数学释疑解难系列丛书

高等数学

释疑解难

刘 群 衡 勤 王学理 主编

大学生同步辅导佳作

考研者强化训练精品

例题经典——为大学生释疑

习题精萃——为考研者解难

4

NEUPRESS
东北大学出版社

高等数学释疑解难

主　编　刘　群　衡　勤　王学理

副主编　杨雅琴　刘　满　马　毅　金广伟

东 北 大 学 出 版 社

内容提要

本书将“高等数学”中的诸多问题进行系统归类，通过典型例题介绍方便快捷的解题方法与技巧。全书共 14 讲，其中第八讲与第十四讲是期末考试模拟试题，其他 12 讲均包含内容提要、客观题归类分析、主观题归类分析、释疑解难、单元统测和答案等六部分内容。

本书的读者对象是在读的理工科院校的学生和准备“考研”的朋友。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学释疑解难/刘群等主编 .—沈阳：东北大学出版社，2001.9
ISBN 7-81054-625-2

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 048682 号

©东北大学出版社出版
（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号 邮政编码 110004）
电话：（024）23890881（社务室） （024）23892538（传 真）
93687331（发行部） 83687332（出版部）
网址：http://www.neupress.com E-mail：neuph@neupress.com

沈阳农业大学印刷厂印刷 新华书店总店北京发行所发行

开本：787mm×1092mm 1/16 字数：506 千字 印张：19.75
2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑：刘宗玉 刘 莹 责任校对：米 戎
封面设计：唐敏智 责任出版：杨华宁

定价：24.00 元

序　言

作为理工科院校学生的一门必修课和“考研”的统考课程，“高等数学”一直备受青睐，但往往因其“难考”而让学子们望而生畏，甚至有谈虎色变之嫌。

一方面，通过“高等数学”的学习，会提高读者严密的逻辑思维能力、丰富的空间想象能力和分析问题与解决问题的能力。另一方面，通过学习“高等数学”的丰富内容而增长学生的知识，也为其奠定良好的理论基础，并为后继课程的学习打开通道。

正因为“高等数学”理论性强、内容多、题量大，使读者感到难学费解，常有面对麻团而不知所措之感。编写本书的目的在于既帮助读者完成学习方法的转变，又帮助读者通过典型问题的归类分析而理清脉络，释解疑难。书中所选例题均具有很强的代表性，其解法往往方便快捷，读者阅后定会有茅塞顿开、豁然开朗之感。

全书除第八讲和第十四讲外，其他各讲都含有内容提要、客观题归类分析、主观题归类分析、释疑解难、单元统测和答案等六部分内容。建议读者独立完成书中各节所留练习题和第八讲与第十四讲的模拟试题，必大有收益。

本书适用于在读的理工科院校的本科生和有志“考研”的朋友，它也会成为自学“高等数学”者的良师益友，对于从事“高等数学”教学工作的高校教师也是一本内容翔实的教学参考书。

本书主编为刘群、衡勤、王学理，副主编为杨雅琴、刘满、马毅、金广伟，参加编写的还有葛仁东、王金芝、李艳坡、李建华、孙丽华、梁应仙、马鸿、王新心、李红等。由于作者水平所限，书中难免存在不妥与错误之处，这虽然非我们所愿，但又不可避免，恳请同仁及读者斧正。

编　者

2001 年 6 月 15 日

目　录

第一讲　一元函数的极限

一、内容提要

(一) 主要定义

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使得当 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$,则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限(也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a),记成 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

极限不存在时,说 $\{x_n\}$ 发散.

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \to x_0$ 时的极限,记成 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

注　在此定义中,$0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$,A 称为 $f(x)$ 的当 $x \to x_0 - 0$ 时的左极限,记成

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$,类似地,可以定义右极限 $f(x_0 + 0)$.

3. $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,当 $|x| > X$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \to \infty$ 时的极限,记成 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 的定义.

4. $\forall M > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x)| > M$,则称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大量,记成 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.无穷大量简称为无穷大.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 等的定义.

注　当 $x \to x_0$ 和 $x \to \infty$ 时结论都成立,以后简记成lim.以 0 为极限的量称为无穷小量.无穷小量简称为无穷小.

5. 若 $\lim \alpha(x) = \lim \beta(x) = 0$,且 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小,记成 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$,称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小;若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C(C \neq 0)$,则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小,记成 $\alpha(x) = o(\beta(x))$,当 $C = 1$ 时,称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小,记成 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(二) 主要定理与公式

1. 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则有

$$\lim[f(x) + g(x)] = A + B,$$

$$\lim[f(x)g(x)] = AB,$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0).$$

2. 极限存在准则

(1) 单调有界数列必有极限;

(2) 若 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

(准则(2)亦称夹逼准则,对于函数也成立)

3. 在同一过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小;有限个无穷小的和是无穷小.

注 (1) 等价无穷小具有传递性:设 α,β,γ 为同一过程的无穷小,若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$,则 $\alpha\sim\gamma$;

(2) 等价无穷小在求极限过程中可以进行如下替换:在同一极限过程中,若 $\alpha\sim\tilde{\alpha},\beta\sim\tilde{\beta}$,且 $\lim\dfrac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$.

4. $\lim f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$,此处 $\lim\alpha(x) = 0$.

5. 洛比达(L'Hospital)法则　若 $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$(或 ∞),$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞,则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

6. 两个重要极限　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1,\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

7. 若在 $U(\hat{x},\delta)$ 内 $f(x)\geqslant0(f(x)\leqslant0)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,那么 $A\geqslant0(A\leqslant0)$.

8. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,且 $A>0(A<0)$,则必有 $U(\hat{x},\delta)$,使在此邻域中,$f(x)>0(f(x)<0)$.

注 若 $A = f(x_0)$,则 $f(x)$ 在 x_0 处连续,此时结论亦真.

9. 若极限存在,则其值必然惟一.

(三) 结论补充

1. 若 $\lim\varphi(x) = 0$,　则 $\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$.

2. 若 $\lim\varphi(x) = \infty$,　则 $\lim\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = \mathrm{e}$.

3. 若 $\lim\varphi(x) = 0$,　则 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = \mathrm{e}$.

注 以上三条中的 $\varphi(x)$ 不等于0.

4. 当 $a>0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

6. 当 $x\to0$ 时,$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)\sim\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$,$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$,$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq1)$.

7. 若 $\lim\alpha(x) = \lim\beta(x) = \lim A(x) = \lim B(x) = 0$,且 $\alpha(x)\sim A(x),\beta(x)\sim B(x)$,则有 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\dfrac{A(x)}{B(x)}$ 和 $\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}} = \lim[1+A(x)]^{\frac{1}{B(x)}} = \mathrm{e}^{\lim\frac{A(x)}{B(x)}}$.

注 分母 $\beta(x),B(x)$ 不能是0.

8. 不为零的无穷小的倒数为无穷大,无穷大的倒数为无穷小.

9. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}$.

11. 设 $\lim\varphi(x)=1,\lim\psi(x)=0,\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 可导，且 $\lim\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}$ 存在，则

$$\lim\varphi(x)^{\frac{1}{\psi(x)}}=\exp\lim\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}.$$

注　$\varphi(x),\psi(x),\psi'(x)$ 都不为零.

12. 设 $\lim\alpha=\lim\beta=0$,且 $\alpha-\beta\neq0$,则

$$\ln(1+\alpha)-\ln(1+\beta)\sim2(\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1+\beta})\sim\alpha-\beta.$$

13. 设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha=o(\beta)$，且 $\beta\sim\tilde{\beta}$，则 $\alpha+\beta\sim\tilde{\beta}$.

14. 设 $\alpha,\tilde{\alpha},\beta,\tilde{\beta}$ 均为当 $x\to x_0$ 时的无穷小，且 $\alpha\sim\tilde{\alpha},\beta\sim\tilde{\beta}$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=C(C\neq-1)$，则 $\alpha+\beta\sim\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}$.

15. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left[a+\dfrac{k}{n}(b-a)\right]\dfrac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

关于定积分的定义与计算详见第六讲.

16. $\lim u(x)^{v(x)}$ 呈 1^∞ 型，则 $\lim u(x)^{v(x)}=\exp\lim[u(x)-1]^{v(x)}$.

17. $\lim\varphi(x)=0,\lim\psi(x)=0$，则 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\psi(x)}}=\exp\lim\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$，若还有 $\varphi(x)\sim\tilde{\varphi}(x),\psi(x)\sim\tilde{\psi}(x)$，则 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\psi(x)}}=\exp\lim\dfrac{\tilde{\varphi}(x)}{\tilde{\psi}(x)}$.

18. $\lim\varphi(x)=0,\lim\omega(x)=\infty$，则 $\lim[1+\varphi(x)]^{\omega(x)}=\exp\lim\varphi(x)\omega(x)$.

二、客观题归类分析

(一) 填空题

【例 1-1】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x-2)-\ln(x+1)]=$ ________.

【解】 应填 -3.因为

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^x=\ln\exp\left(\dfrac{-2-1}{1}\right)\cdot1=-3$.

【例 1-2】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=$ ________.

【解】 应填 $\dfrac{1}{3}$.因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n=0$，故

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{3}}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=\dfrac{1}{3}$.

【例 1-3】 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^p}=\dfrac{1}{2}$，则 $p=$ ________.

【解】　应填 3. 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^p}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^p}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(\cos x)x^{p-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x^{p-1}}$.
故 $p-1=2$,因此 $p=3$.

【例 1-4】　$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

【解】　应填$\dfrac{1}{6}$.令$\dfrac{1}{x}=t$,则

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{6}t^3}{t^3}=\dfrac{1}{6}$.

【例 1-5】　$\lim\limits_{x\to 0+}x^x=$ ________.

【解】　应填 1. 因为原式 $=\exp\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\exp\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=e^0=1$.

练　习　1-1

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}=$ ________.

2. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=$ ________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{\sin^2 x}=$ ________.

4. 设 $a>0$,则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}=$ ________.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{1-2^{\frac{1}{\tan x}}}=$ ________.

(二)选择题

【例 1-6】　下列各式不正确的是[　　　　].

(A)　$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$;　　(B)　$\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{1}{x}}=0$;

(C)　$\lim\limits_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$;　　(D)　$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$.

【解】　应选择(A).因为(B)、(C)都是正确的,故$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$不存在.

【例 1-7】　下列各式正确的是[　　　　].

(A)　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;　　(B)　$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

(C)　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;　　(D)　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$.

【解】 应选择(C).因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x} = e^0 = 1$.令$x = \dfrac{1}{t}$,可得$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = 1$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$是显然的.

【例 1-8】 设$0 < a < b$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n} = $[ ].

(A) a; (B) b; (C) 1; (D) $a+b$.

【解】 应选择(B).因为$\sqrt[n]{a^n+b^n} = b\left[1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$,故原极限值为$b$.

【例 1-9】 求下列极限时,能使用洛比达法则的是[ ].

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$; (B) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; (D) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

【解】 应选择(D).因为此极限为$\infty\cdot 0$型,又$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = 1$.(C)不存在,注意$x\to\infty$包含$x\to+\infty$和$x\to-\infty$两种情形.(A)、(B)不满足洛比达法则的条件.

【例 1-10】 当$x\to 0$时,变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是[ ].

(A) 无穷小; (B) 有界的,但非无穷小;

(C) 无界的,但非无穷大; (D) 无穷大.

【解】 应选择(C).当$x\to 0$时,$\dfrac{1}{x^2}$是无穷大量,而$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$.有界变量与无穷大的乘积并不一定是无穷大.实际上,$\sin\dfrac{1}{x}$当$x = \dfrac{1}{2k\pi}(k = 1,2,\cdots)$时,其值为0;当$x = \dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{1}{2}\pi}(k = 0,1,2,\cdots)$时,其值为1.故当$x\to 0$时,$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$既不是无穷小量,又不是无穷大量,也不是有界变量.它是无界的.

练 习 1-2

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$的值是[ ].

(A) 1; (B) ∞; (C) 0; (D) 不存在.

2. 无穷大量与有界量的关系是[ ].

(A)　无穷大量可能是有界量；

(B)　无穷大量一定不是有界量；

(C)　有界量可能是无穷大量；

(D)　不是有界量就一定是无穷大量.

3. 下面各式运算正确的是[　　　].

(A)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=1\cdot 0=0$；

(B)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\cos x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos x}{\sin x}$不存在，故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}$不存在；

(C)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{x}}{\cos x}=1$；

(D)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1\cdot 1=1$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=$[　　　].

(A)　0；　(B)　1；　　(C)　不存在；　(D)　∞.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}=$[　　　].

(A)　1；　(B)　-1；　(C)　0；　(D)　不存在.

三、主观题归类分析

(一) 利用代数方法求极限

【例 1-11】　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$.

【解】　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+3k+2-1}{(k^2+3k+2)k!}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+2)!}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right]=\frac{3}{2}.$$

【例 1-12】　求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}{(n+1)+2(n+2)+\cdots+n(n+n)}$.

【解】　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}{n(1+2+3+\cdots+n)+(1+2^2+3^2+\cdots+n^2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)}{n\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{12}{5}.$$

【例 1-13】 求$\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})](|x|<1)$.

【解】 此题应设法变形,否则很难计算.可以乘以因子$\dfrac{1-x}{1-x}$.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

【例 1-14】 设$x_n=\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 可以从例1-12和例1-13的解法中得到启发:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)x_n=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)=1-\frac{1}{2^{2n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n+1}}\right)=\frac{4}{3}.$$

【例 1-15】 已知数列$\{x_n\}$:$x_1=a,x_2=b,x_n=\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2},n=3,4,\cdots$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 $x_1=a,x_2=b,$

$$x_2-x_1=b-a,$$

$$x_3-x_2=\frac{x_1+x_2}{2}-x_2=\frac{x_1-x_2}{2}=-\frac{b-a}{2},$$

$$x_4-x_3=\frac{x_3+x_2}{2}-x_3=\frac{x_2-x_3}{2}=\frac{b-a}{2^2},$$

$$\vdots$$

$$x_n-x_{n-1}=(-1)^{n-2}\frac{b-a}{2^{n-2}},$$

$$x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})$$

$$=a+(b-a)\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\right]$$

$$=a+(b-a)\left[\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}\right].$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a+\dfrac{2}{3}(b-a)=\dfrac{a+2b}{3}$.

练 习 1-3

1. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2[e^{\left(2+\frac{1}{n}\right)}+e^{\left(2-\frac{1}{n}\right)}-2e^2]$.提示:提取$e^{\left(2-\frac{1}{n}\right)}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}}$(共有 n 个根号).

(二)利用定义或准则研讨极限

【例 1-16】 证明$\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

【证明】 在证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的时候,应设法从$|f(x)-A|<\varepsilon$不等式出发,推出与之等价或较强的不等式$M|x-x_0|<\varepsilon$,即$|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{M}(M>0)$.这样,只要取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$就可以了.本题可以从$|5x+2-12|<\varepsilon$推出与之等价或较强的不等式$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$,于是取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$即可.现将本题证明书写如下:$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$,则当$0<|x-2|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$时,

$$|5x+2-12|=5|x-2|<5\cdot\delta=5\cdot\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon.\text{故}\lim_{x\to 2}(5x+2)=12.$$

【例 1-17】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

【解】 令$\sqrt[n]{n}=1+h_n(h_n>0)$,则

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,\text{即}0<h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

令$n\to\infty$,则$h_n\to 0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

实际上,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$可以看成极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$的一种特例,即取$x$为正整数数列,而对于$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$,是很容易利用洛比达法则求得其极限的.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=e^0=1.$$

另外,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$是一个很重要的结论,在以后的学习中还会用到.

【例 1-18】 已知$x_1=\sqrt{a}$,$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$,$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$,…,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(a>0)$.

【解】 这是一个单调增加且有界的数列,显然$x_{n-1}<x_n$;又$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$,于是$x_n^2=a+x_{n-1}$.$x_n=\dfrac{a}{x_n}+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}<\dfrac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1$,故$x_n$有界.

由极限存在准则(1)知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.不妨假定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}(a+x_{n-1})$,得$A^2=a+A$,解得$A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

由于$a>0$,故负值舍去.最后得$A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

【例 1-19】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

【解】 因为$(2n-1)(2n+1)<(2n)^2$,记$x_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,则

$$0 < x_n^2 = \frac{(1 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 9) \cdots (2n-3)(2n-1)(2n-1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}$$

$$< \frac{2n-1}{(2n)^2} \to 0,$$

由极限存在准则(2), $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0$.

【例 1-20】 求 $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}}$.

【解】 $\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}}$,而

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}} = \int_0^2 2^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2},$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{\ln 2},$$

由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} = \frac{1}{\ln 2}$.

练 习 1-4

1. 求 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n}$.
2. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,求 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.
3. 证明 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$.
4. 设 $x_1 > a > 0$,且 $x_{n+1} = \sqrt{a x_n} (n = 1,2,3,\cdots)$,求 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.
5. 设 $a_i > 0 (i = 1,2,\cdots,m)$,求 $\lim\limits_{n \to \infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}$.

(三) 利用两个重要极限公式求极限

这里所说的两个重要极限公式是指 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 和 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 当然,在解题过程中,也可以利用其变形,例如, $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ 等.

【例 1-21】 求 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} (a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1)$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x + b^x + c^x - 3} \cdot \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3} \cdot \frac{1}{x}}$

因为 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3x} = \frac{1}{3} \lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x} + \frac{c^x - 1}{x}\right]$

$$= \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c) = \frac{1}{3}\ln(abc),$$

故原式 $= e^{\frac{1}{3}\ln(abc)} = (abc)^{\frac{1}{3}}$.

【例 1-22】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]\cdot\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = e\cdot 1 = e.$$

注　此题若用公式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k} = e^{\frac{(b-c)h}{a}}$，有 $a=2, b=3, c=1, h=1, k=1$.

立刻得到原式 $= e^{\frac{(3-1)\cdot 1}{2}} = e$.

【例 1-23】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{4x}{x-1}}$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}\right]^{\frac{4x}{x+1}}$

$$= \left[\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x}{x+1}} = e^2.$$

【例 1-24】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x]$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{x+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} + \ln\frac{x+2}{x+1}\right]$

$$= \ln e - \ln e + \ln 1 = 0.$$

【例 1-25】 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]}{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}\cdot x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = \ln e^3 = 3.$$

练　习　1-5

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{2x+1}$.

5. 设 a,b 为常数,且 $a>0$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{ax})\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)$. 提示:原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b\ln(1+e^{ax})}{x}$.

(四) 利用等价替换求极限

【例 1-26】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{\sin^4 2x}$.

【解】 这是呈 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式,若使用洛比达法,则计算会相当麻烦,且很容易出现错误,但如果先做等价无穷小替换,则会简捷得多.

因为 $\sin^4 2x\sim(2x)^4$,故

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{(2x)^4}=\lim_{x\to0}\frac{-2x+2xe^{-x^2}}{64x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1+e^{-x^2}}{32x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2xe^{-x^2}}{64x}=-\frac{1}{32}.$$

【例 1-27】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

【解】 这又是 $\dfrac{0}{0}$ 型,当 $x\to0$ 时,$x\sin x\to0$. 故

$$\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\frac{1}{2}x\sin x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad e^{x^2}-1\sim x^2.$$

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

【例 1-28】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0,f'(0)=2$. 试求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{(1-\cos x)-0}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}$

$$=f'(0)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\tan^2 x}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

注　不能把 $f(1-\cos x)$ 中的 $1-\cos x$ 换成 $\dfrac{1}{2}x^2$. 此外还应注意,加减关系一般不能替换. 例如,在求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$ 时,有人认为既然 $\sin x\sim x$,就应有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$.

很明显,这个结果是不对的,此种替换是行不通的,但在一定条件下,加减法关系也可替换,请看例 1-29.

【例 1-29】 求 $\lim\limits_{x\to1}[1+\tan(x-1)]^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to1}[1+\tan(x-1)]^{\frac{1}{\ln[1+(x-1)]}}=\lim\limits_{x\to1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}=e$.

注　这里使用了前面内容提要中补充的公式,利用此公式可以简化许多计算,例如

1. $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{\tan x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}}=e$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

注　这里$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x} = 0$，　$x - \sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3$.

【例 1-30】　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(e^{2x} - x^2) - 2x}$.

【解】　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x + e^x) - \ln e^x}{\ln(e^{2x} - x^2) - \ln e^{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{\sin^2 x}{e^x}\right)}{\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{e^{2x}}\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x/e^x}{-x^2/e^{2x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot(e^x) = -1.$$

练　习　1-6

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2^x}{\ln(1+2x)} - \dfrac{1}{\ln(1+2x)}\right]$.　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos\sqrt{x - \sin x}}$.　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e - e^{\cos x}}{x\sin x}$.

5. $a > 0, a \neq 1$，求$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right)$. 提示：先提取 $a^{\frac{1}{x+1}}$.

（五）利用洛比达法则求极限

【例 1-31】　求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

【解】　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x - \sin 2x}{4x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos 2x}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x)^2}{6x^2} = \frac{1}{3}.$$

【例 1-32】　求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

【解】　这是1^∞ 型未定式，需要先取对数.

令 $y = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$，$\ln y = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$，

$y = e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}}$，当 $x \to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x}$ 呈$\dfrac{0}{0}$ 型.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x} = 0.$$

原式 $= e^0 = 1$.

注　实际上，本题有更简单的算法.