2001年

全国硕士研究生入学考试复习指导丛书

数 学

模拟试题与试卷

（理工类）

李正元 主编

QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE KAOSHI FUXI ZHIDAO CONGSHU

高等教育出版社

2001年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书

数学 模拟试题与试卷

（理工类）

主编　李正元
编者　刘西垣　周民强　林源渠
　　　周建莹　尤承业　娄元仁
　　　孙山泽

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学·理工类·模拟试题与试卷/李正元主编. —北京:高等教育出版社,2000.3

（2001年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书）

ISBN 7-04-008604-2

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.D13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第03879号

责任编辑 吴 向 **特约编辑** 征道生

封面设计 顾 斌 **责任印制** 韩 刚

书 名 2001年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书—数学·模拟试题与试卷（理工类）

主 编 李正元

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电 话	010—64054588	传 真	010—64014048
	021—62587650		021—62551530
网 址	http://www.hep.edu.cn		
印 刷	高等教育出版社印刷厂		
开 本	787×1092 1/16	版 次	2000年3月第1版
印 张	27	印 次	2000年3月第1次印刷
字 数	650 000	定 价	29.00元

编者的话

2001年全国硕士研究生入学考试的时间越来越近了.为了协助广大考生加强数学训练,提高应试能力,我们编写了数学科目的考前复习指导用书.

数学科目的考试分理工和经济两个大类.对于每一大类,复习指导用书又分复习用书(即《数学·附解题指导》)和练习用书(即《数学·模拟试题与试卷》)两册,配套使用.

复习用书分为三个部分:高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步.每一部分又分为若干章节.编写指导思想、结构和内容以教育部制定的考试大纲为依据.陈述方式除给出基本事项或知识要点外,均通过典型例题或历年试题来介绍解题思路与方法.考虑到应试的实际情况,题型的选择与解法也可能是综合型的,即在保证重点的情况下不排除运用后续的知识.

练习用书分为三个部分:单元练习、综合练习、模拟试卷.单元练习部分仍按章节体系编写;综合练习则只按学科分支编排;模拟试卷按专业分类,每类三组题[如数学(一)有三组……数学(四)有三组].练习用书供考生自我练习用,虽然附有参考答案,但考生务必自己首先独立解题,然后,根据需要,再与解答进行对照和分析.

历年考试命题的特点是量大、面广,为了取得理想的成绩,我们提出以下几点注意,供考生参考.

1.“先易后难”.这是考试的一般原则.

2.“一传到位”.这里借用排球运动的术语,是指在解题时一定要及时弄清楚本命题内容所涉及的范围,以及熟悉解决这类问题的基本途径或常规方法.例如求函数的导数问题,首先要弄明白该函数是以什么形式出现的,若是分段函数,则在分段点必须用左、右求导的方法进行;如果该函数以积分形式出现,如求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t,$$

因为是对 x 求导,而积分号下又含有变量 x,这在定积分的学习中是没有的,所以我们只能设法通过变换将积分号下的 x 化去,使被积函数中不再出现 x,即写成

$$\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xrightarrow[\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u]{x-t=u} -x\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u.$$

然后就可以求导了.

3.“胸有典型”.这里所说的“典型”是指每一部分内容里最基本且常用的某些范例.而“胸有”的意思是必须熟知这些事实.例如在微积分中的两个重要函数极限;基本初等函数的导数公式;等价极限关系:

$$\varphi(x) \sim \sin\varphi(x) \sim \tan\varphi(x) \sim \ln(1+\varphi(x)) \quad (x\to 0),$$

其中 $\varphi(x)\to 0\ (x\to 0)$; p 级数,x^{-p} 的广义积分;基本幂级数的和,如

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),$$

以及基本初等函数泰勒级数展式等等.显然,若对这些事实能"想到就来",则将对解答试题大有助益.

4."步步为营".为了从形式上减少命题数量,也为检查考生的解题能力,试卷上常出现多种概念、方法并存的所谓综合命题.此时,我们必须将整个命题分成若干小题,一步一步地解出来.要做到这一点,第一要有信心,第二要分解步骤.如1999年微积分部分有试题:

"设 $y(x)$ $(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0$, $y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$作该曲线的切线及 x 轴的垂线,上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1,区间$[0,x]$上以 $y=y(z)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2,并设 $2S_1-S_2$ 恒为1,求此曲线 $y=y(x)$ 的方程."

这一试题属于综合题型.从命题100多字的陈述中一句一句读下来,易知它涉及求切线、面积与函数等,从而要分三个步骤一一解决.

第一求切线:因为在点 $P(x,y)$的导数是 $y'(x)$,所以过此点的切线为

$$Y-y=y'(x)(X-x).$$

第二求面积:S_1 是直角三角形面积,S_2 是曲边梯形面积,要用定积分,即 $S_2=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$.

第三求 $y(x)$:在上面两步中,由于 $y(x)$是未知的,故具体的面积值并未求出,都是变量 x 的函数.为求出 $y(x)$,就微积分范围而言,是属于微分方程求解的问题.那么方程在哪里?其实题设指出的 $2S_1-S_2=1$ 就是方程,即

$$\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=1.$$

要从这一方程解出 $y(x)$来,必须把积分号下的 y"解放"出来,办法当然是求导,最后可得

$$yy''=(y')^2,$$

这就是 $y=y(x)$ 满足的微分方程,由微分方程理论可解出.

总起来说,就是先易后难,一传到位,胸有典型,步步为营.

此外,需要提醒读者的是,对于本书所编的大量例题和练习,并非每题都要细读细做,而应根据自己的具体情况来定.虽然每年的试题都有些变化,但知识的范围和结构基本相同,因此,掌握基本概念、基础理论、常用方法是最重要的.精读,学会解决一定数量的范例不失为应试的重要方法.

本书是北京大学数学科学学院举办的硕士研究生入学考试数学辅导班的教材.对本书中存在的不足之处,请广大读者提出意见和建议.**欢迎考生参加我院举办的暑期辅导班.**

编　者

于北京大学数学科学学院

2000年2月

目　录

第一部分　高等数学

第一章　函　数

练　习

研究下列函数的定义域，值域，奇偶性，周期性和有界性：

1. $y = |x|$.　　2. $y = \sqrt{x(4-x)}$.

3. $y = \cos^2 x + 2$.　　4. $y = |\sin x| + |\cos x|$.

证明下列函数在各自的定义域中是无界的.

5. $y = |2x - 1|$.　　6. $y = x\tan x$.

求下列分段函数 $f(x)$，$g(x)$的复合函数 $f[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$g[g(x)]$.

7. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

8. $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x + 1, & x \geqslant 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 - x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

求下列函数的反函数：

9. $y = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.　　10. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

11. $y = \begin{cases} 1 + x, & x \leqslant 0, \\ e^x, & x > 0. \end{cases}$　　12. $y = \begin{cases} x, & x < 1, \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & x > 4. \end{cases}$

13. $y = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 3 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

求函数使其满足下列给定的关系式：

14. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}$ $(x > 0)$，求 $f(x)$.

15. 设 $f\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ $(x > 0)$，求 $f(x)$.

16. 设 $f\left(x + y, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$，求 $f(x, y)$.

17. $z = x - y + f(x + y)$，已知当 $y = 0$ 时 $z = x^2$，求 f 及 z.

解　答

1. $D = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$，$Z = \{y \mid y \geqslant 0\}$，偶函数，非周期，无界.

2. $D=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$, $Z=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$，非奇非偶，非周期，有界.

3. $D=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$, $Z=\{y\mid 2\leqslant y\leqslant 3\}$，偶函数，周期是 π，有界.

4. $D=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$, $Z=\{y\mid 1\leqslant y\leqslant \sqrt{2}\}$，偶函数，周期是$\dfrac{\pi}{2}$，有界.

5. 对 $\forall\ M>0$，取 $x_M=\dfrac{M}{2}+1$ 即可保证 $|2x_M-1|\geqslant 2x_M-1=M+1>M$.

6. 对 $\forall\ M\geqslant 2$，取 $x_M=[M]\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 即可保证 $|x_M\tan x_M|=x_M>M$. 事实上，当 $n\leqslant M<n+1$ $(n=2, 3, \cdots)$ 时，$x_M=n\pi+\dfrac{\pi}{4}>n+1>M$.

7. $\because f(x)>0\Leftrightarrow f(x)=1\Leftrightarrow x>0$; $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$; $f(x)<0\Leftrightarrow f(x)=-1\Leftrightarrow x<0$,

$\therefore f[f(x)]=f(x)$.

$\because g(x)=\dfrac{1}{x}>0\Leftrightarrow x>0$; $g(x)=\dfrac{1}{x}<0\Leftrightarrow x<0$; 而 $g(x)\neq 0$,

$$\therefore f[g(x)]=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

$$g[f(x)]=\frac{1}{f(x)}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

$$g[g(x)]=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x,\ x\neq 0.$$

8. $\because f(x)\geqslant 1$,

$$\therefore f[f(x)]=f(x)+1=\begin{cases}2, & x<0,\\ x+2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$g[f(x)]=1-f^2(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ -2x-x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$\because g(x)<0\Leftrightarrow\begin{cases}1-x^2<0,\\ x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow x>1,$$

$$\therefore f[g(x)]=\begin{cases}1, & g(x)<0,\\ g(x)+1, & g(x)\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}1, & x>1,\\ 2, & x<0,\\ 2-x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$g[g(x)]=\begin{cases}1, & g(x)<0,\\ 1-g^2(x), & g(x)\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}1, & x>1,\\ 0, & x<0,\\ 2x^2-x^4, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

9. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $-\infty<x<+\infty$.

10. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $-1<x<1$.

11. 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加，因而存在反函数

$$y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$$

12. 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加，因而存在反函数

$$y=\begin{cases}x, & x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & x>16.\end{cases}$$

13. 虽然函数在[1, 2]不是单调函数，但不同的 x 对应的函数值 y 不相同，因而存在反函数

$$y=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1, \\ 3-x, & 1\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$$

注意，这个例子表明非单调函数也可能存在反函数；另外这个函数与它的反函数有相同的解析式.

14. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\ (x>0)$.

15. $\because f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\ (x>0)$,

$\therefore f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

16. 将所给条件写成 $f\left(u+v,\dfrac{v}{u}\right)=u^2-v^2$，并令 $u+v=x$，$\dfrac{v}{u}=y$，可解得 $u=\dfrac{x}{1+y}$，$v=\dfrac{xy}{1+y}$，从而

$$f(x,y)=\left(\frac{x}{1+y}\right)^2-\left(\frac{xy}{1+y}\right)^2=\frac{x^2(1-y)}{(1+y)^2},\ y+1\neq 0.$$

17. 由题设得 $z=x+f(x)=x^2$,

从而 $f(x)=x^2-x$，代入即得 $z=(x+y)^2-2y$.

第二章 函数的极限与连续

§1 极限的概念与性质

练习 1.1

理解极限的定义.

1. (1999 年) "对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$" 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的( ).

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分又非必要条件.

2. "存在正整数 N，对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$" 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的( ).

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分又非必要条件.

3. "$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 当 $0<x-a<\delta$ 时总有 $|f(x)-A|<M\varepsilon$" 是 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的( )，其中 M 为某常数.

(A) 充分必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分条件但非必要条件. (D) 既非充分又非必要条件.

解 答

1. (C). 在数列极限的 ε-N 定义中，任给 $\varepsilon>0$ 的实质是 ε 为任意小的正数，这里任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$ 与 2ε 仍保留这一特性.

【评注】 事实上有

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$，$\exists\ N$，当 $n \geqslant N$ 时恒有

$$|x_n - a| \leqslant M\varepsilon.$$

其中 ε_0，M 为某给定的正数.

2. (A). 若 $\exists$ 正整数 N，对 $\forall\ \varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 则 $n > N$ 时 $x_n = a$（即从 $N+1$ 项开始是常数数列).

若不然，$\exists\ n_0 > N$，$x_{n_0} \neq a$. 令 $\varepsilon_0 = |x_{n_0} - a|$，则 $\varepsilon_0 > 0$，按假设条件，对 $\forall\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，又有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

这便矛盾了.

对常数数列 $x_n = a\ (n > N)$，显然有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

【评注】 在数列极限定义中，"$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N$，当 $n > N$ 时……"，这里表明 N 通常与 ε 有关. 若改为"$\exists\ N$，对 $\forall\ \varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$"，这里 N 是与 ε 无关的.

3. (B). $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$ 的等价定义是：$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，当 $0 < x - a < \delta$ 时总有 $|f(x) - A| < M\varepsilon$，其中 M 为某正的常数.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，当 $0 < x - a < \delta$ 时总有 $|f(x) - A| < M\varepsilon$.

显然，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \nRightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

练习 1.2

判断下列结论是否正确，并证明你的判断.

1. 若 $x_n < y_n\ (n > N)$，又存在极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = B$，则

$$A < B.$$

2. 设 $f(x)$ 定义在 $(a,\ b)$，又 $c \in (a,\ b)$，存在极限 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 有界.

3. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，则 $\exists\ \delta > 0$，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

解　答

1. 不正确. 这时只能保证 $A \leqslant B$，不能保证 $A < B$.

例如，$x_n = \dfrac{1}{n}$，$y_n = \dfrac{2}{n}$，则

$$x_n < y_n.$$

但

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

【评注】 对不等式 $x_n < y_n\ (n > N)$ 两边取极限时，除保不等号外还要带上等号，即

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

2. 不正确. 这时只能保证：$\exists\ c$ 的一个空心邻域 $v_0(c,\ \delta)$，$f(x)$ 在 $v_0(c,\ \delta)$ 有界，不能保证 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 有界. 例如

$$f(x) = \frac{1}{x},\quad (a,\ b) = (0,\ 1).$$

取 $c \in (0,\ 1)$，则

$$\lim_{x\to c} f(x) = \frac{1}{c}.$$

但 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,\ 1)$ 无界.

3. 正确. 因 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$, 由存在极限的函数的局部有界性$\Rightarrow\exists\ \delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

练习 1.3

单项选择.

1. 下列命题中正确的一个是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\Rightarrow\exists\ \delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)\geqslant g(x)$.

(B) 若 $\exists\ \delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(C) 若 $\exists\ \delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>g(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\Rightarrow\exists\ \delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>g(x)$.

2. (1990 年)　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域连续且 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不可导.　　　　(B) 可导且 $f'(0)\neq 0$.

(C) 有极大值.　　　(D) 有极小值.

3. (1996 年)　设 $f(x)$ 处处可导, 则(　　)成立.

(A) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.

解　答

1. (D). (D)正是极限的不等式性质中所述的结论. (A)的错误在于, 由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不能判断 x_0 附近 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系; 由(B)的条件只能得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. 在(C)中没假设极限存在.

2. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{1-\cos x}=2>0$, 由极限的不等式性质, $\exists\ \delta>0$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时

$$\frac{f(x)-f(0)}{1-\cos x}>0,$$

即 $f(x)-f(0)>0\Rightarrow$(D) 成立.

3. 想一想几何图形, 曲线伸向无穷远, 它的切线斜率不一定趋于∞. 如 $f(x)=x$, 则

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=1.$$

于是(C), (D)不对.

斜率是负的, 其函数值未必是负的, 如 $f(x)=x^2$, 则

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

于是(B)不对.

因此只可能(A)正确.

【评注】 作为选择填空题,解 2 中的思考过程可以选得正确的结论.若要证明结论(A),首先就要用到极限的不等式性质.由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty \Rightarrow \exists\ X>0$,当 $x\geqslant X$ 时 $f'(x)>1\Rightarrow f(x)=f(X)+f'(\xi)(x-X)$ $(x>X,\ \xi\in(X,x))\Rightarrow f(x)\geqslant f(X)+(x-X)\ (x>X)\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

§2 极限的存在与不存在问题

练习 2.1

证明下列数列 $\{x_n\}$ 是收敛的:

1. $x_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.

2. $x_n=\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\ (n=2,3,\cdots)$.

解 答

1.**【证法 1】** 显然 x_n 不是单调的.但若考虑它的偶数项组成的数列

$$x_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right),$$

其中每个括号内的数均大于零$\Rightarrow$

$$x_{2n+2}-x_{2n}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$$

$\Rightarrow x_{2n}$单调上升,又

$$x_{2n}=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}<1.$$

因此,x_{2n}单调上升有上界$\Rightarrow x_{2n}$收敛.记 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n}=a$.

再考察 x_{2n+1}:$x_{2n+1}=x_{2n}+\dfrac{1}{2n+1}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1}=a$.因此,$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$.

【证法 2】 x_n 是交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 的部分和数列:$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{1}{k}=x_n$.显然,$\dfrac{1}{n}$单调下降趋于零,由莱布尼茨法则 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛 $\Rightarrow S_n=x_n$ 收敛.

2.显然 x_n 单调上升,因为 $x_n>0$ 且

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\frac{1}{(n+1)^2}>1.$$

证明 x_n 的有界性遇到了困难,但我们知道:

$$y_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

显然是正的,单调有界的$\Rightarrow$

$$x_ny_n=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^4}\right)<1,\ x_n<\frac{1}{y_n}.$$

若 y_n 有正的下界即得 x_n 有界.

事实上，

$$y_n=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{1\times 3}{2^2}\cdot\frac{2\times 4}{3^2}\cdot\frac{3\times 5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}\ (n\to+\infty)$$

$\Rightarrow y_n$ 单调下降有极限 $\frac{1}{2}\Rightarrow y_n>\frac{1}{2}$.

因此 $x_n<2$，x_n 单调上升有上界，x_n 是收敛的.

练习 2.2

对下列函数 $f(x)$，极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在？

1. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$.　　2. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\arctan\dfrac{1}{x}$.　　3. $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x^2}$.

解　答

1. 考察左右极限 $f(0+)$ 与 $f(0-)$.

$$\lim_{x\to 0+}f(x)\xlongequal{t=e^{\frac{1}{x}}}\lim_{t\to+\infty}\frac{t+1}{t-1}=1,\ \lim_{x\to 0-}f(x)\xlongequal{t=e^{\frac{1}{x}}}\lim_{t\to 0}\frac{t+1}{t-1}=-1$$

$\Rightarrow$
$$\lim_{x\to 0+}f(x)\neq\lim_{x\to 0-}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)\text{ 不存在.}$$

2.
$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\lim_{x\to 0+}\arctan\frac{1}{x}=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\lim_{x\to 0-}\arctan\frac{1}{x}=-1\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$
$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ 存在
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{\pi}{2}.$$

3. 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0\ (n\to+\infty)\Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2=+\infty.$$

$x^2\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 空心邻域是无界的，又 $\sin\frac{1}{x^2}$是有界的$\Rightarrow x^2\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 空心邻域是无界的 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}\right)$ 不存在.

§3　无穷小量和它的阶

练习 3.1

比较无穷小量的阶.

1. (1997 年) 当 $x\to0$ 时 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$ 是 $g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$ 的( )无穷小量.

(A) 低阶. (B) 高阶. (C) 等价. (D) 同阶非等价.

2. (1997 年) 设 $f(x)$, $g(x)$在 $x=0$ 某邻域连续且 $x\to0$ 时 $f(x)$是 $\varphi(x)$的高阶无穷小,则 $x\to0$ 时 $\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$ 是 $\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的( )无穷小.

(A) 低阶. (B) 高阶.

(C) 同阶非等价. (D) 等价.

解 答

【分析】 这是几道比较无穷小阶的题目,比较无穷小量 $f(x)$, $g(x)$的阶,就是求$\frac{0}{0}$型极限 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$,看它是属于:0;∞;$0<l<+\infty$, $l\neq1$;$l=1$ 中的哪一种情形,求$\frac{0}{0}$型极限常用洛必达法则.求变限积分的导数时要用变限积分求导法.

1. 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t\right)'}{\left(\frac{x^5}{5}\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{5x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{5x^4}\cdot\sin x=0.$$

其中
$$\sin(1-\cos x)^2\sim(1-\cos x)^2\quad(x\to0),$$
$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

故选(B).

2. 因

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin x}{\varphi(x)x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=0\times1=0.$$

故选(B).

注:当 $x\to x_0$ 时比较无穷小量 $f(x)$与 $g(x)$的阶,等价于比较 $f^*(x)$与 $g^*(x)$的阶,其中

$$f(x)\sim f^*(x),\ g(x)\sim g^*(x)\quad(x\to x_0).$$

练习 3.2

确定无穷小量的阶与比较无穷小量的阶.

1. 当 $x\to0$ 时,下列无穷小中:

$\ln(1+\sin x)$, $x-\sin x$, $x\tan x$, $\frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$, $\frac{1}{\ln|x|}$ ( )是 x 的一阶无穷小;( )是 x 的二阶无穷小;( )是 x^2 的高阶无穷小.

2. 设 $\alpha>0$, $\beta>0$ 为任意正数,当 $x\to+\infty$ 时,将无穷小量:$\frac{1}{x^\alpha}$, $\frac{1}{\ln^\beta x}$, e^{-x}按从低阶到高阶的顺序排列.

解 答

1. (1) $\ln(1+\sin x)\sim\sin x\sim x\quad(x\to0)$

$\Rightarrow x\to 0$ 时，$\ln(1+\sin x)$ 是 x 的一阶无穷小.

(2) 因 $x\to 0$ 时

$$(x-\sin x)'=1-\cos x\to 0,\ (1-\cos x)'=\sin x\to 0,\ (\sin x)'=\cos x\to 1\neq 0$$

$$\Rightarrow\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ $x\to 0$ 时 $\sin x-x$ 是 x 的三阶无穷小.

或用泰勒公式

$$x-\sin x=x-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\quad(x\to 0)$$

$\Rightarrow$ $x\to 0$ 时 $x-\sin x$ 是 x 的三阶无穷小.

(3) 因 $\tan x\sim x$ 是 x 的一阶无穷小 $\Rightarrow x\tan x$ 是 x 的二阶无穷小.

(4) $1-\sqrt{\cos x^2}=\dfrac{1}{1+\sqrt{\cos x^2}}(1-\cos x^2)\sim\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2)^2$

$\Rightarrow 1-\sqrt{\cos x^2}$ 是 x 的 4 阶无穷小 $\Rightarrow\dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是 x 的 $(6-4=2)$ 2 阶无穷小.

(5) 考察

$$\lim_{x\to 0}x\ln|x|=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

$$\Rightarrow\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\ln|x|}}=0$$

$\Rightarrow$ $x\to 0$ 时，x 是比 $\dfrac{1}{\ln|x|}$ 高阶的无穷小量.

因此，$x\to 0$ 时，$\ln(1+\sin x)$ 是 x 的 1 阶无穷小；$x\tan x$，$\dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是 x 的 2 阶无穷小；$x-\sin x$ 是 x^2 的高阶无穷小.

2. 考察

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^\alpha}}{\frac{1}{\ln^\beta x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta\ln^{\beta-1}x\cdot\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta\ln^{\beta-1}x}{\alpha x^\alpha}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-m+1)\ln^{\beta-m}x}{\alpha^m x^\alpha}=0.$$

其中 $m=[\beta]+1$（$[\beta]$是不超过 β 的最大整数）. 于是

$$\frac{1}{x^\alpha}=o\left(\frac{1}{\ln^\beta x}\right)\quad(x\to+\infty).$$

再考察

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)x^{\alpha-m}}{e^x}$$

$$=0,\ m=[\alpha]+1.$$

因此，$x\to+\infty$ 时按从低阶到高阶的顺序排列为

$$\frac{1}{\ln^\beta x},\ \frac{1}{x^\alpha},\ \mathrm{e}^{-x}.$$

【评注】 上述结论表明：当 $x\to+\infty$ 时，若以 $\frac{1}{x}$ 为基本无穷小，对 $\forall\ \alpha>0$（不论它多么大），e^{-x} 都比 $\frac{1}{x^\alpha}$ 高阶；对 $\forall\ \beta>0$（不论它多么大），$\forall\ \alpha>0$（不论它多么小），$\frac{1}{x^\alpha}$ 都比 $\frac{1}{\ln^\beta x}$ 高阶.

§4 求极限的方法

练习 4.1

求下列极限：

1. $w=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

2. $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

3. $w=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x}$.

4. $w=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}$.

5. $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$.

6. $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x\sin x}$.

7. $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

解　答

【分析】 这些极限属于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限常用的方法有：

1° 通过恒等变形约去（或在取极限的意义下约去）分子、分母中极限为零或∞的因子，然后用极限四则运算法则；

2° 用洛必达法则；

3° 作变量替换与等价无穷小因子替换；

4° 用重要极限公式；

5° 用泰勒公式（若对泰勒公式不熟练，可不用此法）.

1. 作恒等变形：分子、分母同除 $-x\ (x<0)$，注意 $-x=\sqrt{x^2}=|x|$，得

$$w=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{2-1}{1}=1.$$

2. 作恒等变形：分子、分母同除以 x，有

$$w=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}=\frac{3}{2}.$$

【评注 1】 题 1～2 均是作简单恒等变形后消去极限为 0 或∞的因子，或直接相消或等价无穷小取极限后相消，其中还用到两个重要的极限公式.