21世纪高等学校数学系列辅导教材

同济4版习题解析

考研试题分类详解

高等数学题典（上册）

COLLEGE MATHMATICS

黄光谷 邓泽清 夏敏学 方金华 编

湖南大学出版社

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

高等数学题典（上册）

黄光谷　邓泽清
夏敏学　方金华　编

湖南大学出版社
2001年·长沙

内容提要

本书是《高等数学题典》(上册),内容以原国家教委颁布的《高等数学课程教学基本要求》为依据,上册包括函数与极限,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,微分方程共七章,各章(节)分为四个梯级,即对同济编高等数学第四版与黄光谷等编的高等数学、华东师大编数学分析、历年全国硕士生入学试题进行了分类精选与详解.

本书可供各工科、理科、农林、财经各专业学生、教师、自学者作为高等数学(或微积分)的教学参考书,也适宜作为备考硕士研究生的复习资料.

高等数学题典(上册)

Gaodeng Shuxue Tidian (Shang Ce)

黄光谷 邓泽清
夏敏学 方金华 编

□责任编辑 李 刚 王海鹰

□封面设计 叶中景

□出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731-8821691 0731-8821315

□经 销 湖南省新华书店

□印 装 湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本 850×1168 32开 □印张 15.75 □字数 380千

□版次 2000年10月第1版 □2001年9月第2次印刷

□印数 5 001—10 000册

□书号 ISBN 7-81053-328-2/O·15

□定价 18.80元

前　言

高等数学是工、理、农、林、财经等各科院校的一门重点基础课，内容多、进度快，初学者不能适应，特别在做题方面感到困难重重，本书就是为了帮助解决读者在做题方面的困难而编写的.

编写本书以原国家教委颁布的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》为依据选题，每个章（节）包括有代表性的四大部分：一、同济大学编第4版《高等数学》（上、下册）[1]习题选解；二、湖北科技社第1版《高等数学Ⅰ》（本科用，上、下册）[2]习题选解；三、华东师大编第1、2版《数学分析》（上、下册）[3]中符合工科《教学基本要求》的习题选解①；四、历年全国统一的硕士研究生入学的分类试题选解[4]。本书选题以中难度以上为主，目录和章节划分以[1]（即同济编第4版）为准；每个题号前未标记号者取自[1]（即同济编4版）；题号前标有△符号者取自[2]（即鄂版高数Ⅰ）；标＊号者取自[3]（即华东师大编数学分析）；标∘号者取自[4]（即历年研究生入学试题解），且在题号后加括号标有年号，系指取自该年的全国硕士研究生入学试题（一）。每个题号有三个数字，例如△1-1-1，系指湖北科技版高等数学Ⅰ第一章第一讲第1题；而＊1-总-1系指华东师大编第一章总练习题第1题，∘1-1-五（1999）系指内容与同济编4版第一章第一节相符的1999年研究生试题（一）的第五题；其余类似.

为了与同济大学新编《微积分》教材[7]配套使用，本书将第十二章“微分方程”放入上册；将“空间解析几何”一章放到了下册.

本书名《题典》，是介于《题解》与《辞典》之间的辅助读物，是精

① 为了接近工科教学基本要求，本书第一章中“选解三”是取自[3]的第1版，标记$*_1$，其余各章标$*_1$者亦为[3]的第1版；标＊者为第2版.

选的辞典和题解，具有代表性、可读性、资料性等特点．编写本书的方式与体例是一种尝试．由于我们水平所限，加上时间仓促，书中可能有缺点或错误，欢迎读者提出宝贵意见，以便再版时修改．

本书上、下册由黄光谷教授、李相朋副教授主编．李美珍、黄青、李杨、蔡晓美等同志也参加了本书上册的编写工作，在此一并致谢！

编写本书得到武汉松联环球电脑信息有限公司、湖南大学出版社的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

编　者

2000年4月

目　　次

第三章　中值定理与导数的应用

第四章　不定积分

第五章　定积分

第一章　函数与极限

第一节　函数

一　高等数学习题选解

1-1-3.　下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1)　$f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$；

(2)　$f(x)=x$，　$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3)　$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

答　(1)　不相同.因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；而 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，它们不相同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数.

(2)　不相同.因为 $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，它们的对应法则不相同，从而值域也不相同.例如

$$f(-1)=-1\neq g(-1)=1.$$

(3)　相同.因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同，都是 $\mathbf{R}$；对应法则也相同，所以

$$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}=x\sqrt[3]{x-1}=g(x).$$

1-1-8.　设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\pi/3,\\ 0, & |x|\geqslant\pi/3,\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解　$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$；　$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \varphi(-2)=0.$$

$y=\varphi(x)$的图形如图 1-1 所示.

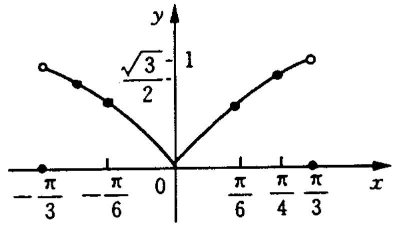

图 1-1

1-1-10. 设 $f(x)=2x^2+6x-3$,求

$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$及

$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,

并指出 $\varphi(x)$及 $\psi(x)$中哪个是奇函数哪个是偶函数?

解 $f(-x)=2x^2-6x-3$,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[2x^2+6x-3+(2x^2-6x-3)]$$

$$=2x^2-3.$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[2x^2+6x-3-(2x^2-6x-3)]=6x,$$

因为 $\varphi(-x)=2x^2-3=\varphi(x)$, $\psi(-x)=-6x=-\psi(x)$,

所以 $\varphi(x)$是偶函数;$\psi(x)$是奇函数.

1-1-11. (3)证明:定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证明 设 $f(x)$是定义在$(-l,l)$内的任意函数,设

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

则

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x). \qquad ①$$

因为

$$\varphi(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\varphi(x),$$

$$\psi(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\psi(x),$$

所以 $\varphi(x)$是偶函数,而 $\psi(x)$是奇函数. 由①知,定义在$(-l,l)$内的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数之和,得证.

1-1-13. 设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若 $f(x)$在

$(0,l)$内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证明 $\forall x_1、x_2 \in (-l,0)$，且不妨设 $x_1<x_2$，则 $-x_1、-x_2\in(0,l)$，且 $-x_1>-x_2$. 由题设单调性，知

$$f(-x_1) > f(-x_2);$$

又由题设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内为奇函数，有

$$f(-x_1) = -f(x_1), \quad f(-x_2) = -f(x_2),$$

$$-f(x_1)>-f(x_2),$$

$$f(x_1)<f(x_2),$$

这就证明了 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

1-1-15. 求下列函数的反函数：(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$.

解 由题设函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解出 $x=y^3-1$，记 x 为自变量、y 为因变量，得反函数为

$$y = x^3 - 1 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

1-1-16. 对于函数 $f(x)=x^2$，如何选择邻域 $U(0,\delta)$ 的半径 δ，就能使与任一 $x\in U(0,\delta)$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都在邻域 $U(0,2)$ 内？

答 欲使 $f(x)=x^2\in U(0,2)$，即

$$-2 < x^2 < 2, \quad 又 \quad x^2 \geqslant 0,$$

只要 $$0\leqslant x^2<2，即 \quad 0\leqslant |x| < \sqrt{2},$$

所以只要取 $\delta\leqslant\sqrt{2}$ 作为邻域 $U(0,\delta)$ 的半径，就可使

$$f(x) \in U(0,2).$$

注 本题使用了分析倒推的逆向思考和推导的方法，这是今后常用的分析倒推之法.

1-1-17. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在数集 X 上既有上界又有下界.

证明 必要性. 设 $f(x)$ 在 X 上有界，则 $\exists\, M>0$，使

$$|f(x)| \leqslant M, \quad x \in X,$$

即 $$-M\leqslant f(x)\leqslant M, \quad x\in X,$$

可以$-M$作为$f(x)$在X上的一个下界，M作为$f(x)$在X上的一个上界，故$f(x)$在X上即有上界又有下界，必要性得证.

充分性 设m与M分别是$f(x)$在X上的一个下界与上界，即有

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in X,$$

记$K=\max\{|m|,|M|\}$，则有

$$-K \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant K, x \in X,$$

即$\exists K>0$，使得

$$|f(x)| \leqslant K, x \in X,$$

这说明$f(x)$在X上有界，充分性得证.

二　高等数学 I 习题选解

△**1-1-3.** 求下列各函数的定义域：

(5) $y=\ln(x^2-4)+\sqrt{3-x}$；　(6) $y=\sqrt{(4-x^2)(1-x^2)}$.

解 (5) $\begin{cases}x^2-4>0,\\3-x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|>2,\\x\leqslant 3\end{cases}\Rightarrow x<-2$ 及 $2<x\leqslant 3$，

定义域为$(-\infty,-2)\cup(2,3]$.

(6) $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}$和$\begin{cases}4-x^2\leqslant 0,\\1-x^2\leqslant 0\end{cases}\Longrightarrow |x|\leqslant 1$ 及 $|x|\geqslant 2$，

定义域为$(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$.

△**1-1-5.** 一正圆锥形容器其底朝上，底面直径与母线长都是$2a$，它里面所装液体的体积V是液体高度h的函数，写出这个函数的表达式.

解 如图 1-2，设液面半径为r，则

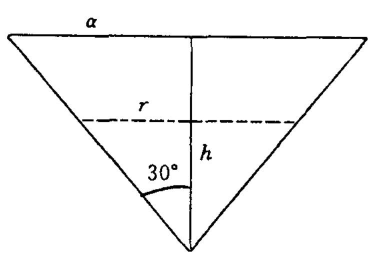

图 1-2

$$r=h\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}h,$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{9}\pi h^3.$$

△ **1-1-6.** **证明:(1)两个奇(偶)函数之和仍是奇(偶)函数;**

(2)两个奇(偶)函数之积都是偶函数;

(3)奇函数与偶函数之积是奇函数.

证明 设在某个以原点为对称中心的区间$[-l,l]$上,$f_{1,2}(x)$为奇函数,$g_{1,2}(x)$为偶函数,即有

$$f_{1,2}(-x)=-f_{1,2}(x),$$

$$g_{1,2}(-x)=g_{1,2}(x),\quad x\in[-l,l].$$

(1) 因为 $f_1(-x)+f_2(-x)=-[f_1(x)+f_2(x)]$,

$$g_1(-x)+g_2(-x)=g_1(x)+g_2(x),$$

所以奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数.

(2) 因为 $f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$,

$$g_1(-x)\cdot g_2(-x)=g_1(x)\cdot g_2(x),$$

所以两个奇(偶)函数之积都是偶函数.

(3) 因为 $f_1(-x)\cdot g_1(-x)=-f_1(x)\cdot g_1(x)$,

所以奇函数与偶函数之积是奇函数.

△**1-1-12.** **跳伞运动员在 t_0 秒内自由降落,然后打开降落伞,并按速度 v 米/秒降落 t_1 秒,试把他所经过的路程表成时间的函数.**

解 当 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 时,为自由落体运动,路程

$$S=\frac{1}{2}gt^2;$$

当 $t_0<t\leqslant t_0+t_1$ 时,按匀速运动路程公式计算:

$$S=\frac{1}{2}gt^2+v(t-t_0),$$

故 $S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}gt^2, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_0 \text{ 时;}\\ \dfrac{1}{2}gt^2+v(t-t_0), & \text{当 } t_0<t\leqslant t_0+t_1 \text{ 时.}\end{cases}$

△**1-1-14.** 求线性函数 $f(x)$,使 $f(0)=-2, f(3)=5$;并求 $f(1)$ 及 $f(2)$(线性插补).

解 设 $y=f(x)=ax+b$,代入$(0,-2)$,$(3,5)$,得

$$b=-2,\quad 5=3a-2,\quad a=7/3,$$

故

$$y=\frac{7}{3}x-2.$$

而 $f(1)=\dfrac{7}{3}-2=\dfrac{1}{3}$,

$f(2)=\dfrac{14}{3}-2=\dfrac{8}{3}$.

三 数学分析习题选解

$*_1$ **1-1-3.** 根据图 1-3 写出定义在$[0,1]$上的函数 $f_1(x)$ 与$f_2(x)$的解析表示式.

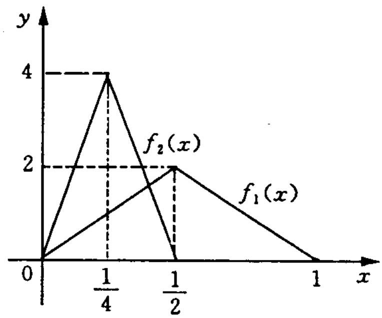

图 1-3

解 利用平面上直线的点斜式方程或两点式方程,易知:

$$f_1(x)=\begin{cases}4x, & 0\leqslant x\leqslant 1/2;\\ 4-4x, & 1/2<x\leqslant 1.\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}16x, & 0\leqslant x\leqslant 1/4;\\ 8-16x, & 1/4<x\leqslant 1/2;\\ 0, & 1/2<x\leqslant 1.\end{cases}$$

$*_1$ **1-1-5.** 设函数

$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0;\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 求 (2)$f(\Delta x)-f(0)$,

$f(-\Delta x)-f(0)(\Delta x>0)$.

解 $f(0)=2$，$f(\Delta x)=2^{\Delta x}$，$f(-\Delta x)=2-\Delta x$，

$$f(\Delta x)-f(0)=2^{\Delta x}-2,\quad f(-\Delta x)-f(0)=-\Delta x.$$

$*_{1}$ **1-1-8.** 一个三级火箭，各级质量分别为 8000，4000，2000kg，设燃料消耗率均为 10kg/s，各级火箭燃烧时间分别为 600，300，150 秒，每级火箭的燃料燃烧尽后，外壳自行脱落，下一级火箭就自行燃烧，最后一级火箭成为人造卫星，绕地球运行. 试写出火箭质量随时间的变化规律，并画出图象.

解 依题意，质量随时间的变化规律为

$$m(t)=\begin{cases}14000-10t, & t\in[0,600);\\ 6000-10(t-600), & t\in[600,900);\\ 2000-10(t-900), & t\in[900,1050);\\ 500, & t\in[1050,+\infty).\end{cases}$$

其图象如图 1-4 所示.

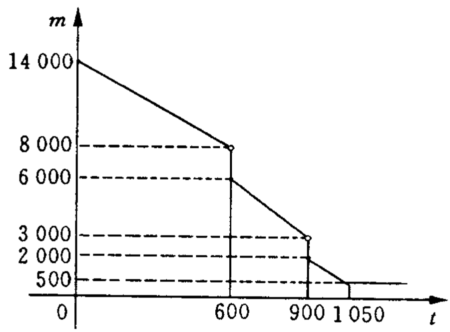

图 1-4

$*_{1}$ **1-2-4.** 求下列函数的周期：

(1) $y=\cos^2 x$；

(2) $y=2\tan 3x$.

解 (1) $y=\cos^2 x$

$=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x.$

因为 $\cos 2x$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$；而常数 1 以任何正数为周期，又乘以常数 1/2 周期不变. 所以 $\cos^2 x$ 的周期为 1 与 $\cos 2x$ 周期的最小公倍数，即为 π.

(2) $y=2\tan 3x$ 的周期为 $\pi/3$.

$*_{1}$ **1-2-7.** 讨论狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, 当 x 为有理数时,\\ 0, 当 x 为无理数时\end{cases}$$

的周期性与有界性.

解 $\forall\ r$(有理数)>0,因为$\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$,都有

$$D(x+r)=\begin{cases}1, 当 x 为有理数时,\\ 0, 当 x 为无理数时\end{cases}=D(x),$$

所以任何正有理数 r 都是 $D(x)$的周期. 但 $r>0$ 没有最小正有理数,故 $D(x)$没有最小正周期,即没有基本周期.

$\forall\ \alpha$(无理数)>0,记 $x_0=-\alpha$,显见 $D(x_0)=0$,但

$$D(x_0+\alpha)=D(0)=1\neq D(x_0),$$

这说明任何无理数都不是 $D(x)$的周期.

综上所述,$D(x)$是周期函数,任何正有理数都是 $D(x)$的周期,但它没有基本周期.

再看 $D(x)$的有界性. 显见$\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$,都有

$$|D(x)|\leqslant 1 \triangleq M,$$

所以 $D(x)$是有界函数.

注 在证明无理数 α 不是 $D(x)$的周期时,只须找到一个反例 x_0,使 $D(x_0+\alpha)\neq D(x_0)$;并不需要对于一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,都使得 $D(x+\alpha)\neq D(x)$.

$*_1$ **1-3-3.** 若 $\varphi(t)=t^3+1$,求 $\varphi(x^2)$,$[\varphi(x)]^2$,$\varphi[\varphi(x)]$及 $\varphi\left[\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]$.

解 $\varphi(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1$;

$$[\varphi(x)]^2=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1;$$

$$\varphi[\varphi(x)]=(x^3+1)^3+1=x^9+3x^6+3x^3+2;$$

$$\varphi\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]=\left(\frac{1}{x^3+1}\right)^3+1.$$

$*_1$ **1-3-8.** 下列函数是由哪些函数复合而成的?

(2) $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$; (3) $y=\log_a\sin e^{x+1}(a>0,a$

$\neq 1$).

解 (2) $y=u^2, u=\arcsin v, v=\sqrt{w}, w=1-x^2$.

(3) $y=\log_a u, u=\sin v, v=e^w, w=x+1$.

第二节 初等函数

一 高等数学习题选解

1-2-4. 设 $F(x)=e^x$,证明:

(1) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$; (2) $\dfrac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$.

证明 【利用指数函数的性质证之】

(1) $F(x)\cdot F(y)=e^x\cdot e^y=e^{x+y}=F(x+y)$;

(2) $\dfrac{F(x)}{F(y)}=\dfrac{e^x}{e^y}=e^x\cdot e^{-y}=e^{x-y}=F(x-y)$.

1-2-6. 利用 $y=\sin x$ 的图形,作出下列函数的图形:

(1) $y=\dfrac{1}{2}+\sin x$; (2) $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$;

(3) $y=3\sin x$; (4) $y=\sin 2x$;

(5) $y=3\sin(2x+\dfrac{2}{3}\pi)$.

解 (1) $y=\dfrac{1}{2}+\sin x$ 的图形可由 $y=\sin x$ 的图形向上平移(或横轴向下平移)1/2 个单位而得.其图形如图 1-5(1)所示.类似地,可得 $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$, $y=3\sin x$, $y=\sin 2x$ 的图形,它们的图形分别如图 1-5(2)、(3)、(4)所示.

(5) $y=3\sin[2(x+\dfrac{\pi}{3})]$,其图形如图 1-5(5)所示,可由 $y=\sin x$ 的图形经下列三个步骤的变换而得:

1°如(4)所示,缩小周期为 π,得 $y=\sin 2x$ 的图形;