［美］ JACK K. HALE 著

常微分方程

侯定丕 译

人民教育出版社

内 容 提 要

本书根据美国 Wiley-Interscience 1969 年出版 Jack K. Hale 著《Ordinary Differential Equations》译出. 内容偏重定性理论, 并采用了泛函分析等方法. 可作高等院校数学专业高年级学生或研究生教学参考书之用.

[美] JACK K. HALE 著

常 微 分 方 程

侯 定 丕 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.625 字数 305,000

1980 年 3 月第 1 版 1980 年 12 月第 1 次印刷

印数 00,001—12,300

书号 13012·0446 定价 1.10 元

目　　录

第 0 章　数学的预备知识

在这一章里，我们收集了分析中若干在微分方程理论中起重要作用的基本事实.

0.1. Banach 空间与例

集合的交记作 $\cap$，集合的并记作 $\cup$，集合的包含记作 $\subset$，$x\in S$ 表示 x 是集合 S 的元素. R(或 C)将用来表示实数(或复数)域. R(或 C) 上的抽象线性向量空间(或线性空间)$\mathscr{X}$ 是这样的元素集合 $\{x, y, \cdots\}$，对于 $\mathscr{X}$ 中的任何 x, y，它们的和 $x+y$ 有定义，$x+y\in\mathscr{X}$，$x+y=y+x$，又 $\mathscr{X}$ 中有元素 0，使得对于所有 $x\in\mathscr{X}$，有 $x+0=x$；对于任何数 $a, b\in R$(或 C)，纯量乘积 ax 有定义，$ax\in\mathscr{X}$，$1\cdot x=x$，$(ab)x=a(bx)=b(ax)$，$(a+b)x=ax+bx$，$a(x+y)=ax+ay$. 如果对于线性空间 $\mathscr{X}$ 的每个 x，对应着一个实数 $|x|$，称为 x 的范数，它满足下述条件

(i) 当 $x\neq 0$ 时 $|x|>0$，$|0|=0$；

(ii) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$(三角不等式)；

(iii) 对于所有 R(或 C) 中的 a 与 $\mathscr{X}$ 中的 x，有 $|ax|=|a|\cdot|x|$.

这种线性空间 $\mathscr{X}$ 就是赋范线性空间. 在可能混淆时，在 $|\cdot|$ 下角加表示 $\mathscr{X}$ 的记号. 赋范线性空间 $\mathscr{X}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 $\mathscr{X}$ 中的 x，指的是 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|=0$. 我们把它写作 $\lim x_n=x$. $\mathscr{X}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，如果对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)>0$，使得若 $n, m\geqslant N(\varepsilon)$，则 $|x_n-x_m|<\varepsilon$. 如果 $\mathscr{X}$ 中的每个 Cauchy 序列收敛到 $\mathscr{X}$ 的一个元素，空间 $\mathscr{X}$ 是完全的. 完全的赋范线性空间是 Banach 空间. 赋范线性空间 $\mathscr{X}$ 的元素 x 的 ε-邻域是 $\{y\in\mathscr{X}:$

$|y-x|<\varepsilon\}$. 如果$\mathscr{X}$中的集合S的任何x都有包含在S内的ε-邻域,S就是开集. 如果元素x的每个ε-邻域都包含集合S的点,x是S的极限点. 如果集合S包含它所有的极限点,S是闭集.集合S的闭包是S与全体极限点的并集. 如果S的闭包是$\mathscr{X}$, 则集合S在$\mathscr{X}$中稠密. 如果S是$\mathscr{X}$的子集,A是R的子集,而$a\in A$,V_a是$\mathscr{X}$的开集的集合,使得$\bigcup\limits_{a\in A} V_a\supset S$, 则集合$V_a$被称作$S$的开复盖.如果$\mathscr{X}$中的集合$S$的每个开复盖包含有限个仍然复盖住$S$的开集,则$S$是紧的. 对于Banach空间, 它与下述说法等价: 如果Banach空间的集合S的任何序列$\{x_n\}$总包含收敛到S的元素的子序列, 则S是紧的。如果对于$\mathscr{X}$中的集合S, 存在$r>0$, 使得$S\subset\{x\in\mathscr{X}:|x|<r\}$,则$S$是有界的.

例 1.1. 设$R^n(C^n)$是实(复)n-维向量空间. 对于特定的坐标系, $R^n(C^n)$的元素x便写作$x=(x_1, \cdots, x_n)$, 此地每个x_j属于$R(C)$. 如果$x=(x_1,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,\cdots, y_n)$属于$R^n(C^n)$, 那么对于$R(C)$中的a, b, $ax+by$被定义为$(ax_1+by_1, \cdots, ax_n+by_n)$. $R^n(C^n)$显然是线性空间.如果对于$x=(x_1,\cdots,x_n)$取$|x|$为$\sup\limits_i|x_i|$, $\sum\limits_i|x_i|$或$[\sum\limits_i |x_i|^2]^{\frac{1}{2}}$, 则$R^n(C^n)$是Banach空间. 这些范数在这样的意义下是等价的, 按一种范数收敛的序列也按其它种范数收敛. 由于收敛性意味着坐标的收敛性,而$R(C)$又是完全的, 因此$R^n(C^n)$是完全的.

$R^n(C^n)$中的集合S是紧的,当且仅当它是闭的与有界的。

习题 1.1. 如果E是有限维线性向量空间,而$|\cdot|$,$\|\cdot\|$是E的两种范数, 证明存在正的常数m,M使得对于E中所有x,$m|x|\leqslant\|x\|\leqslant M|x|$.

例 1.2. 设D是R^m[或C^m]的紧子集,而$\mathscr{C}(D,R^n)$[或$\mathscr{C}(D,$

C^n)]是由把D映入R^n[或C^n]的连续函数所成的线性空间. $\mathscr{C}(D, R^n)$中的函数序列$\{\phi_n, n=1, 2, \cdots\}$称为在$D$上一致收敛的,如果存在把$D$映入$R^n$的函数$\phi$,使得对于每个$\varepsilon>0$存在$N(\varepsilon)$(不依赖于$n$),使得对于所有$n\geqslant N(\varepsilon)$与$D$中的$x$都有$|\phi_n(x)-\phi(x)|<\varepsilon$. 序列$\{\phi_n\}$称为一致有界的,如果存在$M>0$使得对于所有$D$中的$x$与所有$n=1, 2, \cdots$都有$|\phi_n(x)|<M$. 序列$\{\phi_n\}$称为同等连续的,如果对于每个$\varepsilon>0$存在$\delta>0$使得只要$D$中的$x$, y满足$|x-y|<\delta$,就有

$$|\phi_n(x)-\phi_n(y)|<\varepsilon, \quad n=1,2,\cdots,$$

$\mathscr{C}(D, R^n)$中的函数f称为满足 Lipschitz 条件的,如果存在常数K使得对于D中所有x, y有$|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|$. 最常碰见的$\mathscr{C}(D, R^n)$中的同等连续序列是满足 Lipschitz 条件且 Lipschitz 常数K不依赖于n的序列$\{\phi_n\}$.

引理 1.1. (Ascoli-Arzela) $\mathscr{C}(D, R^n)$的任何一致有界、同等连续的函数序列有在D上一致收敛的子序列.

引理 1.2. 如果$\mathscr{C}(D, R^n)$中的序列在D上一致收敛,则极限函数属于$\mathscr{C}(D, R^n)$.

如果我们定义

$$|\phi|=\max_{x\in D}|\phi(x)|,$$

则易知它是$\mathscr{C}$上的一种范数,而上述引理说明$\mathscr{C}(D, R^n)$是具有这种范数的 Banach 空间. 对于$\mathscr{C}(D, C^n)$也同样.

习题 1.2. 假设$m=n=1$. 若定义

$$\|\phi\|=\int_D|\phi(x)|dx,$$

试说明$\mathscr{C}(D, R)$是赋范线性空间. 给出例子说明为什么这个空间不完全,什么是这个空间的完全化?

0.2. 线性变换

把某空间的集合 A 变入某空间的集合 B 的函数称为由 A 入 B 的变换或映射. A 叫做映射的区域，映射值的集合叫做映射的值域. 如果 f 是由 A 入 B 的映射，我们简记之为 $f:A\to B$，又记 f 的值域为 $f(A)$. 如果 $f:A\to B$ 是一对一的，并且与其逆都是连续的，则 f 为由 A 到 B 的同胚. 如果 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是实(或复)Banach 空间，而 $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$. 对于所有 $\mathscr{X}$ 中的 x_1, x_2 与所有实(或复)数 a_1, a_2 有 $f(a_1x_1+a_2x_2)=a_1f(x_1)+a_2f(x_2)$，则 f 称为线性映射. 由 $\mathscr{X}$ 入 $\mathscr{Y}$ 的线性映射称为有界的，如果存在常数 K 使得 $|f(x)|_2\leqslant K|x|_1$ 对所有 $\mathscr{X}$ 中的 x 成立，这里 1, 2 分别表示范数是在 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 中取的.

引理 2.1. 假设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间，线性映射 $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 有界，当且仅当它是连续的.

习题 2.1. 证明此引理.

习题 2.2. 证明由 R^n(或 C^n)入 R^m(或 C^m)的每个线性映射可以用 $m\times n$ 实(或复)矩阵表示，因此必然连续.

连续线性映射 $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 的范数 $|f|$ 定义为

$$|f|=\sup\{|f(x)|_2 : |x|_1=1\}.$$

容易证明这样定义的 $|f|$ 具备范数定义中的性质(i)—(iii)，并且

$$|f(x)|_2\leqslant|f|\cdot|x|_1 \qquad \text{对于一切}\mathscr{X}\text{中的 } x.$$

如果把 n 维线性空间映入 m 维线性空间的线性映射是由 $m\times n$ 矩阵 A 确定的，我们把它的范数记作 $|A|$.

习题 2.3. 假设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间，且 $L(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是由 $\mathscr{X}$ 入 $\mathscr{Y}$ 的有界线性算子的集合. 证明 $L(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是具有上面定义的范数的 Banach 空间.

例 2.1. 定义 $f:\mathscr{C}([0,1],R)\to R$ 为 $f(\phi)=\int_0^1\phi(s)ds$，$f$ 是线性、连续映射，$|f|=1$.

例 2.2. 定义 $S=\{\mathscr{C}([0,1], R)$ 中有连续的一阶微商的 $\phi\}$. S 在 $\mathscr{C}([0,1],R)$ 中稠密. 对于任何 S 中的 ϕ, 定义 $f\phi(t)=d\phi(t)/dt, 0\leqslant t\leqslant 1$. 函数 f 是线性的,但是无界. 事实上,函数序列 $\phi_n(t)=t^n$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 满足 $\|\phi_n\|=1$, 但是 $\|f\phi_n\|=n$. 说明无界性的另一方法是证明 f 不连续. 考虑函数 $\phi_n(t)=t^n-t^{n+1}, 0\leqslant t\leqslant 1$, $n\geqslant 1$. 在 $\mathscr{C}([0, 1], R)$ 中, $n\to\infty$ 时 $\phi_n\to 0$, 但是 $f\phi_n(t)=t^{n-1}[n-(n+1)t]$ 且 $f\phi_n(1)=-1$, 当 $n\to\infty$ 时不趋于 0.

在微分方程中经常用到的另一个非常重要的泛函分析工具是一致有界性原理. 在本书中, 我们用比较初等的证明来回避用这个原理, 只在第 IV 章中有一个例外.

一致有界性原理.

假设 $\mathscr{A}$ 是指标集合, 而对 $\mathscr{A}$ 中的 α, T_α 是由 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 到 Banach 空间 $\mathscr{Y}$ 的有界线性映射, 并且对 $\mathscr{X}$ 中的每个 x, $\sup\limits_{\alpha\in\mathscr{A}}|T_\alpha x|<\infty$, 则 $\sup\limits_{\alpha\in\mathscr{A}}|T_\alpha|<\infty$.

0.3. 不动点定理

变换 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 的不动点是 $\mathscr{X}$ 中满足 $Tx=x$ 的点 x. 关于变换不动点存在性的定理在微分方程中用起来很方便, 即使并非绝对必要. 这些定理可以当作一种工具, 以避免重复议论, 使人能注意问题的实质.

分析中的一种标准方法是逐次逼近法, 它的基本原理已被抽象为所谓 Banach 与 Cacciopoli 压缩映射原理. 如果 $\mathscr{F}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 的子集. 而 T 是由 $\mathscr{F}$ 映入 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 的变换(记作 $T:\mathscr{F}\to\mathscr{B}$), 则 T 是 $\mathscr{F}$ 上的压缩, 如果存在 $\lambda, 0\leqslant\lambda<1$, 使得

$$|Tx-Ty|\leqslant\lambda|x-y|,\quad x, y\in\mathscr{F}.$$

常数 λ 称为 T 在 $\mathscr{F}$ 上的压缩常数.

定理 3.1. (Banach-Cacciopoli 压缩映射原理). 如果$\mathscr{F}$是Banach 空间$\mathscr{X}$的闭子集，而$T:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ 是压缩，则T在$\mathscr{F}$中有唯一不动点 $\bar{x}$. 并且如果在$\mathscr{F}$中任取 x_0，序列$\{x_{n+1}=Tx_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots\}$当 $n\to\infty$ 时总收敛于 $\bar{x}$, 并且$|\bar{x}-x_n|\leqslant\lambda^n|x_1-x_0|/(1-\lambda)$, 此地 $\lambda<1$ 是T在$\mathscr{F}$上的压缩常数.

证明 唯一性. 如果 $0\leqslant\lambda<1$ 是T在$\mathscr{F}$上的压缩常数，又有 $x,y\in\mathscr{F}$ 满足 $x=Tx$, $y=Ty$, 于是$|x-y|=|Tx-Ty|\leqslant\lambda|x-y|$. 由此推知$|x-y|\leqslant 0$, 故$|x-y|=0$ 即 $x=y$.

存在性. 设 x_0 是任意的，而 $x_{n+1}=Tx_n, n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$, 根据假设每个 $x_n, n=0,1,\cdots$, 属于 $\mathscr{F}$. 又$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\lambda|x_n-x_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant\lambda^n|x_1-x_0|, n=0,1,\cdots$于是对于 $m>n$

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant[\lambda^{m-1}+\lambda^{m-2}+\cdots+\lambda^n]|x_1-x_0|\\&=\lambda^n[1+\lambda+\cdots+\lambda^{m-n-1}]|x_1-x_0|\\&=\frac{\lambda^n[1-\lambda^{m-n}]}{1-\lambda}|x_1-x_0|\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1-x_0|,\end{aligned}$$

故$\{x_n\}$是 Cauchy 序列，在$\mathscr{X}$中有 $\bar{x}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$. 因为$\mathscr{F}$是闭的, 故 $\bar{x}$ 属于$\mathscr{F}$. 因为T连续，又$|\cdot|$连续(因为$|x|-|x_n-x|\leqslant|x_n|\leqslant|x_n-x|+|x|$), 所以推知

$$0=\lim_{m\to\infty}|x_{m+1}-Tx_m|=|\lim_{m\to\infty}[x_{m+1}-Tx_m]|=|\bar{x}-T\bar{x}|,$$

故 $T\bar{x}=\bar{x}$. 这就证明了不动点的存在性.

在前面对$|x_m-x_n|$的估计式中令 $m\to\infty$, 便证明了最后的估计式, 定理证毕.

习题 3.1. 假设$\mathscr{X}$是 Banach 空间，$T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 是连续线性算子, $|T|<1$. 证明：若 I 为恒等算子, 则 $I-T$ 有有界的逆. 即证明方程$(I-T)x=y$ 在$\mathscr{X}$中有唯一解 x, 它连续依赖于$\mathscr{X}$中的 y.

设$\mathscr{X}$、$\mathscr{Y}$是Banach空间，D是$\mathscr{X}$中的开集．函数$f:D\to\mathscr{Y}$称为在D中点x(Frechet)可微，如果存在$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$的有界线性算子$A(x)$，使得对于每个$h\in\mathscr{X}$，只要$x+h\in D$就有

$$|f(x+h)-f(x)-A(x)h|\leqslant\rho(|h|,x),$$

此地$\rho(|h|,x)$满足当$|h|\to 0$时$\rho(|h|,x)/|h|\to 0$．线性算子$A(x)$称为f在x的导数，而$A(x)h$称为f在x的微分．

习题 3.2．假设$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$是Banach空间，$\mathscr{A}$是$\mathscr{X}$的开子集，$f:\mathscr{A}\to\mathscr{Y}$，而对于每个$x_0\in\mathscr{A}$，$h\in\mathscr{X}$以及实变量$t$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=\omega(x_0)h$$

存在．再假设对于所有$x_0\in\mathscr{A}$而言，$\omega(x_0)$是连续线性映射，又假设ω作为由$\mathscr{A}$入$L(\mathscr{X},\mathscr{Y})$的映射是连续的，其中$L(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是习题2.3中所定义的．证明，$f$是(Frechet)可微的，在$x_0\in\mathscr{A}$的导数是$\omega(x_0)$．

习题3.3．证明上一习题中的$\omega(x_0)$可能对于每个h都存在，是连续线性映射，但可能不是f在$x_0\in\mathscr{A}$的Frechet导数．

习题 3.4．设$\mathscr{C}^1([0,1],R^n)$是连续可微函数$x:[0,1]\to R^n$的空间，在其中按通常的方式定义了加法与纯量乘法，又令$|x|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\dot{x}(t)|$，此地$\dot{x}(t)=dx/dt$．证明$\mathscr{C}'([0,1],R^n)$是Banach空间。

习题 3.5．设$w:\mathscr{C}^1([0,1],R^n)\times[0,1]\to R^n$是赋值映射，$w(x,t)=x(t)$．证明$w$连续可微，并计算其导数．用两法作此题，一法是按导数的定义，一法是据习题3.2.

若f：$R^m\to R^n$在点x可微，则$A(x)=\partial f(x)/\partial x=(\partial f_i(x)/\partial x_j,\ i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$是$f$对于$x$的Jacobi矩阵．

引进一些关于阶关系的记号，以后有用．如果$|f(x)|/|x|$对零的邻域内的x有界，就说当$|x|\to 0$时$f(x)=O(|x|)$．如果

$|x|\to 0$ 时 $|f(x)|/|x|\to 0$, 就说当 $|x|\to 0$ 时 $f(x)=o(|x|)$.

假设$\mathscr{F}$是 Banach 空间$\mathscr{X}$的子集, $\mathscr{G}$ 是 Banach 空间$\mathscr{Y}$的子集, 而$\{T_y,\ y\in\mathscr{G}\}$是 $\mathscr{F}\to\mathscr{X}$的算子族. 如果$T_y$: $\mathscr{F}\to\mathscr{F}$, 且有 λ, $0\leqslant\lambda<1$. 使得

$$|T_y x-T_y\bar{x}|\leqslant\lambda|x-\bar{x}| \qquad \text{对于所有 } y\in\mathscr{G} \text{ 与 } x,\bar{x}\in\mathscr{F}.$$

则说算子 T_y 是在$\mathscr{F}$上的一致压缩. 换句话说, 对于每个$\mathscr{G}$中的 y 而言, T_y 是压缩, 而压缩常数又可取得不依赖于 y.

定理 3.2. 如果$\mathscr{F}$是 Banach 空间$\mathscr{X}$的闭子集, $\mathscr{G}$是 Banach 空间$\mathscr{Y}$的子集; 对于$\mathscr{Y}$中的 y, T_y: $\mathscr{F}\to\mathscr{F}$是$\mathscr{F}$上的一致压缩; 对于$\mathscr{F}$中每一个固定的 x, T_yx 对 y 是连续的, 则 T_y 的唯一不动点 $g(y)$对 y 是连续的. 并且, 如果 $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$是开集 $\mathscr{F}^\circ$, $\mathscr{G}^\circ$ 的闭包; 而 T_yx 对 y, x 的一阶导数相应地为 $A(x,y)$, $B(x,y)$, 并且都连续; 则 $g(y)$对于 $\mathscr{G}^\circ$ 中的 y 的一阶导数连续.

推论 3.1. 假设$\mathscr{X}$是 Banach 空间, $\mathscr{G}$ 是 Banach 空间$\mathscr{Y}$的子集; A_y: $\mathscr{X}\to\mathscr{X}$对于$\mathscr{Y}$中每个 y 是连续线性算子; 对于所有 $y\in\mathscr{G}$, $|A_y|\leqslant\delta<1$; 对于$\mathscr{X}$中每个 x 而言, A_yx 对 y 连续. 则算子 $I-A_y$ 有有界的逆, 此逆连续地依赖于 y.

证明 因为 T_y:$\mathscr{F}\to\mathscr{F}$是一致压缩,所以存在 λ,$0\leqslant\lambda<1$,使得对于$\mathscr{G}$中所有 y 与$\mathscr{F}$中所有 $x,\bar{x}$ 有 $|T_yx-T_y\bar{x}|\leqslant\lambda|x-\bar{x}|$. 设 $g(y)$ 是 T_y 在$\mathscr{F}$中的唯一不动点, 据定理 3.1 知它是存在的. 于是

$$\begin{aligned} g(y+h)-g(y) &= T_{y+h}g(y+h)-T_yg(y) \\ &= T_{y+h}g(y+h)-T_{y+h}g(y)+T_{y+h}g(y) \\ &\quad -T_yg(y), \end{aligned}$$

而

$$|g(y+h)-g(y)|\leqslant\lambda|g(y+h)-g(y)|+|T_{y+h}g(y)-T_yg(y)|,$$

由此推知

$$|g(y+h)-g(y)|\leqslant(1-\lambda)^{-1}|T_{y+h}g(y)-T_yg(y)|.$$

由于 $T_y x$ 对于 $\mathscr{F}$ 中每个固定的 x 而言，对 y 是连续的，故 $g(y)$ 是连续的．这就证明了定理的第一部分．

从此可几乎直接地证明推论 3.1. 事实上，我们需要证明的是，对于 $\mathscr{X}$ 中每个 z，方程 $x-A_y x=z$ 有唯一解，而此解连续地依赖于 y，z．这等价于求由 $T_{y,z}x=A_y x+z$ 所定义的算子 $T_{y,z}$ 的不动点 x．由于算子 A_y 是一致压缩，从定理 3.2. 的第一部分便推出推论 3.1 的结论．

为了证明定理的后一部分，我们假设对于 $y\in\mathscr{G}^\circ$，$x\in\mathscr{F}^\circ$，$T_y x$ 有连续的一阶导数，它们相应地是 $A(x,\ y)$，$B(x,\ y)$．$g(y)=T_y g(y)$．我们先假定 g 有导数 $C(y)$，对于 $\mathscr{Y}$ 中 h，来找 g 的微分 $z=C(y)h$ 应满足的方程．如果微分的链式法则可用，则

$$z=B(g(y),y)z+A(g(y),y)h, \tag{3.1}$$

此地 h 是 $\mathscr{Y}$ 的任意元素．容易证明，由 T_y 是一致压缩，可推知对于 $\mathscr{F}^\circ$ 中的 x 与 $\mathscr{G}^\circ$ 中的 y 有 $|B(x,y)|<\delta<1$.

由于对于 $\mathscr{F}^\circ$ 中的 x 与 $\mathscr{G}^\circ$ 中的 y 有 $|B(x,y)|<\delta<1$，从推论 3.1 推知对于 $\mathscr{G}$ 中每个 y 与 $\mathscr{Y}$ 中 h，方程 (3.1) 有唯一解 $z(y,h)$，它对 y,h 是连续的．根据唯一性，可见对于所有纯量 α,β 与 $\mathscr{Y}$ 中 h,u 有 $z(y,\alpha h+\beta u)=\alpha z(y,h)+\beta z(y,u)$；即 $z(y,h)$ 对 h 是线性的，可以写成 $C(y)h$，此地 $C(y)$：$\mathscr{Y}\to\mathscr{X}$ 对每个 y 是连续线性算子，并且对 y 是连续的．为了证明 $C(y)$ 是 $g(y)$ 的导数，我们对充分小的 h 来考察

$$\begin{aligned}g(y+h)-g(y)&=T_{y+h}g(y+h)-T_y g(y)\\&=T_y g(y+h)-T_y g(y)+A(g(y+h),y)h\\&\quad+o(|h|)\\&=B(g(y),y)[g(y+h)-g(y)]+o(|g(y+h)\\&\quad-g(y)|)+A(g(y+h),y)h+o(|h|),\end{aligned} \tag{3.2}$$

如果 $g(y+h)-g(y)-C(y)h=w$，那么由关系式 (3.2) 与 $z=C(y)h$

满足(3.1)的事实推知有对 h,y 连续的并且当 $h\to 0$ 时趋于零的函数 $k(h,y)$ 适合

$$[I-B(g(y),y)+k(h,y)]w=[A(g(y+h),y)-A(g(y),y)]h \\ +k(h,y)C(y)h+o(|h|),$$

由于 $A(x,y)$ 与 $g(y)$ 都连续,此式右边当 $|h|\to 0$ 时是 $o(|h|)$. 此外,存在 $h_0>0$, 对于 $|h|\leqslant h_0$ 有 $|B(g(y),\ y)-k(h,\ y)|<\delta/2$, 于是由推论 3.1 推知线性算子 $I-B(g(y),y)+k(h,y)$ 有有界的逆,并且此逆对 y,h 连续. 于是当 $|h|\to 0$ 时 $|w|=o(|h|)$. 定理证毕.

为了说明压缩映射原理, 我们来证明下述关于隐函数的重要定理. 在叙述中 $\det A$ 表示 $m\times m$ 矩阵 A 的行列式.

定理 3.3. (隐函数). 假设 $F:R^m\times R^n\to R^m$ 有连续的一阶偏导数, $F(0,0)=0$. 如果 F 对于 x 的 Jacobi 矩阵 $\partial F(x,y)/\partial x$ 满足 $\det\partial F(0,0)/\partial x\neq 0$, 则在 R^m,R^n 中存在 0 的邻域 U, V, 使得对于 V 中每个固定的 y, 方程 $F(x,y)=0$ 在 U 中有唯一解 x, 并且此解可以表成 $x=g(y)$, 此地 g 有连续的一阶导数, 且 $g(0)=0$.

证明 记

$$F(x,y)=Ax-N(x,y),$$

$$A=\frac{\partial F(0,0)}{\partial x},$$

$$N(x,y)=\frac{\partial F(0,0)}{\partial x}x-F(x,y),\quad N(0,0)=0.$$

从 N 的表示式得

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial F(0,0)}{\partial x}-\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}.$$

由于假设 $\partial F(x,y)/\partial x$ 连续, 故 $x\to 0,y\to 0$ 时 $\partial N(x,y)/\partial x\to 0$. 于是存在 $y\in R^n$, $\rho\geqslant 0$ 处的连续函数 $k(y,\rho)$, 使得 $k(0,0)=0$, 并且

$$|N(x,y)-N(\bar{x},y)|\leqslant k(y,\rho)|x-\bar{x}|$$

对所有 R^n 中的 y 与满足 $|x|,|\bar{x}|\leqslant\rho$ 的 $x,\bar{x}$ 成立. 由于假设矩阵

A 满秩，求 $F(x,y)=0$ 的解等价于求方程 $x=A^{-1}N(x,y)$ 的解，此地 A^{-1} 是 A 的逆. 而这又等价于求由 $T_yx=A^{-1}N(x,y)$ 所定义的算子 $T_y:R^m\to R^n$ 的不动点. 现在我们证明 T_y 在相应的集合上是压缩. 存在常数 K(参见习题 2.2) 使得对于 R^m 中所有 x 有 $|A^{-1}x|\leqslant K|x|$，因此

$$
\begin{aligned}
|T_yx| &= |A^{-1}N(x,y)|\leqslant K|N(x,y)|\\
&= K|N(x,y)-N(0,y)+N(0,y)|\\
&\leqslant Kk(y,\rho)|x|+K|N(0,y)|,
\end{aligned}
$$

$$|T_yx-T_y\bar{x}|\leqslant Kk(y,\rho)|x-\bar{x}|$$

对于 $|x|$, $|\bar{x}|\leqslant\rho$ 与所有 y 成立. 取甚小的正数 ε,δ，以致

$$Kk(y,\rho)\rho+K|N(0,y)|<\varepsilon\quad 对 |y|\leqslant\delta,\ \rho\leqslant\varepsilon 成立,$$

$$\sup\{Kk(y,\rho),\ |y|\leqslant\delta,\ \rho\leqslant\varepsilon\}<1,$$

又令 $U=\{R^m 中的 x:|x|<\varepsilon\}$, $V=\{R^n 中的 y:|y|<\delta\}$. 由上可见 T_y 对于 V 中 y 而言是 U 的一致压缩. 根据定理 3.1，T_y 在 U 内有唯一不动点 $g(y)$. 显然 $g(0)=0$. 由于 T_yx 对于每个 x 而言对 y 是连续的，从定理 3.2 推知 $g(y)$ 是 y 的连续函数. T_yx 对 x 与 y 的一阶导数是连续的，并且对 x 的导数是 $A^{-1}\partial N(x,y)/\partial x$. 于是由定理 3.2 推知 $g(y)$ 对 y 的连续可微性，这就完成了隐函数定理的证明.

习题 3.6. 叙述与证明定理 3.3 对于 Banach 空间的推广. 提示：作适合于 Banach 空间的必要的相应的改变与假定，然后再重复定理 3.3 的证明步骤.

压缩映射原理是一种不动点定理. 在微分方程理论中，比较复杂的不动点定理也很有用，我们再叙述在本书中用到的两个.

在一维情况下，下述不动点定理是显然成立的：任何从闭区间[0, 1]映入它自身的连续映射必然有不动点. 只要我们注意到不动点的存在性等价于在二维空间中函数的图形必与顶点在

(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)的单位正方形的对角线相交，证明便显明了．再思考一下便想到相似的结果在高维情况成立，但其证明较难．这便是

Brouwer 不动点定理．R^n 中的闭单位球映入自身的任何连续映射必然有一个不动点．

如果 R^n 的子集 A 与 R^n 中的闭单位球同胚，而 f 是由 A 入 A 的连续映射，则由 Brouwer 不动点定理推知 f 在 A 内有一个不动点．

假设 $f: R^n \to R^n$ 是连续映射，函数 f 的零点就是由 $g(x) = x + f(x)$ 所定义的映射 g 的不动点．如果我们能够证明在 R^n 中存在着集合 D，它与 R^n 中闭单位球同胚，而 g 把 D 映入 D，那么由 Brouwer 不动点定理推知 g 在 D 内有一个不动点，又 f 在 D 内有一个零点．这是 Brouwer 不动点定理的一个很重要的应用．

Brouwer 不动点定理已被 Schauder 推广到 Banach 空间，又被 Tychonov 推广到更一般的空间，我们来叙述 Banach 空间中的结果．以前说过，如果 Banach 空间的子集 $\mathscr{A}$ 的任何序列 $\{\phi_n\}$，$n=1, 2, \cdots$ 总有收敛于 $\mathscr{A}$ 的某元素的子序列，$\mathscr{A}$ 便是紧的．如果对于子集 $\mathscr{A}$ 中的 x, y，当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时 $tx + (1-t)y$ 总在 $\mathscr{A}$ 内，$\mathscr{A}$ 便是凸的；即凸集包含连接 x 与 y 的“线段”．由 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 入 Banach 空间 $\mathscr{Y}$ 的映射 f 称为紧的，如果对于 $\mathscr{X}$ 的每个有界集合 $\mathscr{A}$ 而言，集合 $\{f(x), x \text{ 在 } \mathscr{A} \text{ 中}\}$ 的闭包是紧的．如果此外 f 是连续的，则称为完全连续的．

Schauder 不动点定理．如果 $\mathscr{A}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 的凸、紧子集，而 $f: \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 是连续的，则 f 在 $\mathscr{A}$ 内有一个不动点．

推论．如果 $\mathscr{A}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 的闭、有界、凸子集，而 $f: \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 完全连续，则 f 在 $\mathscr{A}$ 内有一个不动点．

推论的证明如下：因为 $f(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}$，又 $\mathscr{A}$ 是闭的，所以根据假