$中分析出"那个时刻"是什么？由于 $\log_2 2^x<\log_2\varepsilon$，可得知

$$x<\log_2\varepsilon$$

由于ε足够小时，$\log_2\varepsilon$为负，因此，"那个时刻"可取为

$$N\geqslant-\log_2\varepsilon=\log_2\frac{1}{\varepsilon}$$

思考题3 试判定下列证明是否正确？如有问题，请指出问题在何处？

"试证$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$。

证 对于任意给定的$\varepsilon>0$，为了使

$$|x^2-4|=|(x-2)(x+2)|=|x-2|\,|x+2|<\varepsilon$$

注意到当$x\to 2$时，必能达到$1<x<3$，即有$|x-2|<1$，因此应有$|x+2|=x+2<5$，且

$$|x^2-4|=|x-2|\,|x+2|<5|x-2|<\varepsilon$$

故只须取$\delta=\frac{\varepsilon}{5}$，则当$0<|x-2|<\delta$时，恒有

$$|x^2-4|<\varepsilon$$

即$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$。"

先考虑下面的事实：由于在极限定义中ε可以取任意正值，若取$\varepsilon=20$，则$\delta=\frac{\varepsilon}{5}=4$，对于$x_0=5$，恒有$|x_0-2|=|5-2|=3<4=\delta$，但是

$$|x_0^2-4|=|25-4|=21>20=\varepsilon$$

得出了矛盾，这说明上述证明有错误。应该注意取$\delta=\frac{\varepsilon}{5}$是在条件$|x-2|<1$下的结果，没有此前提条件，$|x^2-4|<5|x-2|$不一定成立。因此正确的证明应为：

对于任给$\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{5}\right\}$，则当$0<|x-2|<\delta$时，必有

$$|x^2-4|<|x-2|\,|x+2|<5\delta=\varepsilon$$

故$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$。

二、无穷小量

先请读者考虑：

思考题4 试讨论下列命题是否正确？

（1）无穷小量是个非常非常小的数；

（2）$\frac{1}{x}$是无穷小。

对照定义可以得知上述两个命题都是错误的。

说明 本题的目的在于强调：

1. 无穷小量（无穷大量）描述的是变量在某变化过程中的变化趋势。绝不能脱离过程而笼统地说某个函数为无穷小量。

如 $y=\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}$为无穷大量。当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$为无穷小量。当 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{x}$既不是无穷小量，也不是无穷大量。

2. 除 0 之外，无穷小量不是数。同样，无穷大量也不是一个数。

进而请读者考虑：

思考题5 选择填空（你认为有几个正确，则选择几个。将你认为正确的序号填入题内括号内）：

1. $f(x)$在$x=x_0$处有定义，是当$x\to x_0$时，$f(x)$有极限的（　　）。

(a) 必要条件；　　(b) 充分件条；

(c) 充要条件；　　(d) 无关条件。

2. 当$x\to a$时，$f(x)$是（　　），则必有 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)f(x)=0$。

(a) 任意函数；　　(b) 有极限的函数；