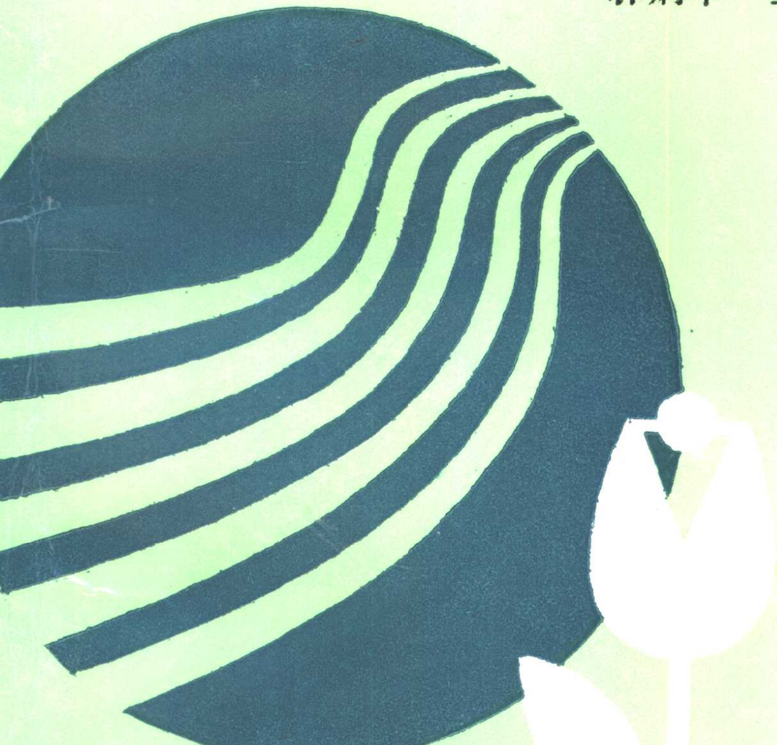
初中数学解题方法指导

林炳华 主编



气象出版社

初中数学解题方法指导

林炳华主编

气象出版社

（京）新登字046号

内 容 简 介

本书共七章：内容为实数与代数式，方程和方程组，解不等式，函数及其图象，解三角形，直线形和圆；每一专题分为《内容概要》，《范例分析》，《练习题》和《提示或答案》四部分。

本书范例的编写，突出了解题方法，在探讨解题方法的基础上，注意积累解题的各种方法和解题经验，认真总结解题技巧和解题规律。力求通过每一个范例分析，活跃思维，开阔视野，加深对现行课本所学知识的认识，提高双基训练的技能，从而达到培养能力、发展智力的目的。

本书适合于初一、初二和初三级的师生使用，它也是知识青年巩固提高数学知识的参考书。

初中数学解题方法指导

林炳华　主编

责任编辑：刘宏勋　终审：毛耀顺

封面设计：严瑜仲　责任技编：岳景增　责任校对：白凌燕

气 象 出 版 社 出 版

（北京西郊白石桥路46号　邮编100081）

北京市顺义燕华印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行　全国各地新华书店经销

1995年1月第一版　1995年1月第一次印刷

开本：787×1092 1/32　印张：9.25　字数：202千字

印数：1—18200　定价：5.90元

ISBN 7-5029-1749-7/G·0480

前　　言

本书紧密配合初中新教材数学课本，并与初中各年级数学课本同步进行编写。注意解题方法和解题思路的研究，进一步加强了双基训练，加深了对基础知识的理解，培养了分析问题的能力，开拓解题思路，寻找解题规律，掌握解题方法。

每一章节的内容主要包括内容概要、范例分析，达标训练和答案或提示。本书内容源于课本，高于课本，基础性强、灵活多变、深浅适度、题型多样和覆盖面广等优点。

本书的主要特点是抓纲扣本、纲本结合；从初中数学教学实际出发，既有利于学生掌握数学知识，发展解题能力，提高学习成绩，也有利于初中数学教师剖析教材、精心备课，提高教学水平。但愿此书的出版，对初中各单级师生有所帮助和提高。

由于经验不足，问题在所难免，恳请使用本书的师生提出宝贵意见和建议。

编著者

1994年6月于福州

目　录

第一章　实数与代数式

§1　实　　数

（一）内容概要

实数运算为中心，运算顺序要认真，
数的概念是基础，内含外延要分清，
数轴能使直观化，形数结合更清新，
一般问题特殊化，具体问题普遍化，
解题方法灵活用，慎思细算莫轻心。

（二）范例分析

例一　选择题（A、B、C、D四个答案中，仅有一个是正确的）：

（1）要使代数式$\left(\frac{x+3}{2}\right)^2$为整数，只需$x$为（　　）。

A. 奇数，B. 偶数，C. 不等于3的倍数，D. 3的倍数，

解：用排除法。令$x=2$代入，得原式$=\frac{25}{4}$不是整数，可排除B、C，再令$x=6$代入，得原式$=\frac{81}{4}$也不是整数，可排除D，故选A。

本题尚可用直接法解之。由奇偶性可知x若取奇数，则$x+3$为偶数，而偶数的平方必为4的倍数。故选A。

（2）当a、b是不相等的正数时，下列三个代数式：甲.

$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$，乙. $\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2$，丙. $\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)^2$中最大的一个是（　　）。

A. 必为甲，*B*. 必为乙，*C*. 必为丙，*D*. 与*a*、*b*的取值有关。

解：这道题宜用特殊值法。但因本题的四个选择之中有一项为“与*a*、*b*的取值有关”，故在用特殊值检验时，要多取几组进行检验。若取$a=1$，$b=2$，则甲＝5，乙＝$4\frac{1}{2}$，丙＝$4\frac{25}{36}$，故甲为最大；再取$a=3$，$b=2$，则甲＝$8\frac{1}{3}$，乙＝$8\frac{1}{6}$，丙＝8.41，则丙为最大，故选 *D*。

例二　比较下列各组数的大小：

(1) $\frac{4}{5}$和$\frac{5}{7}$，(2) $-\frac{12}{25}$和$-\frac{3}{5}$，(3) $2\sqrt{5}$和 $\sqrt[3]{88}$，(4) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$和$\sqrt{7}-\sqrt{6}$，(5) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$和$\frac{1}{\sqrt{6}-2}$，(6)$\sqrt{3}+2$ 和 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$，(7) 987654×123456和987653×123457

解：(1) $\because$ $4\times7>5\times5$，$\therefore\frac{4}{5}>\frac{5}{7}$。

说明：这实际上根据分数比较大小的法则只不过省去了分母，而仅通过比较其通分后的分子的大小。

(2) $\because$ $-\frac{12}{25}>-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}>-\frac{3}{5}$，

$\therefore$ $-\frac{12}{25}>-\frac{3}{5}$.

说明：对于所要比较的两个数，如果明显地存在一个数介于它们之间，可用参数法，利用不等式的传递性来比较。

(3) $\because$ $\sqrt[3]{88}=2\sqrt[3]{11}$，又 $\because$ $\sqrt[3]{11}=\sqrt[6]{121}$，$\sqrt{5}=\sqrt[6]{125}$，而$125>121$，$\therefore$ $2\sqrt{5}>\sqrt[3]{88}$

说明：对于含根号的无理数的大小比较，一般可把根号外的因式移到根号内，再化成同次根式，通过比较被开方数的大小而比较之。但有时可根据题目的特点，把它们同时扩大或缩小相同的倍数，则方便得多。

(4) $\because$ $\sqrt{6}-\sqrt{5}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$，$\sqrt{7}-\sqrt{6}=$

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}},$$

又 $\because$ $\sqrt{6}+\sqrt{5}<\sqrt{7}+\sqrt{6}$，$\therefore\sqrt{6}-\sqrt{5}>\sqrt{7}-\sqrt{6}$

说明：对于形如$\sqrt{a}-\sqrt{b}$和$\sqrt{c}-\sqrt{d}$的两个无理数的大小比较，若具备$a-b=c-d$的，可将它们分子有理化，化为同分子的两个无理数来比较，是行之有效且简便得多的方法。

(5) $\because$ $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$，

$\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}=\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$，

又 $\because$ $\sqrt{7}+\sqrt{5}>\sqrt{6}+\sqrt{4}$， $\therefore\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}>\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}$

说明：通分本来是比较两个数的大小的一般方法，特别是利用分母有理化又可达到通分的目的时，其优点是显然

的.

(6) $\because (\sqrt{3}+2)^2-(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2=7-8=-1<0$,

$\therefore (\sqrt{3}+2)^2<(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$，又$\sqrt{3}+2>0$,

$\sqrt{6}+\sqrt{2}>0$,

$\therefore \sqrt{3}+2<\sqrt{6}+\sqrt{2}$

说明：求差法是比较大小的一种重要的方法，特别是直接比较它们的大小有困难时，其作用更明显。对于两个同号的数，通过比较它们的平方数的大小来比较也是行之有效的。读者还可自行比较$3+\sqrt{2}$和$\sqrt{6}+\sqrt{5}$的大小。

(7) 令$987654=a$，$123456=b$，显然$b+1-a<0$。则原题中的两个积依次为：ab与$(a-1)(b+1)$,

$\because \quad ab-(a-1)(b+1)=ab-ab-a+b+1<0$

$\therefore \quad ab<(a-1)(b+1)$

即：$987654\times123456<987653\times123457$

说明：本题中因数字较大，若通过计算比较，其难度较大，若进一步研究其特点，可将具体问题普遍化解之较为方便。

若提高一步，本题还有更简捷的解法：

$\because \quad 987654+123456=987653+123457$

又$\because \quad 987654>987653>123457>123456$

$\therefore \quad 987654\times123456<987653\times123457$

其理论根据：由和为定值，当两个数相等时，其积为最大值，得猜想：和为定值的两个数相乘时，越接近平均数的两个数的积越大．具体证明可借助：当$b>c>0$时，证明$(a+b)(a-b)<(a+c)(a-c)$，请读者自行证明。

总之数的比较大小问题，若能根据题目的具体特点，灵活运用所学知识，采用特殊的方法来处理，往往可收到事半

为倍的效果.

例三 计算下列各题：

(1) $\left\{-1\times\left[(-0.4)^2-(-3.1+2.6)\times\frac{4}{5}\right]\right\}\div0.2^3$

解：原式$=\left\{-[0.16-(-0.5)\times\frac{4}{5}]\right\}\div0.08$

$=\left\{-(0.16+0.4)\right\}\div0.08$

$=-0.56\div0.08=-7$

(2) $[(-8)^{-\frac{2}{3}}-3^{-2}-6^{-1}\times(-1)^3]\div\frac{1}{6}\times6$

解：原式$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\right)\times6\times6$

$=9-4+6=11$

(3) $9\frac{8}{17}\times\frac{\sqrt[6]{(-2)^6}}{23}+\frac{\sqrt[3]{(-2)^3}}{17}\times\frac{-3^2}{23}$

解：原式$=9\frac{8}{17}\times\frac{2}{23}+\frac{-2}{17}\times\frac{-9}{23}$

$=9\frac{8}{17}\times\frac{2}{23}+\frac{9}{17}\times\frac{2}{23}=\left(9\frac{8}{17}+\frac{9}{17}\right)\times\frac{2}{23}$

$=10\times\frac{2}{23}=\frac{20}{23}$

(4) $2\left|\frac{1}{15}-\frac{1}{13}\right|+\left(\frac{17}{1994}-\frac{17}{1995}\right)\times$

$\frac{\frac{1}{15}-\frac{1}{13}}{\left|\frac{1}{1995}-\frac{1}{1994}\right|}$

解： 原式$=2\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)+17\left(\frac{1}{1994}-\frac{1}{1995}\right)$

$$\times\frac{\frac{1}{15}-\frac{1}{13}}{\frac{1}{1994}-\frac{1}{1995}}$$

$$=\frac{2}{13}-\frac{2}{15}+\frac{17}{15}-\frac{17}{13}=-\frac{15}{13}+1=-\frac{2}{13}$$

(5) $\dfrac{5+\frac{8}{7}+3.375\div\left(-\frac{3}{4}\right)^3}{(-1)^{1994}-\dfrac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}}$

解： 原式$=\dfrac{5+\frac{8}{7}+\frac{27}{8}\div\left(-\frac{27}{64}\right)}{1-\frac{12}{7}}$

$$=\frac{6\frac{1}{7}-\frac{27}{8}\times\frac{64}{27}}{-\frac{5}{7}}=\frac{6\frac{1}{7}-8}{-\frac{5}{7}}$$

$$=\frac{-\frac{13}{7}}{-\frac{5}{7}}=\frac{13}{5}$$

说明： 透彻理解实数的有关概念和各类运算的定义、法则及其运算定律和基本性质，并根据题目的特点灵活地正用或逆用之是迅速正确地进行实数运算的关键。

①要分清运算顺序，如有括号时，依小、中、大括号之序进行（如第1题）；无括号或在同一括号内，依先乘方、开

方，次乘除，后加减之序进行，尤其注意遇乘除混合运算时，按除变乘法则统一成乘法后，才能进行约分（如第2题）。

②要理解乘方、开方、负指数、分指数的意义；注意判断乘方的指数是写在括号内还是外，认清其底数；注意负数的奇偶次幂的符号(如：$(-0.4)^2=0.16$，$(-8)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$，$-3^{-2}=-\frac{1}{9}$，$(-1)^{1994}=1$，$\frac{2^3}{7}=\frac{8}{7}$，$-3^2=-9$，$\left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{27}{64}$等等）。

③要注意，当n为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；当n为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0)\\-a(a<0)\end{cases}$。如：$\sqrt[6]{(-2)^6}=2$；$\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$。

④要根据题目的特点运用乘法对加法的分配律（如第2题），或不用之（如第1题）；还要注意创造条件逆用乘法对加法的分配律$\left(\text{如第3题中}\frac{2}{17}\times\frac{9}{23}=\frac{9}{17}\times\frac{2}{23}\right)$，以达到简化运算之目的。

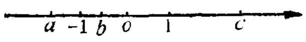
⑤对于分数和小数的混合运算，要注意根题据目的特点统一成一种形式，平时还要熟记特殊的分数加减的结果与特殊的小数与分数的互化$\left(\text{如}\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}，\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}，0.125=\frac{1}{8}，0.375=\frac{3}{8}\text{等等}\right)$。

⑥对于含层层分数线的题目，要注意判断分数线的长短及含意。要注意分数（式）基本性质的正确应用（如第5题

中$\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{12}{7}$）。

⑦当遇到不便于计算的分数运算时，若在其后的式子中含有与之相同的分母时，认真分析一下能否利用有关的定义、法则、性质的正逆用进行简便运算（如第4题）。

例四 已知实数a、b、c如数轴所示



，解答下列各题：

（1）比较大小填空：a__$-b$，a__$-c$，$\frac{1}{b}$__b，$\frac{1}{c}$__c，$b+c$__0，$c-a$__0，$a+b$__0，$b-c$__0

（2）化简$|a+b|-|b-c|+|c-a|$

思路与方法的分析：

解答本题要掌握绝对值、相反数、倒数的几何意义，数轴上的点代表的数的大小比较法则，并依下列步骤进行分析思考。

①由数轴的直观性，经观察可知：$a<-1<b<0<1<c$，$|b|<1<|a|<|c|$。

②根据相反数的几何意义在数轴上画出$-b$，$-c$的位置，得$a<-b$，$a>-c$。

③由实数加法法则和减法法则可知$b+c>0$，$c-a>0$，$a+b<0$，$b-c<0$。

④由倒数的意义可知：数轴上一个点所代表的数的倒数的大概位置是不过原点，在1或-1的另一侧；在1或-1同侧的同号的两数的倒数，越靠近1或-1的点，其倒数在另一侧也越靠近1或-1。以上关于倒数在数轴上的二条性质，为我

们直观地比较一个数与其倒数的大小提供了方便，本题只需在数轴上标出$\frac{1}{b}$和$\frac{1}{c}$的大概位置，就可知$\frac{1}{b}<b$，$\frac{1}{c}<c$。

⑤根据一个正数的绝对值就是它本身，一个负数的绝对值就是它的相反数，零的绝对值就是它的本身或它的相反数；所以要脱掉绝对值符号，首先要对绝对值符号里的数的性质进行判断。被减数与减数对调其差互为相反数，以及以上的分析就可准确地对第2题进行化简。

解： (1) $a<-b$，$a>-c$，$\frac{1}{b}<b$，$\frac{1}{c}<c$，$b+c>0$，$c-a>0$，$a+b<0$，$b-c<0$。

(2) 原式$=-(a+b)-(c-b)+(c-a)$

$$=-a-b-c+b+c-a=-2a$$

例五 已知a、b为实数

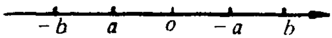
(1) 若$a+b>0$，$a<0$，试比较a，b，$-a$，$-b$的大小。

(2) 若$ab<0$，$a=b^2+1$，试比较：①a，b，$-a$，$-b$的大小；②a，$-a$，$\frac{1}{a}$、$-\frac{1}{a}$的大小。

解： (1) $\because a+b>0$，$a<0$

$\therefore$ $b>0$，且$|b|>|a|$

$\therefore$ a、$-a$、b、$-b$在数轴上的大概位置如图所示：

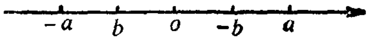


$\therefore$ $-b<a<-a<b$

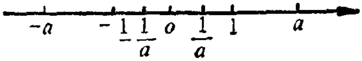
(2) $\because$ $ab<0$，$\therefore$ $b\neq 0$，$b^2>0$

又$\because$ $a=b^2+1$，$\therefore$ $a>1$，$b<0$

$\therefore$ a、b、$-a$、$-b$在数轴上的大概位置如图所

示 

$\therefore\ a、-a、\dfrac{1}{a}、-\dfrac{1}{a}$在数轴上的大概位置如图

所示 

$\therefore$ ①$-a<b<-b<a$

②$-a<-\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{a}<a$

例六 已知实数a、b、c、d均为正数，且$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，求证：$a=b=c=d$。

分析：由结论可知存在$a-b=0$，$b-c=0$，$c-d=0$。由条件$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$启发我们如果上式左边能化为含$(a^2-b^2)^2$、$(b^2-c^2)^2$、$(c^2-d^2)^2$相加为零的形式，那么就可利用非负数之和为零，则各个非负数均为零，来解决问题，所以采用配方法。必须指出：非负数的这个性质是方程“母”生方程“子”的根据。

证明：$\because\ a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$

$\therefore\ a^4-2a^2b^2+b^4+c^4-2c^2d^2+d^4+2a^2b^2-4abcd+2c^2d^2=0$

$\therefore\ (a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$

$\therefore\ a^2=b^2$，$c^2=d^2$，$ab=cd$

$\because\ a$、b、c、d均为正数

$\therefore\ a=b$，$c=d$

又$ab=cd$，$\therefore a=b=c=d$

例七 已知a、b、c、d为整数，且$abcd=25$，$a<b<c<d$，求a、b、c、d的值。

分析：由已知a、b、c、d为整数且其积为25，可知a、b、c、d应为25的约数，启发我们对25的所有约数进行排队，再由$a<b<c<d$来求解。

解：$\because$ a、b、c、d为整数，且$abcd=25$

$\therefore$ a、b、c、d均为25的约数，

又25的约数共有：±1，±5，±25，

且$-25<-5<-1<1<5<25$，

而$a<b<c<d$，$abcd=25$，

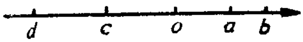
$\therefore$ $a=-5$，$b=-1$，$c=1$，$d=5$。

（本题审题时还需注意$abcd$与$\overline{abcd}$的区别，前者表示四个字母的积；后者则表示一个四位数，其千、百、十、个位数字分别为a、b、c、d）。

（三）练习题

1. 选择题（A、B、C、D四个答案中仅有一个是正确的）：

（1）若实数a、b、c、d如数轴所示



，

则$|a-b|+|a-c|+|d-c|-|d-b|=$（　　）。

A. $2a-2d$，B. $2b-2d$，C. 0，D. $2c-2a$。

（2）不论a取什么实数时，下列结论正确的是（　　）。

A. $(a+1)^2$的值是正数，B. a^2+1的值是正数，

C. $-(a+1)^2$的值是负数，D. $-a^2+1$的值总比1小。

（3）计算$-2\times3^2-2^2\times3-(-2\times3^2)-(-6^2+5\times6)$的值为（　　）。