

21世纪高等学校数学系列辅导教材

同济4版习题解析
考研试题分类详解

高等数学

题典(上册)

COLLEGE MATHEMATICS

黄光谷 邓泽清 编
夏敏学 方金华

湖南大学出版社

面向 21 世纪高等学校数学系列辅导教材

高等数学题典(上册)

黄光谷 邓泽清 编
夏敏学 方金华

湖南大学出版社

2001 年·长沙

内 容 提 要

本书是《高等数学题典》(上册),内容以原国家教委颁布的《高等数学课程教学基本要求》为依据,上册包括函数与极限,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,微分方程共七章,各章(节)分为四个梯级,即对同济编高等数学第四版与黄光谷等编的高等数学、华东师大编数学分析、历年全国硕士生入学试题进行了分类精选与详解.

本书可供各工科、理科、农林、财经各专业学生、教师、自学者作为高等数学(或微积分)的教学参考书,也适宜作为备考硕士研究生的复习资料.

高等数学题典(上册)

Gaodeng Shuxue Tidian (Shang Ce)

黄光谷 邓泽清

编

夏敏学 方金华

责任编辑 李 刚 王海鹰

封面设计 叶中景

出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731-8821691 0731-8821315

经 销 湖南省新华书店

印 装 湖南航天长宇印刷有限责任公司

开本 850×1168 32开 印张 15.75 字数 380千

版次 2000年10月第1版 2001年9月第2次印刷

印数 5 001—10 000册

书号 ISBN 7-81053-328-2/O·15

定价 18.80元

(湖南大学版图书凡有印装差错,请向承印厂调换)

前 言

高等数学是工、理、农、林、财经等各科院校的一门重点基础课,内容多、进度快,初学者不能适应,特别在做题方面感到困难重重,本书就是为了帮助解决读者在做题方面的困难而编写的。

编写本书以原国家教委颁布的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》为依据选题,每个章(节)包括有代表性的四大部分:一、同济大学编第4版《高等数学》(上、下册)^[1]习题选解;二、湖北科技社第1版《高等数学 I》(本科用,上、下册)^[2]习题选解;三、华东师大编第1、2版《数学分析》(上、下册)^[3]中符合工科《教学基本要求》的习题选解^①;四、历年全国统一的硕士研究生入学的分类试题选解^[4]。本书选题以中难度以上为主,目录和章节划分以[1](即同济编第4版)为准;每个题号前未标记号者取自[1](即同济编4版);题号前标有 \wedge 符号者取自[2](即鄂版高数 I);标*号者取自[3](即华东师大编数学分析);标 \circ 号者取自[4](即历年研究生入学试题解),且在题号后加括号标有年号,系指取自该年的全国硕士研究生入学试题(一)。每个题号有三个数字,例如 $\wedge 1-1-1$,系指湖北科技版高等数学 I 第一章第一讲第1题;而*1-总-1系指华东师大编第一章总练习题第1题, $\circ 1-1-五(1999)$ 系指内容与同济编4版第一章第一节相符的1999年研究生试题(一)的第五题;其余类似。

为了与同济大学新编《微积分》教材[7]配套使用,本书将第十二章“微分方程”放入上册;将“空间解析几何”一章放到了下册。

本书名《题典》,是介于《题解》与《辞典》之间的辅助读物,是精

^① 为了接近工科教学基本要求,本书第一章中“选解三”是取自[3]的第1版,标记*,其余各章标*,者亦为[3]的第1版;标*者为第2版。

选的辞典和题解,具有代表性、可读性、资料性等特点.编写本书的方式与体例是一种尝试.由于我们水平所限,加上时间仓促,书中可能有缺点或错误,欢迎读者提出宝贵意见,以便再版时修改.

本书上、下册由黄光谷教授、李相朋副教授主编.李美珍、黄青、李杨、蔡晓美等同志也参加了本书上册的编写工作,在此一并致谢!

编写本书得到武汉松联环球电脑信息有限公司、湖南大学出版社的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢!

编 者
2000年4月

目 次

第一章 函数与极限

第一节 函数	(1)
第二节 初等函数	(9)
第三节 数列的极限	(20)
第四节 函数的极限	(34)
第五节 无穷小与无穷大	(40)
第六节 极限运算法则	(46)
第七节 极限存在准则与两个重要极限	(51)
第八节 无穷小的比较	(56)
第九节 函数的连续性与间断点	(60)
第十节 连续函数的运算与初等函数的连续性	(64)
第十一节 闭区间上连续函数的性质	(68)
总习题选解(一)	(72)
研究生入学试题选解(一)	(82)

第二章 导数与微分

第一节 导数概念	(85)
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则	(91)
第三节 反函数的导数 复合函数的求导法则	(96)
第四节 初等函数的求导问题、双曲函数与反双曲函数的导数	(101)
第五节 高阶导数	(104)
第六节 隐函数的导数、由参数方程所确定的函数、相关变化率	(111)
第七节 函数的微分	(119)
第八节 微分在近似计算中的应用	(125)
总习题选解(二)	(130)
研究生入学试题选解(二)	(140)

第三章 中值定理与导数的应用

第一节 中值定理	(145)
第二节 洛必达法则	(157)
第三节 泰勒公式	(162)
第四节 函数单调性的判定法	(168)
第五节 函数的极值及其求法	(176)
第六节 最大值、最小值问题	(180)
第七节 函数的凹凸与拐点	(189)
第八节 函数图形的描绘	(197)
第九节 曲率	(201)
第十节 方程的近似解	(204)
总习题选解(三)	(208)
研究生入学试题选解(三)	(220)

第四章 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质	(229)
第二节 换元积分法	(234)
第三节 分部积分法	(244)
第四节 几种特殊类型函数的积分	(252)
第五节 积分表的使用	(263)
总习题选解(四)	(264)
研究生入学试题选解(四)	(279)

第五章 定积分

第一节 定积分概念	(282)
第二节 定积分的性质 中值定理	(285)
第三节 微积分基本公式	(290)
第四节 定积分的换元法	(298)
第五节 定积分的分部积分法	(306)
第六节 定积分的近似计算	(312)
第七节 广义积分	(314)
第八节 广义积分的审敛法 Γ -函数	(322)
总习题选解(五)	(330)

研究生入学试题选解(五)	(343)
第六章 定积分的应用	
第一节 定积分的元素法(略)	(353)
第二节 平面图形的面积	(362)
第三节 体积	(362)
第四节 平面曲线的弧长	(369)
第五节 功 水压力和引力	(374)
第六节 平均值	(374)
总习题选解(六)	(382)
研究生入学试题选解(六)	(392)
第七章 微分方程	
第一节 微分方程的基本概念	(397)
第二节 可分离变量的微分方程	(399)
第三节 齐次微分方程	(406)
第四节 一阶线性微分方程	(411)
第五节 全微分方程	(419)
* 第六节 欧拉-柯西近似法(略)	(424)
第七节 可降阶的高阶微分方程	(424)
第八节 高阶线性微分方程	(433)
第九节 二阶常系数齐次线性微分方程	(443)
第十节 二阶常系数非齐次线性微分方程	(447)
* 第十一节 欧拉方程	(457)
第十二节 微分方程的幂级数解法(七)	(459)
* 第十三节 常系数线性微分方程组解法举例	(463)
总习题选解(七)	(470)
研究生入学试题选解(七)	(484)
参考文献	(495)

第一章 函数与极限

第一节 函数

一 高等数学习题选解

1-1-3. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2\lg x$;

(2) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x \sqrt[3]{x - 1}$.

答 (1) 不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; 而 $g(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 它们不相同, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数.

(2) 不相同. 因为 $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, 它们的对应法则不相同, 从而值域也不相同. 例如

$$f(-1) = -1 \neq g(-1) = 1.$$

(3) 相同. 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同, 都是 \mathbf{R} ; 对应法则也相同, 所以

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3} = x \sqrt[3]{x - 1} = g(x).$$

1-1-8. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \pi/3, \\ 0, & |x| \geq \pi/3, \end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$, 并作出 $y = \varphi(x)$ 的图形.

解 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}$; $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \varphi(-2) = 0.$$

$y = \varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

1-1-10. 设 $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$, 求

$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ 及

$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$,

并指出 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 中哪个是奇函数哪个是偶函数?

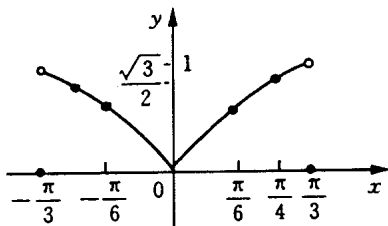


图 1-1

解 $f(-x) = 2x^2 - 6x - 3$,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2}[2x^2 + 6x - 3 + (2x^2 - 6x - 3)] \\ &= 2x^2 - 3.\end{aligned}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[2x^2 + 6x - 3 - (2x^2 - 6x - 3)] = 6x,$$

因为 $\varphi(-x) = 2x^2 - 3 = \varphi(x)$, $\psi(-x) = -6x = -\psi(x)$,
所以 $\varphi(x)$ 是偶函数; $\psi(x)$ 是奇函数.

1-1-11. (3) 证明: 定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证明 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l, l)$ 内的任意函数, 设

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

则 $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. ①

因为 $\varphi(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \varphi(x)$,

$$\psi(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\psi(x),$$

所以 $\varphi(x)$ 是偶函数, 而 $\psi(x)$ 是奇函数. 由①知, 定义在 $(-l, l)$ 内的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数之和, 得证.

1-1-13. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在

$(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证明 $\forall x_1, x_2 \in (-l, 0)$, 且不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$, 且 $-x_1 > -x_2$. 由题设单调性, 知

$$f(-x_1) > f(-x_2);$$

又由题设 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内为奇函数, 有

$$f(-x_1) = -f(x_1), \quad f(-x_2) = -f(x_2),$$

$$-f(x_1) > -f(x_2),$$

$$f(x_1) < f(x_2),$$

这就证明了 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

1-1-15. 求下列函数的反函数: (1) $y = \sqrt[3]{x+1}$.

解 由题设函数 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 解出 $x = y^3 - 1$, 记 x 为自变量、 y 为因变量, 得反函数为

$$y = x^3 - 1 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

1-1-16. 对于函数 $f(x) = x^2$, 如何选择邻域 $U(0, \delta)$ 的半径 δ , 就能使与任一 $x \in U(0, \delta)$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都在邻域 $U(0, 2)$ 内?

答 欲使 $f(x) = x^2 \in U(0, 2)$, 即

$$-2 < x^2 < 2, \quad \text{又} \quad x^2 \geq 0,$$

只要 $0 \leq x^2 < 2$, 即 $0 \leq |x| < \sqrt{2}$,

所以只要取 $\delta \leq \sqrt{2}$ 作为邻域 $U(0, \delta)$ 的半径, 就可使

$$f(x) \in U(0, 2).$$

注 本题使用了分析倒推的逆向思考和推导的方法, 这是今后常用的分析倒推之法.

1-1-17. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在数集 X 上既有上界又有下界.

证明 必要性. 设 $f(x)$ 在 X 上有界, 则 $\exists M > 0$, 使

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in X,$$

即

$$-M \leq f(x) \leq M, \quad x \in X,$$

可以 $-M$ 作为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界, M 作为 $f(x)$ 在 X 上的一个上界,故 $f(x)$ 在 X 上即有上界又有下界,必要性得证.

充分性 设 m 与 M 分别是 $f(x)$ 在 X 上的一个下界与上界,即有

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in X,$$

记 $K = \max\{|m|, |M|\}$,则有

$$-K \leq m \leq f(x) \leq M \leq K, \quad x \in X,$$

即 $\exists K > 0$,使得

$$|f(x)| \leq K, \quad x \in X,$$

这说明 $f(x)$ 在 X 上有界,充分性得证.

二 高等数学 I 习题选解

△ 1-1-3. 求下列各函数的定义域:

$$(5) \quad y = \ln(x^2 - 4) + \sqrt{3 - x}; \quad (6) \quad y = \sqrt{(4 - x^2)(1 - x^2)}.$$

解 (5) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| > 2, \\ x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x < -2 \quad \text{及} \quad 2 < x \leq 3,$

定义域为 $(-\infty, -2) \cup (2, 3]$.

$$(6) \quad \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} 4 - x^2 \leq 0, \\ 1 - x^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow |x| \leq 1 \quad \text{及} \quad |x| \geq 2,$$

定义域为 $(-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$.

△ 1-1-5. 一正圆锥形容器

其底朝上,底面直径与母线长都是 $2a$,它里面所装液体的体积 V 是液体高度 h 的函数,写出这个函数的表达式.

解 如图 1-2,设液面半径为 r ,则

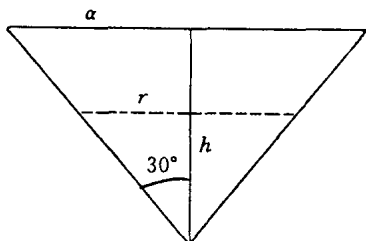


图 1-2

$$r = h \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} h,$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{9} \pi h^3.$$

- △ 1-1-6. 证明: (1) 两个奇(偶)函数之和仍是奇(偶)函数;
 (2) 两个奇(偶)函数之积都是偶函数;
 (3) 奇函数与偶函数之积是奇函数.

证明 设在某个以原点为对称中心的区间 $[-l, l]$ 上, $f_{1,2}(x)$ 为奇函数, $g_{1,2}(x)$ 为偶函数, 即有

$$f_{1,2}(-x) = -f_{1,2}(x),$$

$$g_{1,2}(-x) = g_{1,2}(x), \quad x \in [-l, l].$$

$$(1) \quad \text{因为 } f_1(-x) + f_2(-x) = -[f_1(x) + f_2(x)],$$

$$g_1(-x) + g_2(-x) = g_1(x) + g_2(x),$$

所以奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数.

$$(2) \quad \text{因为 } f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

$$g_1(-x) \cdot g_2(-x) = g_1(x) \cdot g_2(x),$$

所以两个奇(偶)函数之积都是偶函数.

$$(3) \quad \text{因为 } f_1(-x) \cdot g_1(-x) = -f_1(x) \cdot g_1(x),$$

所以奇函数与偶函数之积是奇函数.

△ 1-1-12. 跳伞运动员在 t_0 秒内自由降落, 然后打开降落伞, 并按速度 v 米/秒降落 t_1 秒, 试把他所经过的路程表成时间的函数.

解 当 $0 \leq t \leq t_0$ 时, 为自由落体运动, 路程

$$S = \frac{1}{2} g t^2;$$

当 $t_0 < t \leq t_0 + t_1$ 时, 按匀速运动路程公式计算:

$$S = \frac{1}{2} g t^2 + v(t - t_0),$$

$$\text{故 } S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}gt^2, & \text{当 } 0 \leq t \leq t_0 \text{ 时;} \\ \frac{1}{2}gt^2 + v(t - t_0), & \text{当 } t_0 < t \leq t_0 + t_1 \text{ 时.} \end{cases}$$

△1-1-14. 求线性函数 $f(x)$, 使 $f(0) = -2, f(3) = 5$; 并求 $f(1)$ 及 $f(2)$ (线性插补).

解 设 $y = f(x) = ax + b$, 代入 $(0, -2), (3, 5)$, 得

$$b = -2, \quad 5 = 3a - 2, \quad a = 7/3,$$

故
$$y = \frac{7}{3}x - 2.$$

而
$$f(1) = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3},$$

$$f(2) = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}.$$

三 数学分析习题选解

*₁ 1-1-3. 根据图 1-3 写出定义在 $[0, 1]$ 上的函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的解析表示式.

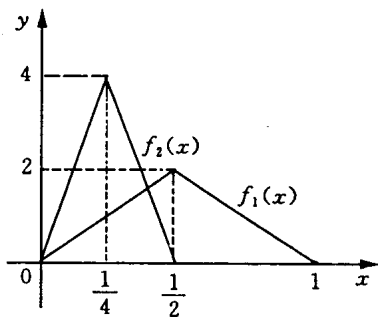


图 1-3

解 利用平面上直线的点斜式方程或两点式方程, 易知:

$$f_1(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 1/2; \\ 4 - 4x, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 16x, & 0 \leq x \leq 1/4; \\ 8 - 16x, & 1/4 < x \leq 1/2; \\ 0, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

*₁ 1-1-5. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 2+x, & x \leq 0; \\ 2^x, & x > 0, \end{cases} \quad \text{求 } (2) f(\Delta x) - f(0),$$

$$f(-\Delta x) - f(0) (\Delta x > 0).$$

$$\text{解 } f(0) = 2, \quad f(\Delta x) = 2^{\Delta x}, \quad f(-\Delta x) = 2 - \Delta x,$$

$$f(\Delta x) - f(0) = 2^{\Delta x} - 2, \quad f(-\Delta x) - f(0) = -\Delta x.$$

*₁ 1-1-8. 一个三级火箭, 各级质量分别为 8000, 4000, 2000kg, 设燃料消耗率均为 10kg/s, 各级火箭燃烧时间分别为 600, 300, 150 秒, 每级火箭的燃料燃烧完后, 外壳自行脱落, 下一级火箭就自行燃烧, 最后一级火箭成为人造卫星, 绕地球运行. 试写出火箭质量随时间的变化规律, 并画出图象.

解 依题意, 质量随时间的变化规律为

$$m(t) = \begin{cases} 14000 - 10t, & t \in [0, 600); \\ 6000 - 10(t - 600), & t \in [600, 900); \\ 2000 - 10(t - 900), & t \in [900, 1050); \\ 500, & t \in [1050, +\infty). \end{cases}$$

其图象如图 1-4 所示.

*₁ 1-2-4. 求下列函数的周期:

(1) $y = \cos^2 x$;

(2) $y = 2 \tan 3x$.

解 (1) $y = \cos^2 x$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

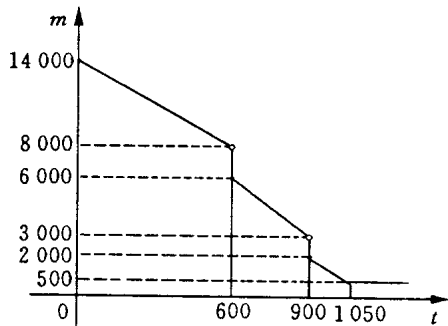


图 1-4

因为 $\cos 2x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{2} =$

π ; 而常数 1 以任何正数为周期, 又乘以常数 $1/2$ 周期不变, 所以 $\cos^2 x$ 的周期为 1 与 $\cos 2x$ 周期的最小公倍数, 即为 π .

(2) $y = 2 \tan 3x$ 的周期为 $\pi/3$.

*₁ 1-2-7. 讨论狄利克莱函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

的周期性与有界性.

解 $\forall r(\text{有理数}) > 0$, 因为 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$D(x+r) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases} = D(x),$$

所以任何正有理数 r 都是 $D(x)$ 的周期. 但 $r > 0$ 没有最小正有理数, 故 $D(x)$ 没有最小正周期, 即没有基本周期.

$\forall \alpha(\text{无理数}) > 0$, 记 $x_0 = -\alpha$, 显见 $D(x_0) = 0$, 但

$$D(x_0 + \alpha) = D(0) = 1 \neq D(x_0),$$

这说明任何无理数都不是 $D(x)$ 的周期.

综上所述, $D(x)$ 是周期函数, 任何正有理数都是 $D(x)$ 的周期, 但它没有基本周期.

再看 $D(x)$ 的有界性. 显见 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$|D(x)| \leq 1 \triangleq M,$$

所以 $D(x)$ 是有界函数.

注 在证明无理数 α 不是 $D(x)$ 的周期时, 只须找到一个反例 x_0 , 使 $D(x_0 + \alpha) \neq D(x_0)$; 并不需要对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都使得 $D(x + \alpha) \neq D(x)$.

* 1-3-3. 若 $\varphi(t) = t^3 + 1$, 求 $\varphi(x^2)$, $[\varphi(x)]^2$, $\varphi[\varphi(x)]$ 及 $\varphi\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]$.

解 $\varphi(x^2) = (x^2)^3 + 1 = x^6 + 1$;

$$[\varphi(x)]^2 = (x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1$$
;

$$\varphi[\varphi(x)] = (x^3 + 1)^3 + 1 = x^9 + 3x^6 + 3x^3 + 2$$
;

$$\varphi\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right] = \left(\frac{1}{x^3 + 1}\right)^3 + 1.$$

* 1-3-8. 下列函数是由哪些函数复合而成的?

(2) $y = (\arcsin \sqrt{1-x^2})^2$; (3) $y = \log_a \sin e^{x+1}$ ($a > 0, a$

≠1).

解 (2) $y=u^2, u=\arcsin v, v=\sqrt{w}, w=1-x^2$.

(3) $y=\log_a u, u=\sin v, v=e^w, w=x+1$.

第二节 初等函数

一 高等数学习题选解

1-2-4. 设 $F(x)=e^x$, 证明:

$$(1) F(x) \cdot F(y) = F(x+y); \quad (2) \frac{F(x)}{F(y)} = F(x-y).$$

证明 【利用指数函数的性质证之】

$$(1) F(x) \cdot F(y) = e^x \cdot e^y = e^{x+y} = F(x+y);$$

$$(2) \frac{F(x)}{F(y)} = \frac{e^x}{e^y} = e^x \cdot e^{-y} = e^{x-y} = F(x-y).$$

1-2-6. 利用 $y=\sin x$ 的图形, 作出下列函数的图形:

$$(1) y = \frac{1}{2} + \sin x; \quad (2) y = \sin(x + \frac{\pi}{3});$$

$$(3) y = 3\sin x; \quad (4) y = \sin 2x;$$

$$(5) y = 3\sin(2x + \frac{2}{3}\pi).$$

解 (1) $y = \frac{1}{2} + \sin x$ 的图形可由 $y = \sin x$ 的图形向上平移 (或横轴向下平移) $1/2$ 个单位而得. 其图形如图 1-5(1) 所示. 类似地, 可得 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$, $y = 3\sin x$, $y = \sin 2x$ 的图形, 它们的图形分别如图 1-5(2)、(3)、(4) 所示.

(5) $y = 3\sin[2(x + \frac{\pi}{3})]$, 其图形如图 1-5(5) 所示, 可由 $y = \sin x$ 的图形经下列三个步骤的变换而得:

1° 如(4)所示, 缩小周期为 π , 得 $y = \sin 2x$ 的图形;