高等画法几何学

徐宏文等编著

天津科学技术出版社

高等画法几何学

徐宏文　等编著

天津科学技术出版社

高等画法几何学

徐宏文　等编著

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米　1/16　印张　22.75　字数554,000

1987年7月第1版

1987年7月第1次印刷

印数：1—14,850

书号：15212·205　定价：5.45元

ISBN　7-5308-0088-4/TB·2

内 容 提 要

本书的目的在于用投影方法加深和提高读者的空间思维能力。所研究的空间几何问题有相当的深度和广度，特别是其中的曲线和曲面部分，所用的解题方式强调“既算也画，形数结合”以便深刻分析理解问题。书中有足够的工程实际例题，所有习题均有解答以便读者学习参考。

本书可作为制图教师进修提高的学习材料，攻读图学硕士研究生的教材，一般科技工作者和工科大专院校学生的参考读物。

前　言

解析几何和画法几何都是表示和解决空间几何问题的工具，只是方法不同。然而前者缺少表示问题的直接方法，因而影响思维的深入；后者虽较直观但解题受工具限制，而且答案也没有分析和变化的余地，因此为了更好地解决问题，应该既画也算，取长补短。近年我国理论图学方面的论文有相当部分采用这种方式；国外某些实用问题也在采用这种方法解决。为了算画结合地培养师资，1979年我写成此书稿，1980年受工程图学学会理论图学专业委员会委托，在天津大学举办师资提高班，单科学习此课。1984年受教育部委托再次开班，以此书稿作为必修教材。此外，自1982年以来，本书稿一直是应用几何硕士研究生和研究生班的选修课教材。为了更广泛地满足需要，现将此稿重新修订改编出版。参加本书编写工作的有：赵兰芬、宫嘉成、孙昭文、陈经斗和陈东祥等同志。

徐宏文

1986年

目　　录

第一章 投 影 法

绘画是在（纸）平面上表示空间人与物的形态；同样，科技领域里，也需要在平面上表示器物的形状。如建筑里的透视图；土木、机械等行业里的正投影图和轴测投影图等。这些图的主要目的可以概括成一句话——表示形状。然而器物，特别是在它们的设计阶段，其形状的最后确定是有相当过程的，往往需要修改多次。对于较复杂的器物，这过程不能只凭思维；要靠图的帮助。所以，图不仅是说明形状的工具，同时也是帮助空间思维的工具。

器物的图样包括两个问题：要什么样的形状和怎样表示。前者属于不同的专业；后者是一种专门的几何方法——投影法。现行的主要投影法有中心投影法和平行投影法两种。这是本章将说明的内容。

投影法不仅能说明空间情况（如上述的形状问题），而且能在说明情况的基础上，用几何的或其它数学的方法解决空间的几何问题（例如各种从属关系；公有问题；距离、角度、形状、面积、体积等度量问题）以及分析问题的几何关系，导出方程引出结论，供其它学科使用。

总之，本课程的目的是：培养和发展空间的思维能力，为思考和解决空间几何问题提供投影的工具和方法。

§1-1 中心投影法和平行投影法

（一）中心投影法 日常生活里关于中心投影的实例很多，如物体在灯光下的影子就是中心投影，发光的点光源叫做投影中心。为了确切地说明问题，从点的投影讲起。如图 1-1，设P是某一平面，叫做投影平面；S是不属于P的另外一点称投影中心。P和S叫做中心投影的投影条件。当投影条件给定后，空间的点（用大写字母表示）可在P上得到投影。例如，对于空间A点，连A、S的直线叫投影线。投影线与P的交点a叫做A在P上的中心投影，用相应的小写字母表示。同法，b、c、d分别是B、C、D各点的投影。应该注意：

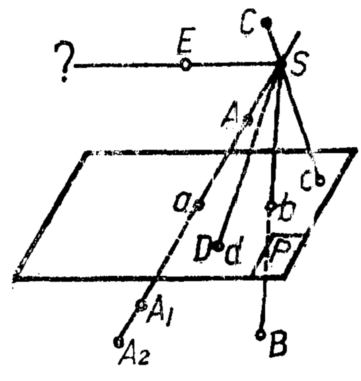


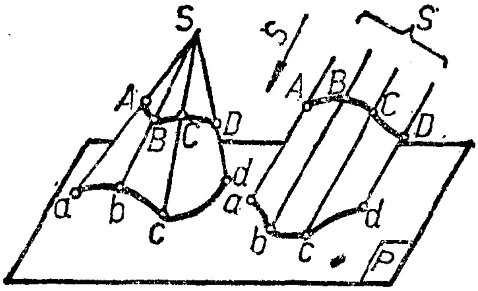
图 1-1

1. A、B、C各种情况都是现实生活存在而且常见的。如S可以作为灯泡，P是地板，A是空间的一点，于是a就是A在P上的影。再如，S可以作为人眼，P是画面，而B是所画物体上的一点，于是b就是该点在画面上的位置。如果S是照相机的镜头，P是底板，C是被摄物体上的一点，则c是C在底板上的象，……。总之，中心投影正是多种实例的抽象概括。

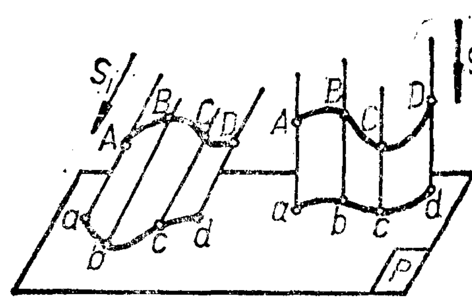
2. 点的位置不同，其投影性质也是多样的。例如P上的D与其投影d重合。SE平行P时，E没有投影。显然，这样的点还不仅一个，在过S且平行P的平面里，任何点都没有投影。

3. 直线与平面相交或平行，相交只能交于一点。所以，当投影条件固定后，点如果有投影只能有唯一的一个。然而，当投影已知时，却不能确定点的空间位置。例如图1-1，Sa中A_1、A_2……各点的投影都是a，由a不能确定点的空间位置。

（二）平行投影法　空间的（曲或直）线可以作为点A、B、C、D……的集合；其投影就是各点投影的集合。对于中心投影，所有投影线都经过一点S，它们形成锥面，所以中心投影法又叫做锥面投影法，如图1-2（a）。如果投影中心沿某指定方向S无限远离P；或者说投影线不是经过一点，而是平行于某指定方向S，则所有投影线形成柱面。这种投影法叫做平行投影法或柱面投影法，如图1－2（b）。平行投影法是中心投影法的特例或极限情况。



（a）　（b）
图 1-2



（a）　（b）
图 1-3

中心投影的投影条件是投影面P和不属于P的一点（投影中心）S；平行投影的投影条件是P和不平行P的投影方向S。显然，物体在日光或其它人造平行光束下的影，正是平行投影的实例。

平行投影要求投影方向S不平行投影面P（否则点就没有投影了）。按S和P的不同关系，平行投影更可分作两类：当S与P一般相交时，叫作斜投影，如图1－3（a）；$S\perp P$时，叫做正投影，如图1－3（b）。

中心投影多用于绘画和建筑；平行投影常用于画各种“立体图”——轴测投影；正投影是绘制工程技术图样的主要工具，也是本课程要讲的主要内容。

应该注意：在投影条件固定后，对于平行投影，空间所有点都有唯一的投影。这一点与中心投影不同。对于中心投影存在没有投影的点。

§1-2　投影规律

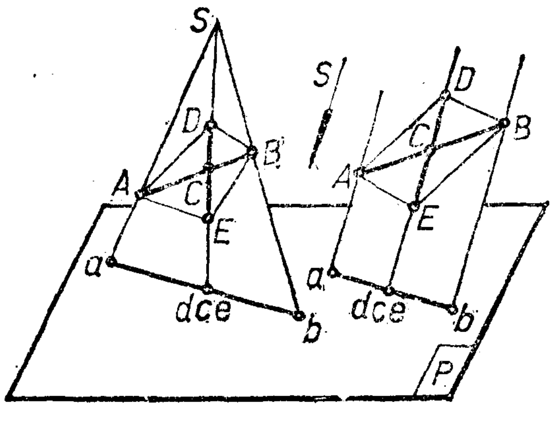
（一）中心投影和平行投影的普遍规律

1. 关于点　投影条件固定后，点如果有投影，只能有唯一的一个。

2. 关于直线　在图1-4（a）里，直线AB可以看作点的集合，各点的投影线形成平面（由AB和点S确定）而两平面交于直线，所以直线（AB）的投影仍为直线（ab），如图1-4（a）。这结论不但适应中心投影；同样也适应平行投影，如图1-4（b）。然而有例外：

（1）当空间的直线DE经过投影中心（S）或平行投影方向（S）时。DE里所有点的投影线都重在一起（直线与平面交于一点）于是直线的投影就成一点（de）了。投影的

这种性质称为积聚性。



(a)　　　　(b)

图 1-4

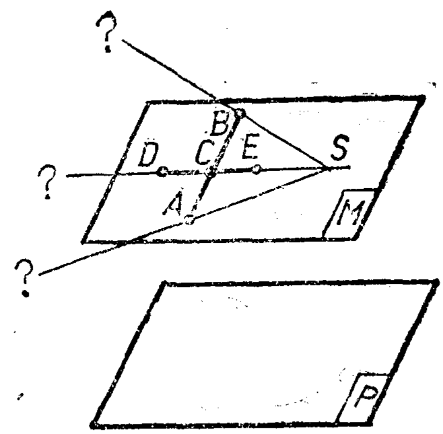
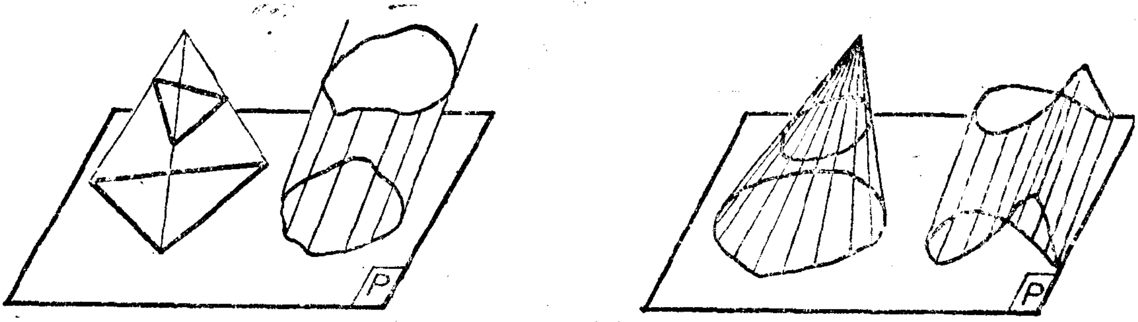


图 1-5

（2）对于中心投影，当直线（AB、DE等）在过S且平行P的平面M里时（图1-5），M与P不相交，所以直线无投影。总之，直线如果有投影，必然也是直线，特殊情况（过S或$/\!/ S$）下，成为一点。

中心投影里，平面M上的一切点、线都无投影(图1-1中的E；图1-5中的AB等）关于这个问题还有进一步研究的必要（详见本章§1-3）。为了叙述和今后使用的方便，这里暂将M去掉。

3.关于点和直线　如图1-4，点C属于AB（或DE），则其投影c也属于ab（或de）。



(a)　　　　(b)

图 1-6

4.关于平面图形　平面图形就是平面上的图形（如多边形、圆、椭圆以及由曲线、直线组成的，在平面上的任何其它图形）。经过平面图形边缘上各点的投影线将形成锥面或柱面。这种锥面或柱面与投影面P的交线就是平面图形的投影。显然，平面在棱锥或棱柱面上只能截得多边形；而在曲锥或曲柱上才可能截得曲线。所以，平面图形的投影一般是与它类似的形状叫做射影形，如图1-6（a）。然而有例外：

（1）当图形所在平面经过投影中心或平行投影方向时，投影积聚成直线，如图1-4中的四边形$ADBE$。

（2）当图形所在平面$/\!/ P$时，投影不仅是本身的射影形而且是相似形，甚至是全等

形，如图1-6（b）。因为对于锥，平行底面的截面与底相似；而对于柱，平行底面的截面与底全等。

总之，平面图形的投影一般为其射影形，特殊情况（所在平面过S或$/\!/ S$）下成为直线。当所在平面$/\!/ P$时，投影与本身相似甚至全等。

关于平面图形投影更为深入的内容，将在以后的有关章节里提到。

（二）平行投影的特殊规律

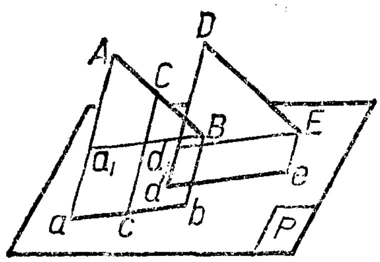


图 1-7

1.若C属于AB，则c属于ab，且$AC:CB=ac:cb$　　（甲）

规律的前半是前面提过的；后半是平行投影独具的，现在证明它：

因为是平行投影，所以$Aa /\!/ Cc /\!/ Bb$。按平面几何关于平行线的切截定理，我们有$AC:CB=ac:cb$，所以结论正确，如图1-7。

此规律在画法几何里是一切从属问题和相交问题的基础。

2.若$AB /\!/ DE$则$ab /\!/ de$，且$AB:DE=ab:de$或$\frac{ab}{AB}=\frac{de}{DE}=k$　　（乙）

证明如下：

因为$AB /\!/ DE$（已知）$Aa /\!/ Dd$（平行投影），所以平面$aAB /\!/ dDE$（两面平行的判定定理）。然而两平行平面被第三平面（P）所截，得到的平行交线正是投影ab和de，所以$ab /\!/ de$。此外，在两个平行平面里分别作Ba_1和Ed_1平行P面，由$\triangle Aa_1B \backsim \triangle Dd_1E$得知$AB:DE=a_1B:d_1E=ab:de$，或$\frac{ab}{AB}=\frac{de}{DE}=$某一定值$k$，这就是第二规律。

这规律在画法几何里是一切平行问题的基础。与规律（甲）一起又是轴测投影的作图基础。

3.线段、角度、平面图形平行于投影面时，投影反映空间的真实情况——实长、真角、实形（丁$_1$）。证明从略。（丁$_1$）和求线段实长的方法（丁$_2$）成为画法几何解决某些度量问题的基础。

以上，（甲）、（乙）、（丁$_1$）和两线垂直（丙）（详见后）四条规律构成画法几何的基础理论组。

§1-3　非固有元素和同素对应

投影，从某种意义上讲，是形成同素对应的途径之一；从另一方面讲又是同素对应的某些实例。为了深入掌握投影性质，为思考和解决空间几何问题奠定基础，这里介绍一些同素对应的初步知识。

图1-8表示相交的两平面P_1和P_2。取不属于P_1和P_2的一点S为投影中心，则P_2里的直线A_2B_2在P_1里有投影A_1B_1；反之，也可把P_2作为投影面，A_2B_2是P_1里A_1B_1的投影。所以，P_1、P_2是平等的，等价的，图中双方都用大写字母。

（一）两直线里点的同素对应　如果甲直线里的所有点都在乙直线里有唯一的一个对应点；而乙直线里的所有点又在甲直线里有唯一的一个对应点，则称两组点（或叫做点列）建立了同素（就是点对点的）对应。图中直线A_1B_1和A_2B_2就是通过中心投影，使：A_1、A_2对应；B_1、B_2对应；C_1、C_2对应；……等等。然而这对应还不完全，有两个缺欠：$SD_2 /\!/ A_1B_1$，所以D_2没有对应点；$SE_1 /\!/ A_2B_2$，所以E_1没有对应点。为弥补缺欠，我们承认两平行直线“相交”于唯一的一点。如：SD_2与A_1B_1交于D_1；SE_1与A_2B_2交于E_2。这种点叫做非固有点以别于其它的普通（固有）点。在每条直线里增补一个非固有点，于是由投影建立起来的

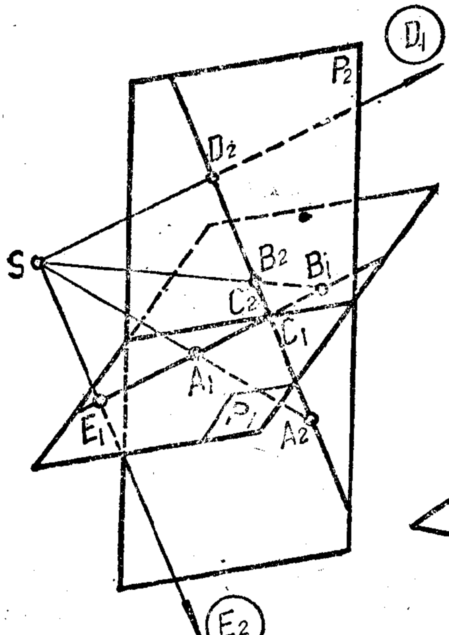


图 1-8

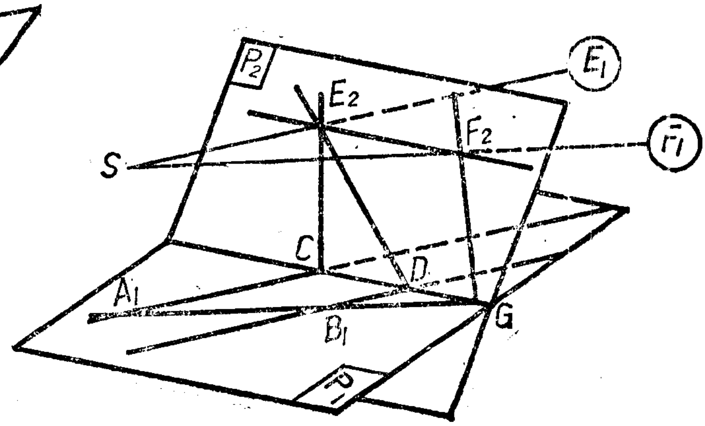


图 1-9

两直线里点的同素对应就完整了

当A_1B_1和A_2B_2两点列脱离投影位置时，同素对应的关系不被破坏。

（二）两平面里点和直线的同素对应　在P_1和P_2中，如果一平面里的每一点都对应另一平面里的一点；一平面里的每一直线都对应另一平面里的一条直线；并且一点属于一直线，其对应点也属于对应直线，则称两平面（或叫做两点线场）间建立了同素（点对点、线对线的）对应。图1-9就是由中心投影建立起来的两场同素对应。

图中$A_1C /\!/ B_1D$，它们“交于”非固有点E_1，E_1对应E_2。由S只能引一条直线$SE_2 /\!/ A_1C$（或B_1D，或P_1里所有与A_1C平行的直线），而SE_2只与P_2交于一点，所以平行的直线组“交于”一个共同的非固有点E_1。在P_1里同一方向的直线有共同的非固有点；不同方向的直线才有不同的非固有点（如A_1B_1中的F_1）；所有非固有点的总合对应P_2里的直线E_2F_2，所以应该把这总合叫做非固有直线，以别于普通（固有的）直线。

也可以说，为了弥补缺欠，使每条直线（如E_2F_2）都有它的对应部分（如E_1F_1），应该承认两平行面“相交”；每一平面都有一条非固有直线；一组平行的平面“交于”一条非固有直线；平面里所有非固有点都在其非固有线内。

当两场脱离投影位置时，同素对应的关系不被破坏。

（三）空间的同素对应　在空间，如果“点与点的对应是唯一的，平面与平面的对应也是唯一的，并且点与平面的从属关系被唯一地保持”则称这样的对应是空间的同素对应。由空间同素对应的以上定义，还可以导出直线与直线的一一对应；直线与平面的和点与直线的从属关系也被唯一地保持等一系列结论。这样，也就不难看出这种对应为什么始终叫作“同素的”。

为了维持平面的同素性质，自然要承认所有非固有元素都在一个共同的非固有平面里。

（四）空间同素对应的对应平面上存在着两平面里（点和直线）的同素对应；对应直线里存在着两直线间（点）的同素对应。这两种对应都可以通过中心投影建立起来，但整个空间的同素对应却不然。因为投影只能落在面上线上而无法“落在”空间。然而同素对应也不能概括投影。例如投影积聚的问题就不是同素的也不是一对一的。

（五）以非固有元素增补空间，将为理解、思考和解决空间几何问题带来许多方便。目前可以初步体会到：

1.中心投影法和平行投影法是统一的。前者以固有点为投影中心；后者以非固有点为投影中心。

2.投影规律也是统一的，可以总结为：

（1）投影条件固定后，点有唯一的投影——（固有或非固有）点；直线也有唯一的投影——（固有或非固有）直线；点和直线的从属关系不变。

（2）直线或平面当它包括（通过）投影中心时，积聚。积聚就是少掉一维，使直线变成点；平面变成直线。

（3）关于平面图形问题，以后专章研究。

3.柱被锥统一起来，即以固有点为顶的是锥；以非固有点为顶的是柱。于是以后的若干有关问题都可统一考虑，如当顶点重于投影中心时，锥或柱的投影有积聚性。锥的截断、贯穿、相贯、轴测、展开等问题的解法都可通用于柱。

第二章　点

§2-1　点的坐标和投影（一）

本章着重用正投影的方法研究点的空间位置。

如上章指出：点在投影面上有唯一的投影，但由单一投影却不能确定点的空间位置。为此，需使用更多的投影面组成投影系统。

（一）投影系统是由三个互相垂直的投影面组成的，如图2-1所示。

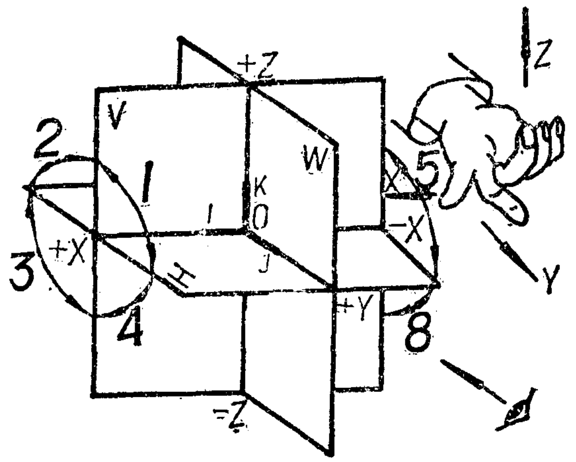


图 2-1

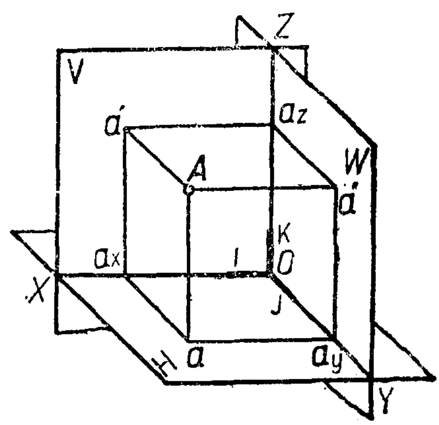


图 2-2

观察者（图中只画了一只眼）面对的投影面为铅直投影面V，或叫做正面（简称V）；水平投影面H，叫做横面（简称H）；另一个前后放置的铅直投影面W，叫做侧立投影面（简称W）。V、H、W三投影面都是无限大的（图中只分别画出方形的一部分），它们互相垂直。为了不至引起误会（除有关投影改造的一些问题外）观察者与各投影面的相对位置永远固定。按本学科的传统习惯来规定三度方法：观察者的上、下、左、右也叫空间的上、下、左、右，只是观察者的前和后分别叫做空间的后和前。

三个无限大的投影面将整个空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦角。如：V前H上和W左的叫第一卦角；V后H上和W左的叫第二卦角；……，如图2-1所示。有时为方便也把一、五卦角合称第一象角（或象限、分角）；把二、六卦角合称为第二象角；三、七合称第三象角；四、八合称第四象角。

（二）三投影面交于三条互相垂直的直线，叫做坐标轴。其中：V和H的交线叫X轴；H和W的交线叫Y轴；W和V的交线叫Z轴。三轴交于O点，叫做原点。为分清方向，规定X轴的左半为正；右半为负。Y轴的前半为正；后半为负。Z轴的上半为正；下半为负。

可以看到，坐标系中各轴的正方按X、Y、Z的次序正是人右手拇、食、中三指的次序，所以这种坐标系叫作右手坐标系，是现代数学和其它科学领域里常用的。

（三）在图2-2里，过A引直（投影）线平行Z轴（即垂直H）交H于a，a是A在H上的正投影。同法，过A引直线平行Y轴交V于a'，a'是A在V上的正投影。再过A引直线平行X轴交W于a''，a''是A在W上的正投影。

按照习惯规定：空间点用大写字母，例如A、B、C等表示；点投影用小写字母，如a、b、c等表示。H投影不加撇；V投影加一撇；W投影加两撇。

现在如果去掉A，显然由三投影中的任意两个仍可定出空间A点的位置。例如由a可知，它可能是一点的投影，但也可能是一条垂直H的直线投影，然而无论如何它只能在过a垂直H的直线（投影线）里存在。同理，由a'可知，空间的点和直线也只能在过a'垂直V的直线里存在。所以，由两投影线的相交不仅可肯定a和a'是一点A的两个投影，而且可确定该点的空间位置。

（四）相交两直线确定一平面。$Aa\perp H$，$Aa'\perp V$，所以它们所确定的平面应该垂直H和V的交线OX，设a_x为其垂足。a_xa'和a_xa分别是平面$Aa'a_xa$与V和H的交线，所以它们分别在V和H里垂直OX。同理，$a''a_y$和aa_y分别在W和H里垂直OY；$a''a_z$和$a'a_z$分别在W和V里垂直OZ。

总之，$Aa'\ a_za''\ aa_x\ Oa_y$是一个对面平行邻面垂直的长方体（矩形六面体）。其中X方向的四条棱Aa''、aa_y、a_xO和$a'a_z$等于点到W的距离；Y方向的四条棱Aa'、aa_x、a_yO、和$a''a_z$等于点到V的距离；Z方向的四条棱Aa、$a'a_x$、a_zO和$a''a_y$等于点到H的距离。显然，三个距离再加上、下、前、后、左、右六个不同方向的补充说明同样也能确定点的空间位置。

（五）为说明点的空间位置也可利用坐标。如图2-2，在各坐标轴的正方分别选定单位测尺（矢）OI、OJ、和OK。坐标就是以下的各组长度比值（数）：

$$x=\frac{Oa_x}{OI};\qquad y=\frac{Oa_y}{OJ};\qquad z=\frac{Oa_z}{OK}$$

应注意：

1.当Oa_x与OI同向时x为正；反向时为负。对y和z也是如此。这样，一组带符号的数——坐标，也完全能确定点的空间位置。

2.一般说来，对单位测尺OI、OJ、OK并不要求等长；但为简便，今后如不特别加以说明就是$OI=OJ=OK=1$毫米。

（六）综合上述，点的投影、距离和坐标之间有以下关系。

H　　　　V　W　　　　　　y、x

1.点的V投影表示该点至W和H面的两个距离，也表示该点的x、z两个坐标。

W　　　　H　V　　　　　　z、y

2.每一个投影代表两个距离（或坐标）而每两个投影代表三个距离（或坐标）。所以，已知点的两个投影或是三个坐标或是三个距离都能确定点的空间位置。

§2-2　点的三面正投影图

（一）确定点在空间位置的三面正投影法是有效的，但不方便。为便于使用，应按规定的方法将H、V、W三面摊开展平。本节说明展开规定和在这种展开方法下的若干投影规律。

1.V面正对观察者，视线与投影方向一致，由投影认识空间情况也较直接。因此，规定V面不动，其它两面要与V面重合。

2.规定H以X为轴，前半向下，后半向上旋转重于V面，如图2-3（a）、（b）。

从以上规定可以得到：

（1）X是旋转轴，展开时不动，所以在展开的投影图中，水平线O点的左方是$+X$；右方是$-X$。按习惯“$+X$”只标“X”其反方向就是$-X$可以不标，如图2-3（b）。

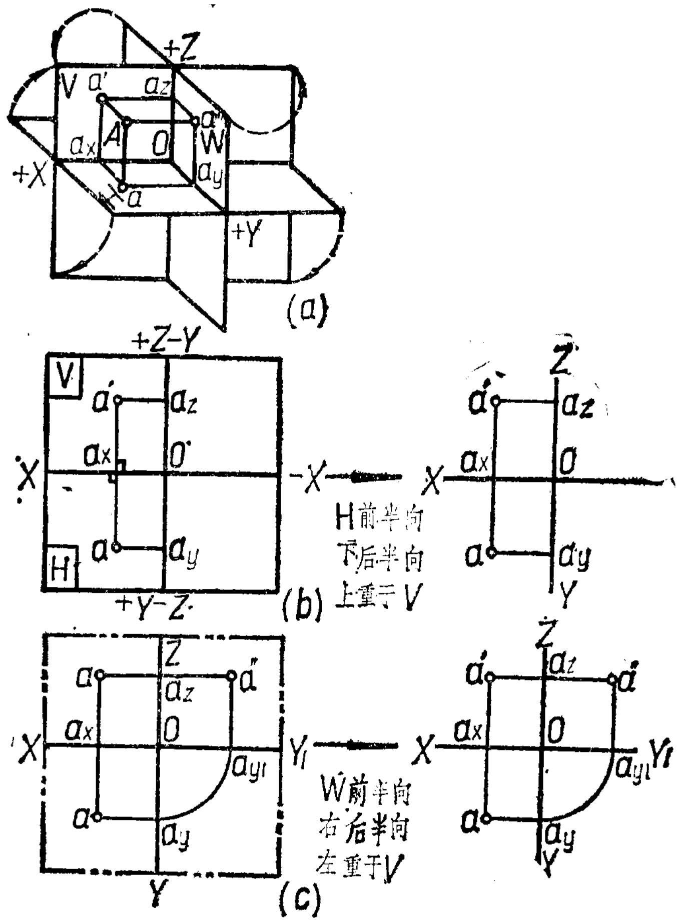


图 2-3

V面不动，所以展开图中铅直线的上半部是Z的正方；下半部是负方（不标）。然而，H向下重于V面，所以铅直线的下半部同时又是Y的正方；上半部是负方（不标），如图2-3（b）。

（2）如图2-3（a）所示。展开前，a_xa'在V内垂直X轴；a_xa在H内垂直X轴；a_x在轴上展开时不动。所以在展开图中，a'和a的连线垂直X轴。

3.规定W以Z为轴，前半向右，后半向左旋转重于V面，如图2-3（c）。从此规定可以得到：

（1）W里的Z是旋转轴，展开时不动，所以在展开图中，铅直线的上半是Z的正方，下半是负方（不标）。W的前半右转，所以展开图水平线的右半是W里Y的正方，如图2-3