初中奥林匹克竞赛试题分类解析

初三数学

初中奥林匹克

竞赛试题分类解析

课堂内外杂志社 编

CHUZHONG AOLINPIKE JINGSAISHITI FENLEIJIEXI

四川科学技术出版社

初中奥林匹克
竞赛试题分类解析

(初三数学)

课堂内外杂志社　编

四川科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中奥林匹克竞赛试题分类解析.初三数学/课堂内外杂志社编.-成都:四川科学技术出版社,2002.1
ISBN 7-5364-4889-9

Ⅰ.初… Ⅱ.课… Ⅲ.数学课-初中-竞赛题-解题 Ⅳ.G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 097257 号

总策划 刘信中
康利华
主　编 张　杰
编　委 季振辉

初中奥林匹克竞赛试题分类解析

(初三数学)

课堂内外杂志社　编
责任编辑　洪荣泽　周科琪
封面设计　杨　峰
版面设计　素　朴
责任校对　渝　蓉
责任出版　李　珉
出版发行　四川科学技术出版社
成都盐道街 3 号　邮政编码 610012
开　　本　850mm×1168mm　1/32
印张 10　字数 181 千
印　　刷　成都宇川印刷厂
版　　次　2002 年 1 月成都第一版
印　　次　2002 年 1 月成都第一次印刷
印　　数　1-1 0000 册
定　　价　9.80 元
ISBN 7-5364-4889-9/G·892

前 言

全国初中应用数学、物理、化学、英语等学科奥林匹克竞赛,是国家教委正式批准的一项全国性学科竞赛活动，是课外活动的一种好形式,是素质教育的一个方面,是因材施教的一个主渠道。它不仅有利于拓宽知识面,而且有利于加强教学的实践性,使各学科的基础知识与实际应用有机地结合起来。

为了配合初中学科奥林匹克竞赛的开展，为了给参赛的师生提供导向性的材料,我们约请了部分有丰富竞赛辅导经验的老师,编写了这套《初中奥林匹克竞赛试题分类解析》,按初一数学、初二数学、初三数学、初二物理、初三物理、初三化学(上、下册)、初一英语、初二英语、初三英语分册出版。

本书内容典型充实,形式灵活多变,深、广度有所拓展,力求达到举一反三的效果。它源于教材,高于教材,由浅入深,同步辅导,普及提高,相互兼顾。拥有本书,定有收益。

《初三数学分册》分六章。书中前五章,每章由三部分组成:知识要点、例题精讲、巩固练习。第六章为初中奥林匹克竞赛模拟试题。附录部分收集了近三年来全国初中数学联赛试题。在书后附有前面各个章节的参考答案。

由于编写时间比较仓促,不当之处在所难免,欢迎读者批评指正。

编者

2002 年 1 月

目　录

第一章 一元二次方程

§1.1 一元二次方程

【知识要点】

1. **定义**：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程.

2. **一般形式**：$ax^2+bx+c=0$.（a、b、c 为常数且 $a\neq 0$）

3. **常用解法**：有直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法.在具体解题时，应根据题目的特点选择适当的解法.

(1)**因式分解法**：适于右边为 0(或可化为 0)，左边易分解为两个一次因式积的方程，缺常数项或含有字母系数的方程用因式分解法较为简单，它是一种最普遍、最常用的方法；

(2)**公式法**：适用于任何形式的一元二次方程，但必须先将方程化为一般形式并算出 b^2-4ac 的符号；

(3)**直接开平方法**:用于缺少一次项或形如 $x^2=b$ 或$(x+a)^2=b(b\geq 0)$的方程;

(4)**配方法**：适用于二次项系数为 1，或当含有未知数的项与完全平方公式相近时.除特别情况下，一般不采用此法.

4. **根的判别式**

$\triangle=b^2-4ac$，

$\triangle>0 \Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有两个不等的实根；

$\Delta=0 \Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有两个相等的实根;

$\Delta<0 \Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$没有实根.

5. 根与系数关系(韦达定理)

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个实根为 x_1,x_2,则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$,其逆命题也成立.

6. 判别式的运用

(1)运用判别式解决与一元二次方程有关的问题.

①根据判别式的符号,对其存在性作出判断;

②已知方程根的情况、利用逆命题确定方程中某些系数或参数的取值范围;

③根据方程根的情况,利用判别式结合代数式的恒等变形进行推理和证明;

④求出有理系数方程有有理根的条件 (判别式为完全平方式).

(2)运用判别式解决二次三项式的分解问题.

①若$\Delta>0$,则 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,其中 x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根;

②若$\Delta=0$,则 $ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2$;

③若$\Delta<0$,则 ax^2+bx+c 在实数范围内不能分解因式.

(3)运用判别式解决二次方程中的有些问题.

①由 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$得 $ax^2+bx+c-y=0$,由$\Delta\geqslant0$可确定 y 的取值范围或 y 的最值问题,亦可解决其他某些特殊形式的函数值的取值范围或最值问题;

②Δ的符号决定抛物线与 x 轴的相交情况.$\Delta>0$,有两个不同交点;$\Delta=0$,有且只有一个交点 (也可以说顶点在 x 轴上);$\Delta<0$,没有交点.

7. 韦达定理的运用

(1)求根的同次幂的和与积.设 x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两实根，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$，欲求 $x_1^n+x_2^n$ 与 $x_1^n\cdot x_2^n$ 的值，只要把它们表示成一次幂的和与积的形式即可.例如：

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2).$$

(2)由方程根的某些约束条件，求方程系数应满足的条件.设方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两根为 x_1,x_2.若两根之间有函数关系 $f(x_1,x_2)=0$，再由韦达方程得到方程组

$$\begin{cases} f(x_1,x_2)=0, \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

由此消去 x_1、x_2,即可得到 a、b、c 的关系式.

(3)若已知一元二次方程的一个根，可不直接解原方程，利用韦达定理求出另一个根.

(4)若已知两数和及两数积，则可将这两个数视为某一个一元二次方程的两根，利用一元二次方程的有关知识来解决有关问题.这一思维方法是重要的构造法思想，应当引起重视.

【例题精选】

例 1 已知 a 是方程 $x^2-6x-1997=0$ 的一个正根，则代数式

$8+\cfrac{1997}{6+\cfrac{1997}{6+\cfrac{1997}{6+\cfrac{1997}{a}}}}$ 的值等于________.(1997 年江苏省试题)

分析 此题常数项的绝对值较大，采用因式分解法不易分

解，采用公式法运算量较大，可考虑配方法，而所求的代数式比较复杂，如果将 a 值直接代人计算，则不太简便，故应考虑化简代数式.

解 $x^2-6x-1997=0$，得 $x^2-6x+9=2006$，

$(x-3)^2=2006$，　　$\therefore\ x=3\pm\sqrt{2006}$.

因 a 为方程的正根，$\therefore\ a=3+\sqrt{2006}$.

又 $\because\ a^2-6a-1997=0$，$\therefore\ a^2=6a+1997$.

$\therefore\ a=6+\dfrac{1997}{a}$ 代人代数式得

$$\text{原式}=8+\cfrac{1997}{6+\cfrac{1997}{6+\cfrac{1997}{6+\cfrac{1997}{a}}}}=8+\cfrac{1997}{6+\cfrac{1997}{6+\cfrac{1997}{a}}}$$

$$=8+\cfrac{1997}{6+\cfrac{1997}{a}}=8+\frac{1997}{a}=2+6+\frac{1997}{a}$$

$$=2+a.$$

当 $a=3+\sqrt{2006}$ 时，原式 $=5+\sqrt{2006}$.

评论： 在解一元二次方程时，要根据题目的特点选用恰当的方法才能使运算简便. 对于某引起特殊形式的方程也可考虑整体思想、化归思想、因式定理等.例如对于 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，若 $a+b+c=0$ 则必有一根为 1；若 $a-b+c=0$ 则必有一根为 -1. 又如 $169x^2-39x-2=0$，可将 $13x$ 视为整体，设为 y，则原方程可化为 $y^2-3y-2=0$；$(7-4\sqrt{3})x^2-(2-\sqrt{3})x-2=0$，将 $(2-\sqrt{3})x$ 视为整体设为 y，则原方程化为 $y^2-y-2=0$.

例 2 当 a,b 为何值时，方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有实根?(1987 年全国试题)

分析 二次项系数不为 0，此方程必为二次方程，要使此方程

有实数解，当且仅当$\Delta \geq 0$时方程有实数解.

解 所给方程的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta&=4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)\\&=4(-1+2a-2a^2-4ab-4b^2)\\&=-4[(1-a)^2+(a+2b)^2],\end{aligned}$$

方程有实根，则$\Delta \geq 0$，故$(1-a)^2+(a+2b)^2=0$，

故$1-a=0$且$a+2b=0$，解得$a=1$，$b=-\frac{1}{2}$.

因此，当$a=1$，$b=-\frac{1}{2}$时，方程有实根.

评注 此题解法中用到配方和非负数思想. 配方法是中学数学中的重要方法，有着相当广泛地应用，应高度重视并能灵活运用此方法.

例3 设实数s、t分别满足$19s^2+99s+1=0$，$t^2+99t+19=0$并且$st \neq 1$，求$\frac{st+4s+1}{t}$的值.(1999年全国试题)

分析 注意到$19s^2+99s+1=0$与$t^2+99t+19=0$的特点可将其中一个变形，其形式可统一联想方程根与系数关系寻求s、t的关系是解决本题的关键所在.

解 由$19s^2+99s+1=0$，显然$s \neq 0$，故两边同除以s^2得

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2+99\left(\frac{1}{s}\right)+19=0,$$

又 $\because st \neq 1$，$\therefore t \neq \frac{1}{s}$.

$\therefore \frac{1}{s}$、t可以当作方程$x^2+99x+19=0$两个不同的实数根，由韦达定理可得

$$\frac{1}{s}+t=-99, \frac{1}{s} \cdot t=19,$$

$\therefore$ $st+1=-99s$, $t=19s$.

$\therefore\ \frac{st+4s+1}{t}=\frac{-99s+4s}{19s}=-5.$

评注 本题若求出 s、t,再代入计算,则其计算量很大,过程繁杂.如果恰当应用韦达定理来寻求 s 与 t 之间关系,可以使问题轻松得到解决.该题题型是数学竞赛中的热点题型.例如:

(1)已知 $a^4+3a^2=b^2-3b=1$,且 $a^2b\neq1$ 则 $\frac{a^6b^3+1}{b^3}$ 的值是(　　)

A. 35　B. 36　C. −35　D. −36　　(1998 年山东试题)

答案选 D.

(2)已知 $3m^2-2m-5=0$,$5n^2+2n-3=0$,其中 m、n 为实数,则 $\left|m-\frac{1}{n}\right|=$____ . (2000 年江苏试题)

注意:本题没有给出 $mn\neq1$ 这一条件,故应分别讨论,当 $m=\frac{1}{n}$ 时,$\left|m-\frac{1}{n}\right|=0$;当 $m\neq\frac{1}{n}$ 时,$\left|m-\frac{1}{n}\right|=\frac{8}{3}$.

例 4 已知 a,b 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个实数根,求 a^4+3b 的值.

分析 用韦达定理可求出关于方程根对称式的值,如 $x_1^2+x_2^2$、$\frac{1}{x_1+x_2}$、$x_1^3+x_2^3$ …,而本题 a^4+3b 并不对称,故应先将原式变形,由方程根的定义可得 $a^2-a-1=0$,即 $a^2=a+1$,因此有 $a^4=a^2+2a+1$ 代入得 $a^4+3b=a^2+2a+1+3b=3a+3b+2=3(a+b)+2$,再由韦达定理解之.

解 $\because$ a 是方程 $x^2-x-1=0$ 的根,　$\therefore$　$a^2-a-1=0$.

$\because\ a^2=a+1$,$\therefore\ a^4=a^2+2a+1=3a+2$.

$\therefore\ a^4+3b=3(a+b)+2$. $\because$ a,b 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两根.

$\therefore\ a+b=1$,$\therefore\ a^4+3b=3\times1+2=5$.

评注 此解法的关键在于灵活运用方程根的定义,将代数式变形为含有两根之和,创造出应用韦达定理的条件.

例 5 已知 $x^2-ax+3-b=0$ 有两个不相等的实数根，$x^2+(6-a)x+6-b=0$ 有两个相等的实数根，$x^2+(4-a)x+5-b=0$ 没有实数根，则 a、b 的取值范围是(　　). (1996 年江苏省试题)

A. $2<a<4$ ，$2<b<5$　　B. $1<a<4$ ，$2<b<5$

C. $1<a<4$ ，$1<b<5$　　D. $2<a<4$ ，$1<b<5$

分析 本题已知根的情况，应充分利用到判别式来确定 a、b 应满足的条件，从而最终确定 a,b 的取值范围.

解 由 $x^2-ax+3-b=0$ 有两个不相等的实数根

$\therefore\ \triangle_1=(-a)^2-4(3-b)>0$,

即 $a^2+4b-12>0$.　　①

由 $x^2+(6-a)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实根

$\therefore\ \triangle_2=(6-a)^2-4(6-b)=0$,

即 $a^2-12a+12+4b=0$.　　②

由 $x^2+(4-a)x+(5-b)=0$ 没有实数根

$\therefore\ \triangle_3=(4-a)^2-4(5-b)<0$,

即 $a^2-8a+4b-4<0$.　　③

将②代入①和③得，$a>2$，$a<4$，$\therefore\ 2<a<4$

由 $b=-\frac{1}{4}[(a-6)^2-24]=-\frac{1}{4}(a-6)^2+6$

又 $\because\ 2<a<4<6$，当 $a=2$ 时，$b_{min}=2$；当 $a=4$ 时，$b_{max}=5$.

故 $2<b<5$，

答案选 A.

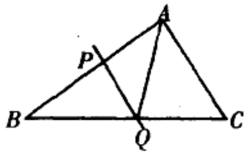
评注 本题除利用到判别式外，还需应用二次函数在某一区间上的极值问题.

例 6 已知 $\triangle ABC$ 与平行于 AC 的直线 PQ 相交，且 $\triangle APQ$ 的面积等于定值 k^2，那么当 k^2 与 $\triangle ABC$ 的面积 S 之间满足什么关系时问题有解？有多少解？

分析 有关面积比问题主要有两类：相似三角形的面积比等

于相似比的平方;同底(高)或等底(高)的三角形面积比等于高(底)之比.本题通过构造一元二次方程利用判别式解之.

解 设$\frac{BP}{AB}=x$, $\because PQ/\!/AC$,



$\therefore \triangle BPQ \sim \triangle BAC$.

$\therefore S_{\triangle BPQ}=x^2S_{\triangle ABC}=x^2S$.

$\because \frac{BQ}{BC}=\frac{BP}{BA}=x$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=xS_{\triangle ABC}=xS$.

从而 $xS-x^2S=k^2$,

即 $Sx^2-Sx+k^2=0$.

此方程有实数解的条件是$\Delta=S^2-sk\geqslant 0$,即 $S\geqslant 4k^2$.

又知方程两根 x_1,x_2 必须满足 $0<x_1<1,0<x_2<1$,从而

$x_1+x_2=1$,

$x_1\cdot x_2=\frac{k^2}{s}<1$,即 $s>k^2$.

$\therefore$ 当 $s>k^4$ 时,此题有两解;

$\therefore$ 当 $s=k^4$ 时,此题有一解.

评注 方程与平面几何的有机结合是中考与竞赛中常见题型,本题采用构造法解题,在后面的章节中还会作专题讲座,读者不妨体会一下.

例 7 求代数式$\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}$的取值范围.

分析 设原式为 y 整理成关于 x 的一元二次方程,再利用根的判别式可求出 y 的取值范围.

解 设 y=原式,去分母整理得

$(2y-1)x^2+2(y+1)x+(y+3)=0$.

$\because x$ 是实数,

$\therefore \Delta=4(y+1)^2-4(2y-1)(y+3)\geqslant 0$.

即 $y^2+3y-4\leqslant 0$， $(y+4)(y-1)\leqslant 0$.

$\therefore \begin{cases} y+4\geqslant 0, \\ y-1\leqslant 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y+4\leqslant 0, \\ y-1\geqslant 0. \end{cases}$

$\therefore -4\leqslant y\leqslant 1.$

得 $-4\leqslant \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}\leqslant 1.$

评注 利用判别式来确定某些特殊形式的代数式的取值范围，是判别式的又一重要作用.

例 8 设 a、b、c 为互不相等的非零实数，求证方程

$$\begin{cases} ax^2+2bx+c=0, \\ bx^2+2cx+a=0, \\ cx^2+2ax+b=0 \end{cases}$$

不可能都有两个相等的实数根.(1997 年山东试题)

分析 本题采用反证法，假设三个方程都用相等实根，从而导出令已知条件相矛盾的结论.

证明 (反证法)

设三个方程同时有相等的实数根，即

$$\triangle_1=4b^2-4ac=0,$$
$$\triangle_2=4c^2-4ab=0,$$
$$\triangle_3=4a^2-4bc=0,$$

三式相加得 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0,$

$$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$$

$\therefore a=b=c$ 这和已知 a、b、c 不会相等相矛盾.

故题中的三个方程不可能都有两个相等的实根.

评注 另解，设三个方程的判别式分别为 $\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$，由于 a、b、c 不会相等，得 $\triangle_1+\triangle_2+\triangle_3$

$$=4(b^2-ac)+4(c^2-ab)+4(a^2-bc)$$

$=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]>0.$

$\therefore$ Δ_1、Δ_2、Δ_3 中至少有一个大于 0，即至少有一个方程有两个不等实数根.所以三个方程不可能都有两个相等的实数根.

例 9 已知 a,b 是一元二次方程 $t^2-t-1=0$ 的两个实根，解方程

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1+x, & ①\\[2ex] \dfrac{x}{b}+\dfrac{x}{a}=1+y. & ②\end{cases}$$

（第十届祝杯赛）

解 $\because$ a,b 是方程 $t^2-t-1=0$ 的两个实根，

$\therefore$ $a+b=1,ab=-1.$

将①,②的左边乘以 ab，右边乘以-1，得

$$\begin{cases}bx+ay=-(1+x), & ③\\ ax+by=-(1+y). & ④\end{cases}$$

③+④得 $x+y=-1$，即 $y=-(x+1)$代入③得

$(b-a+1)x=a-1,$

$\therefore$ $2bx=-b$，$\therefore$ $x=-\dfrac{1}{2}$ ，$\therefore$ $y=-\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ 方程的解为 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\[2ex] y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

例 10 已知实数 x、y、z 要满足 $x+y+z=a,x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2}{2}$.（$a>0$）

求证:$0\leqslant x,y,z\leqslant\dfrac{2}{3}a$.

分析 x、y、z 要满足两个对称方程，可采用构造一元二次方程的方法，利用判别式确定其中一个字母的取值范围.

证明 由 $x+y+z=a$ 得 $x+y=a-z$.

$\therefore x^2+y^2+2xy=a^2-2az+z^2$.

$\because x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$,

$\therefore x^2+y^2=\frac{a^2}{2}-z^2$,

$\therefore \frac{a^2}{2}-z^2+2xy=a^2-2az+z^2$,

$\therefore xy=\frac{a^2}{4}-az+z^2$,

$\therefore xy$ 为方程 $t^2-(a-z)t+(\frac{a^2}{4}-az+z^2)=0$ 的两根.

$\because x,y$ 是实数，$\therefore \Delta\geqslant 0$.

即 $(a-z)^2-4(\frac{a^2}{4}-az+z^2)\geqslant 0$,

化简得 $3z^2-2az\leqslant 0$,

$\therefore 0\leqslant z\leqslant\frac{2a}{3}$.

同理 $0\leqslant x\leqslant\frac{2a}{3}$，$0\leqslant y\leqslant\frac{2a}{3}$,

$\therefore 0\leqslant x、y、z\leqslant\frac{2a}{3}$.

评论 因为 x,y,z 在条件中具有对称性，所以只证出其中任意一个符合结论，其余两个同理可证构造法解题是中学数学竞赛中重要方法之一，其构思巧妙，方法独到，是值得推广的好方法.

【巩固练习】

一、选择题

1. 若方程 $x^2-(a-3)x-3a-b^2=0$ 有两个等根，则方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根分别是(　　)

A. 0,3　　B. 0,−3

C. 1,4　　D. 1,−4