高等学校试用教材

电路理论基础

下　　册

周长源 主编

高等教育出版社

内 容 简 介

本书是根据现行电路教学大纲编写的，经高等学校工科电路理论与信号分析教材编审小组评审作为电类（不包括无线电类）专业的基本教材。本书是在俞大光编《电工基础》上、中册的基础上着重增添新材料，改革传统内容的叙述，重新调整体系，而继承其风格特点，力求削枝强干，突出基本内容，简明扼要。对教学大纲中带*号的扩展内容作了简化或删除，同时书后附有磁路和铁心线圈电路的内容，供部分学校选用。

本书分上、下两册出版。上册包括电路模型和电路定律，电阻电路分析，动态电路时域分析，正弦稳态分析，三相电路，非正弦周期电流电路；下册包括动态电路复频域分析，网络图、网络矩阵和网络方程，二端口网络，分布参数电路，非线性电路及附录（磁路和铁心线圈电路）。

高等学校试用教材

电路理论基础

下 册

周长源 主编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.125 字数 195,000

1985年10月第1版 1985年10月第1次印刷

印数 00,001—6,800

书号 15010·0684 定价 1.65 元

目　录

第七章　动态电路的复频域分析

§7.1　拉普拉斯变换

上一章中已介绍了应用傅里叶变换来分析电路的概念。现在将傅里叶变换加以改进。

在我们研究的暂态过程问题中，激励函数 $f(t)$ 都是在 $t=0$ 时才开始作用的，在 $t<0$ 时激励为零。所以，可以取一个函数 $\phi(t)$：

$$\phi(t)=f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t} \tag{7.1}$$

式中 σ 为正实数，对于大多数在实际上所遇到的函数 $f(t)$ 来说，只要 σ 选择得足够大，总可以做到使函数 $\phi(t)$ 是绝对可积的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\phi(t)\right|\mathrm{d}t<\infty \tag{7.2}$$

因此，对函数 $\phi(t)$ 可以进行傅里叶变换。因为当 $t<0$ 时，$f(t)$ 为零，从而 $\phi(t)$ 也为零，所以傅里叶积分的下限可从零开始，即成为**单边的傅里叶变换**(one sided Fourier transform)，写成

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{j}\omega)&=\int_0^{\infty}\phi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t=F(\sigma+\mathrm{j}\omega)\end{aligned} \tag{7.3}$$

令复参变量 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，常称为**复频率**(complex frequency)①，则(7.3)式可写成

$$\boxed{F(s)=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t} \tag{7.4}$$

① 为对应于实角频率 ω，复角频率应定义为 $s/\mathrm{j}=\omega-\mathrm{j}\sigma$，但为简便计就称 s 为复频率。

(7.4)式称为**拉普拉斯变换**(Laplace transform)。$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的**象函数**(image function)，它是复频谱函数，而 $f(t)$ 则称为 $F(s)$ 的**原函数**(original function)。今后把拉普拉斯变换简写为

$$F(s)=\mathrm{L}\{f(t)\} \tag{7.5}$$

对函数 $F(\sigma+\mathrm{j}\omega)$ 进行傅里叶反变换，得

$$\phi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.6}$$

以 $\phi(t)=f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 代入(7.6)式，并在等式两边乘以 $\mathrm{e}^{\sigma t}$，得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\sigma t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.7}$$

因 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，故 $\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\mathrm{j}}\mathrm{d}s$；且相应于 ω 的上下限 $\pm\infty$，s 的上下限为 $\sigma\pm\mathrm{j}\infty$。把这些转换关系代入(7.7)式，得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \tag{7.8}$$

(7.8)式称为**拉普拉斯反变换**(inverse Laplace transform)，可用来由象函数求原函数。(7.4)式和(7.8)式构成一变换对。(7.8)式可简写为

$$f(t)=\mathrm{L}^{-1}\{F(s)\}$$

本章将采用积分变换方法，把时域中求解微分方程的过程转化为在复频域中求解代数方程的过程，使运算得以简化。这种方法，统称为**复频域分析**(complex frequency domain analysis)。

下面根据(7.4)式计算几个最常用的时间函数的象函数，其它一些函数的象函数列举在表 7.1 中。

1. 单位阶跃函数的象函数

若 $\qquad f(t)=\theta(t)$，则

$$F(s)=\int_{0}^{\infty}\theta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\left.\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right|_{0}^{\infty}=\frac{1}{s}$$

这是由于 σ 为正实数，当 $t\to\infty$, $e^{-\sigma t}\to 0$，上式中上限

$$\lim_{t\to\infty}\{e^{-st}/-s\}=\lim_{t\to\infty}\{e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}/-s\}=0$$

于是得到拉普拉斯变换公式

$$L\{\theta(t)\}=\frac{1}{s} \tag{7.9}$$

仿此可以证明：若 $f(t)=A\theta(t)$，其中 A 是常数，则

$$L\{A\theta(t)\}=A\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{A}{s} \tag{7.10}$$

2. 指数函数 $e^{\alpha t}$ 的象函数

若 $f(t)=e^{\alpha t}$，α 为任一实数或复数，且设 s 的实部 σ 大于 α 的实部，则

$$F(s)=\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt=\frac{-1}{s-\alpha}\Big[e^{-(s-\alpha)t}\Big]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{s-\alpha}$$

所以

$$L\{e^{\alpha t}\}=\frac{1}{s-\alpha} \tag{7.11}$$

同样可得

$$L\{e^{-\alpha t}\}=\frac{1}{s+\alpha} \tag{7.12}$$

$$L\{e^{j(\omega t+\phi)}\}=\frac{e^{j\phi}}{s-j\omega} \tag{7.13}$$

3. 单位冲激函数的象函数

若 $f(t)=\delta(t)$，则

$$F(s)=\int_{0_-}^\infty \delta(t)e^{-st}dt$$

由于 $\delta(t)$ 只在 $t=0$ 处有值，所以有 $\psi(t)\delta(t)=\psi(0)\delta(t)$，即

$$\delta(t)e^{-st}=\delta(t)e^0=\delta(t)$$

所以

$$L[\delta(t)]=\int_{0_-}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

注意上述积分由于 $\delta(t)$ 只在 $t=0$ 处有值，若积分下限选为 0_-，则积分值等于1；若积分下限选为 0_+，则积分值等于零。但从(7.2)式过渡到(7.3)式是以 $t<0$ 时 $f(t)=0$ 为基础的，故积分下限应取 0_-。

表 7.1　函数的拉普拉斯变换

原函数 $f(t)$①	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$①	象函数 $F(s)$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
A	$\frac{A}{s}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1	$\sin(\omega t+\psi)$	$\frac{s\sin\psi+\omega\cos\psi}{s^2+\omega^2}$
$\delta'(t)$	s	$\cos(\omega t+\psi)$	$\frac{s\cos\psi-\omega\sin\psi}{s^2+\omega^2}$
$\delta''(t)$	s^2	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
$\delta^n(t)$	s^n	$t^n e^{-\alpha t}$(n 为正实数)	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$a\delta(t)$	a	$\frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$	$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$
$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{\omega\cos\varphi+(s+\alpha)\sin\varphi}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{j(\omega t+\psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{s-j\omega}$	$e^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)$	$\frac{(s+\alpha)\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}[1-e^{-\alpha t}(1+\alpha t)]$	$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$
t^n(n 为正实数)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{t}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$

① 因拉普拉斯变换只在 $t>0$ 区域内有定义，故本表原函数 $f(t)$ 均应理解为 $f(t)\theta(t)$。

§7.2 拉普拉斯变换的基本性质

1. 线性性质

若函数 $f_1(t)$和 $f_2(t)$的象函数分别为 $F_1(s)$和 $F_2(s)$，又 a 和 b 为常数，则函数 $f(t)=af_1(t)\pm bf_2(t)$ 的象函数为 $aF_1(s)\pm bF_2(s)$。

这一性质可以利用拉普拉斯变换的定义(7.4)式直接得到证明。

根据线性性质可以简便地求出正弦函数 $\sin\omega t$ 和余弦函数 $\cos\omega t$ 的象函数。

因为

$$\sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j},\ \cos\omega t=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{L}\{\sin\omega t\}&=\mathrm{L}\left\{\frac{e^{j\omega t}}{2j}-\frac{e^{-j\omega t}}{2j}\right\}=\frac{1}{2j}\mathrm{L}\left\{e^{j\omega t}\right\}\\&\quad-\frac{1}{2j}\mathrm{L}\left\{e^{-j\omega t}\right\}\\&=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned}\tag{7.14}$$

同理可得:

$$\mathrm{L}\{\cos\omega t\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}\tag{7.15}$$

2. 微分性质

若函数 $f(t)$的象函数为 $F(s)$，则

$$\boxed{\mathrm{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=sF(s)-f(0_-)}\tag{7.16}$$

证: $$\mathrm{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=\int_{0_-}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt$$

$$= e^{-st}f(t)\Big|_{0_-}^{\infty} + s\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

只要 s 的实部 σ 取得足够大, 当 $t\to\infty$ 时 $e^{-st}f(t)\to 0$, 故上式可写成

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = 0 - f(0_-) + sF(s)$$

这就是(7.16)式。因为考虑到原函数 $f(t)$ 中可能包含冲激函数, 故上面积分下限取“0_-”。

同理可推证:

$$\mathrm{L}\{f''(t)\} = s[sF(s) - f(0_-)] - f'(0_-)$$
$$= s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

依次类推, 可得 n 阶导函数的拉普拉斯变换

$$\mathrm{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - [s^{n-1}f(0_-) + s^{n-2}f'(0_-) + \cdots + f^{(n-1)}(0_-)] \qquad (7.17)$$

3. 积分性质

若函数 $f(t)$ 的象函数为 $F(s)$, 则

$$\boxed{\mathrm{L}\left\{\int_{0_-}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right\} = \frac{F(s)}{s}} \qquad (7.18)$$

证: 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{0}^{t} f(t)\mathrm{d}t = f(t)$$

运用(7.16)式微分性质, 得:

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = s\mathrm{L}\left\{\int_{0_-}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right\} - \left[\int_{0_-}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]_{t=0_-}$$
$$= s\mathrm{L}\left\{\int_{0_-}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right\} - 0$$

所以

$$\mathrm{L}\left\{\int_{0_-}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{s}\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

如果积分的下限为$-\infty$，则有

$$\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0-} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0-}^{t} f(t)\mathrm{d}t$$

式中$\int_{-\infty}^{0-} f(t)\mathrm{d}t$ 为一常量，我们令 $f^{-1}(0)=\int_{-\infty}^{0-} f(t)\mathrm{d}t$

则

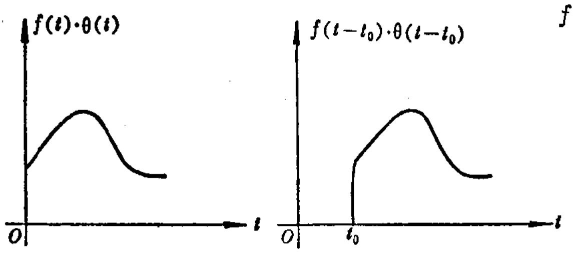
$$\mathrm{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right\}=\mathrm{L}\left\{\int_{-\infty}^{0-} f(t)\mathrm{d}t\right\}+\mathrm{L}\left\{\int_{0-}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right\}$$

$$=\frac{f^{-1}(0)}{s}+\frac{F(s)}{s} \tag{7.19}$$

4. 延迟定理

设有某函数 $f(t)$，当 $t<0$ 时 $f(t)=0$（如图 7.1 a 所示）。此函数可以写成 $f(t)\theta(t)$。如果此函数的作用推迟某一时间 $t_0(t_0>0)$（如图 7.1 b 所示），则其象函数为 $f(t)$的象函数乘以 e^{-st_0}，即若 $\mathrm{L}\{f(t)\theta(t)\}=F(s)$，则

$$\boxed{\mathrm{L}\{f(t-t_0)\theta(t-t_0)\}=\mathrm{e}^{-st_0}F(s)} \tag{7.20}$$



(a)　　(b)

图7.1　延迟波形

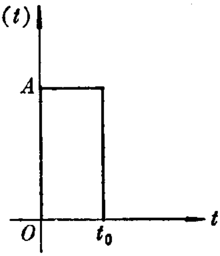


图7.2　矩形脉冲

证：$$\mathrm{L}\{f(t-t_0)\theta(t-t_0)\}=\int_{0}^{\infty} f(t-t_0)\theta(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

这是因为当 $t<t_0$ 时，$\theta(t-t_0)=0$，故可把积分下限更换为 t_0。设

新的自变量 $t'=t-t_0$，则 $\mathrm{d}t'=\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\{f(t-t_0)\theta(t-t_0)\} &= \int_0^\infty f(t')\mathrm{e}^{-st_0}\mathrm{e}^{-st'}\mathrm{d}t' \\ &= \mathrm{e}^{-st_0}\int_0^\infty f(t')\mathrm{e}^{-st'}\mathrm{d}t' \\ &= \mathrm{e}^{-st_0}F(s)\end{aligned}$$

根据延迟定理可以简便地求出矩形脉冲函数的象函数。图7.2所示矩形脉冲的幅度为 A，宽度为 t_0，可用两个阶跃函数之差来表示，

$$f(t)=A\theta(t)-A\theta(t-t_0)$$

根据(7.10)式和(7.20)式，得矩形脉冲波的象函数

$$F(s)=\frac{A}{s}(1-\mathrm{e}^{-st_0}) \tag{7.21}$$

§7.3 拉普拉斯反变换 部分分式展开法

应用拉普拉斯变换求解电路暂态过程时，不仅需要根据已知时间函数求象函数，还必须进行拉普拉斯反变换，即根据已解得的响应(电压或电流)的象函数 $F(s)$ 求出相应的原函数 $f(t)$。

在集中参数电路中电压和电流的象函数往往都是 s 的有理分式，这时我们可以避免求解拉普拉斯反变换的积分(7.8式)，而用将象函数 $F(s)$ 展开成部分分式及查函数变换表的简单方法来求得相应的原函数 $f(t)$。

现设象函数 $F(s)$ 为:

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{F_2(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \tag{7.22}$$

式中 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 都是实系数的多项式，且无公因式。现在分几种情况来讨论:

1. 设 $F(s)$ 是真分式，$n>m$，且方程 $F_2(s)=0$ 只含单根。这

时 $F(s)$可以展开成下列简单的部分分式之和:

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{F_2(s)}=\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\cdots$$

$$+\frac{A_k}{s-p_k}+\cdots+\frac{A_n}{s-p_n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{s-p_k} \tag{7.23}$$

式中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为方程 $F_2(s)=0$ 的 n 个不同的根，它们可以是实数也可以是共轭复数。由于 $s=p_k$ 时，$F(p_k)=\infty$。故各个 p_k 称为有理函数 $F(s)$的一个**极点**(pole)。$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是常数。为了求出其中任何一个常数 A_k，可以用$(s-p_k)$乘(7.23)式两边各项，得

$$\frac{F_1(s)(s-p_k)}{F_2(s)}=\frac{A_1(s-p_k)}{s-p_1}+\frac{A_2(s-p_k)}{s-p_2}+$$

$$+\cdots+A_k+\cdots+\frac{A_n(s-p_k)}{s-p_n}$$

上式对 s 为任意数值均成立。令 $s=p_k$，则右边各项除 A_k 项以外全为零，故得

$$A_k=\left[\frac{F_1(s)(s-p_k)}{F_2(s)}\right]_{s=p_k} \tag{7.24}$$

由于 p_k 是方程 $F_2(s)=0$ 的一个根，故 $F_2(p_k)=0$，(7.24)式分子分母均为零，是一个不定式。为求出此不定式的极限，可将(7.24)式中分子分母中的公因式$(s-p_k)$先约掉，然后代以 $s=p_k$；或者用罗毕达法则，即分子分母分别对 s 取导数之后再代以 $s=p_k$，即

$$A_k=\lim_{s\to p_k}\frac{F_1(s)(s-p_k)}{F_2(s)}=\lim_{s\to p_k}\frac{F_1(s)+F_1'(s)(s-p_k)}{F_2'(s)}$$

$$=\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \tag{7.25}$$

式中由于 p_k 不是 $F_2(s)=0$ 的重根，故 $F_2'(p_k)\neq 0$。将 A_k 的值代

入(7.23)式，则象函数的部分分式展开式为

$$\boxed{F(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}\cdot\frac{1}{s-p_k}} \tag{7.26}$$

根据拉普拉斯变换的线性性质以及函数变换表，很容易写出(7.26)式的原函数为

$$f(t)=\mathrm{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathrm{L}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}\cdot\frac{1}{s-p_k}\right\}$$

$$=\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}\mathrm{e}^{p_1 t}+\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}\mathrm{e}^{p_2 t}+\cdots+\frac{F_1(p_n)}{F_2'(p_n)}\mathrm{e}^{p_n t}$$

即

$$\boxed{f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}\mathrm{e}^{p_k t}} \tag{7.27}$$

(7.27)式就是当象函数为有理真分式时用部分分式展开法求原函数的一般公式。

【例题】 7.1　已知 $F(s)=\dfrac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}$，求它的原函数。

【解】 $F_2(s)=s(s+2)(s+5)=0$ 的根为 $p_1=0$, $p_2=-2$, $p_3=-5$。又 $F_2'(s)=3s^2+14s+10$ 和 $F_1(s)=2s+1$。根据(7.27)式求得原函数

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=\sum_{k=1}^{3}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}\mathrm{e}^{p_k t}$$

$$=\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}\mathrm{e}^{p_1 t}+\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}\mathrm{e}^{p_2 t}+\frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)}\mathrm{e}^{p_3 t}$$

$$=0.1+0.5\mathrm{e}^{-2t}-0.6\mathrm{e}^{-5t}\qquad(t\geqslant 0)$$

2. 如果 $F(s)$不是真分式，即分子的次数m高于或等于分母的次数n，则必须先用分母 $F_2(s)$去除分子 $F_1(s)$，使象函数表达成为一个 s 的多项式与一个余式(其分子的次数低于分母的次数)之和，进而将余式展开成部分分式，分项求原函数。具体计算方法见下面的例题。

【例题】 7.2 已知 $G(s)=\dfrac{s^4+9s^3+24s^2+22s+1}{s(s+2)(s+5)}$，求其原函数。

【解】 本题 $G(s)$分子的次数高于分母的次数。用分母除分子，得

$$G(s)=s+2+\frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}$$

式中右边第三项是例题 7.1 中的 $F(s)$。我们知道单位冲激函数 $\delta(t)$ 的象函数为 1，根据拉普拉斯变换的微分性质，则 $\mathrm{d}\delta(t)/\mathrm{d}t$ 的象函数应为 s。于是我们得到 $G(s)$的原函数为

$$g(t)=\mathrm{L}^{-1}\{G(s)\}=\mathrm{L}^{-1}\{s\}+\mathrm{L}^{-1}\{2\}+\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}\right\}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)+2\delta(t)+0.1+0.5\mathrm{e}^{-2t}-0.6\mathrm{e}^{-5t} \qquad (t\geqslant 0_-)$$

3. 当方程 $F_2(s)=0$ 的根是复数时，必然以一对共轭复数出现；这是由于 $F_2(s)$的系数都是实数的缘故。例如：有共轭复根 $p_{k,k+1}=\sigma_k\pm \mathrm{j}\omega_k$，则多项式含有因式

$$(s-p_k)(s-p_{k+1})=(s-\sigma_k-\mathrm{j}\omega_k)(s-\sigma_k+\mathrm{j}\omega_k)$$

$$=s^2-2\sigma_k s+\sigma_k^2+\omega_k{}^2$$

其系数全为实数。此时仍可用部分分式展开法求它的原函数，不过对应的常数 A_k 和 A_{k+1} 将是一对共轭复数。所以只须计算一个常数，另一个对应的常数取其共轭复数即可。详见以下例题。

【例题】 7.3 求 $F(s)=\dfrac{s+1}{s(s^2+s+1)}$的拉普拉斯反变换。

【解】 $F_2(s)=s(s^2+s+1)=0$ 的根为

$$p_1=0$$

$$p_{2,3}=-0.5\pm \mathrm{j}0.866$$

而 $$F_2'(s)=3s^2+2s+1$$

直接应用(7.27)式部分分式展开法的公式

$$f(t)=\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}\mathrm{e}^{p_1t}+\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}\mathrm{e}^{p_2t}+\frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)}\mathrm{e}^{p_3t}$$

$$=1+\frac{-0.5+\mathrm{j}0.866+1}{3(-0.5+\mathrm{j}0.866)^2+2(-0.5+\mathrm{j}0.866)+1}\mathrm{e}^{-0.5t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.866t}$$

$$+\frac{-0.5-\mathrm{j}0.866+1}{3(-0.5-\mathrm{j}0.866)^2+2(-0.5-\mathrm{j}0.866)+1}\mathrm{e}^{-0.5t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.866t}$$

$$=1+\left[\frac{-1.5-j0.866}{3}e^{j0.866t}+\frac{-1.5+j0.866}{3}e^{-j0.866t}\right]e^{-0.5t}$$

$$=1+e^{-0.5t}\left[-\frac{1.5}{3}(e^{j0.866t}+e^{-j0.866t})-\frac{j0.866}{3}(e^{j0.866t}-e^{-j0.866t})\right]$$

$$=1-e^{-0.5t}\cos 0.866t+0.577e^{-0.5t}\sin 0.866t$$

4. 如果代数方程$F_2(s)=0$有重根,则部分分式展开式将有所不同。我们设n个根中第n个为m次重根，其余$n-m$个根均为单根,则$F_2(s)$就可表示为

$$F_2(s)=(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-m})(s-p_n)^m \qquad (7.28)$$

此时$F(s)$的部分分式展开式为

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{F_2(s)}=\sum_{k=1}^{n-m}\frac{A_k}{s-p_k}+\frac{A_{nm}}{(s-p_n)^m}+\frac{A_{n,m-1}}{(s-p_n)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_{n1}}{s-p_n} \qquad (7.29)$$

把上式两边各项乘以$(s-p_n)^m$,则得:

$$\frac{F_1(s)}{F_2(s)}(s-p_n)^m=(s-p_n)^m\sum_{k=1}^{n-m}\frac{A_k}{s-p_k}+A_{nm}+A_{n,m-1}(s-p_n)+\cdots+A_{n1}(s-p_n)^{m-1} \qquad (7.30)$$

令$s=p_n$,则(7.30)式右边各项除A_{nm}以外，其余均变为零；而左边为0/0的不定式,将左边取极限得常数

$$A_{nm}=\lim_{s\to p_n}\frac{F_1(s)(s-p_n)^m}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-m})(s-p_n)^m}=\left.\frac{F_1(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-m})}\right|_{s=p_n} \qquad (7.31)$$

为了求出$A_{n,m-1}$，把(7.30)式两边对s求导函数，然后再令$s=p_n$,则右边除$A_{n,m-1}$项以外,其余各项均为零,故得:

$$A_{n,m-1}=\lim_{s\to p_n}\frac{d}{ds}\left[\frac{F_1(s)}{F_2(s)}(s-p_n)^m\right] \qquad (7.32)$$