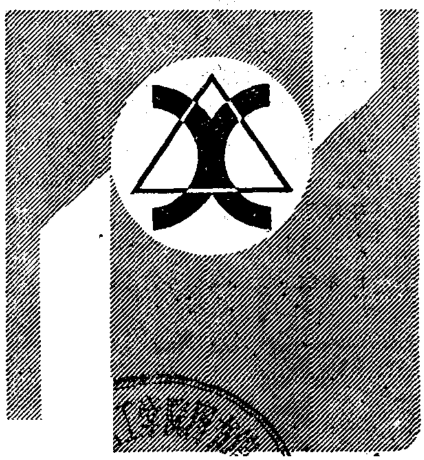
车工应用代数和三角

（修订本） 陈家芳 编

上海科学技术出版社

车工应用代数和三角

（修订本）



陈家芳 编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书初版至今已有二十多年。在这些年中由于科学的发展和技术的进步，书中有些内容已不能完全适应，因此有必要进行修订。

在这次修订中，保留了由浅入深的叙述方法。在内容上，我们尽量把结合实际的、在生产实践中行之有效的方法写进去，并说明如何应用。凡国家标准已颁布的，均采用国家标准。

修订后的内容包括代数、三角和应用实例三章。第一章有代数的概念、代数的加减乘除、一元一次方程式、二元一次方程式、因式分解和求平方根等，其中增加了求平方根，删去了一元二次方程式。第二章有定义、勾股弦定理、特别角三角函数、解三角形、弧度制和常用三角公式等，增加了弧度制和常用三角公式两节。第三章有金属切削和刀具计算、车外圆和内孔表面时的计算、车圆锥表面时的计算、车复杂表面时的计算、螺纹的几何尺寸计算、齿轮的几何尺寸计算和皮带传动计算等。这一章修订的内容较多，特别是刀具、车复杂表面、螺纹、齿轮和皮带传动等内容。

本书可作为具有高小以上文化程度的工人自学用，也可供有关工厂和技工学校的教师参考。

封面设计　徐逸涛

车工应用代数和三角（修订本）

陈　家　芳　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　无锡县人民印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张3.75　字数40.000

1958年11月第1版　1982年12月第2版

1982年12月第8次印刷

印数：110,001—150,500

书号：13119.69　定价：（科三）0.32元

目　录

第一章　代　　数

第二章　三　　角

第三章　代数和三角的应用实例

第一章 代　　数

一、代数的概念

1. 代数的目的

代数学是用 a、b、c、x、y、z 等字母来表示数并加以运算的一种方法。它是研究数和数的运算规律的；例如长方形的宽度为 3，长度为 5，则它的面积等于 3×5。若用 L 表示长度，B 表示宽度，F 表示面积，则

$$F=LB$$

这要比用数字方便得多，而且用不同的 L 和 B 的值代入，可以算出不同面积。

2. 代数的符号

运算符号　+、−、×、÷。

关系符号　=。

结合符号（　）、[　]、{　} 均和算术相同，但是数字和文字，文字和文字间的乘号，可以省去或用“·”来代替。例如 $2\times a$ 写成 $2a$，$b\times x$ 写成 bx，2×3 写成 $2\cdot3$ 等。

3. 代数式

用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子叫做代数式，例如 $a+b-c$，$2x+1$，$\frac{5x}{a}$ 等。

4. 因数和系数

几个数连乘，每个数都是乘积的因数。例如 $3xy$ 中 3、x 和 y 都是 $3xy$ 的因数。

一项中以某因数为主，其他因数的积叫做该因数的系数。

例如 $6xy$ 中，$6x$ 是 y 的系数，$6y$ 是 x 的系数，6 是 xy 的系数。

对于系数，有下面两点规定：

(1) 凡系数是 1，则“1”可省略不写。例如 $1x$ 写成 x，$1ab$ 写成 ab。

(2) 数字系数常放在文字因数的前面。例如 $5x$ 不应写成 $x5$。

5. 指数和根

写在数字或字母右上方的数字叫做指数。例如 5×5 写成 5^2，2 是 5 的指数，叫做 5 的平方，或叫做 5 的二次幂（幂读密）；$a\times a\times a$ 写成 a^3，叫做 a 的三次方。

符号 $\sqrt{\ }$ 表示平方根，$\sqrt[3]{\ }$ 表示立方根。例如 9 的平方根写成 $\sqrt{9}$；8 的立方根写成 $\sqrt[3]{8}$；a 的平方根写成 $\sqrt{a}$；a 的立方根写成 $\sqrt[3]{a}$。

6. 代数式的值

如果代数式中，已经知道每一字母的数值等于多少时，可以将数值分别代入式子里去，然后计算全式的数值。

〔例〕 $a=2$，$b=3$，求 $a+b=?$

〔解〕 $a+b=2+3=5$

〔例〕 $x=4$，$y=5$，求 $5x-2y=?$

〔解〕 $5x-2y=5\times4-2\times5=10$

〔例〕 $m=2$，$n=3$，求 $m^3n^2=?$

〔解〕 $m^3n^2=2^3\times3^2=2\times2\times2\times3\times3=72$

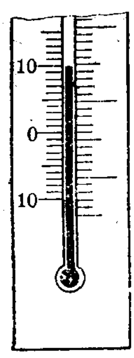


图1 寒暑表上的刻度

7. 正数和负数

在算术中所研究的数，是没有正、负之分的数，但是代数学中的数，除了表示数值的大小以外，还能指出

方向。例如寒暑表中的刻度(图1)，在0以上的数叫正数(+)，在0以下的数叫负数(−)，零不算正数也不算负数，+0、−0和不加符号的0都是相同的。去掉+、−符号的数值叫绝对值。例如 +5 的绝对值是5，−5的绝对值也是5。

二、代数式的加减乘除

1. 单项式与多项式

数字或字母前有“+”或“−”符号的叫单项式，例如 −8、+b、乘积 axy、除商 $\frac{bc}{a}$ 和乘方 a^2x^3 等。把单项式连接起来的式子叫多项式，例如 $x+3xy-4y$ (首项如果是正数时，“+”号可以省略不写，如 $+a$ 写成 a，+6写成6等)。

2. 同类项与不同类项

只有数字系数不同的代数项叫做同类项，例如 $8x$ 和 $5x$、$6ax$ 和 $8ax$、$3ax^2$ 和 $4ax^2$ 等。不同类项是指字母不同，或字母相同而指数不同的代数项。例如 $8x$ 和 $5y$、$6ax$ 和 $8bx$、$3ax^2$ 和 $4ax^4$ 等。

3. 加法

代数式加法和算术加法的主要区别是在于+、−符号关系(即+与+或−与−叫同号，+与−或−与+叫异号)。

(1) 同号的同类项相加，只要把各数的绝对值相加后，在和的前面附一个同样的符号即可。

(2) 异号的同类项相加，先把同号各数的绝对值相加，然后用两者中大数的和，减去小数的和，再附以绝对值较大的符号即可。但必须指出：不同类项是不能相加的。

〔例〕 求 $4ab$, $5ab$, $3ab$ 之和

〔解〕 $4ab+5ab+3ab=12ab$

〔例〕 求 $5ab$, $-7ab$, $-11ab$, $4ab$ 之和

〔解〕 $-7ab+(-11ab)+5ab+4ab=-18ab+9ab$

$=-9ab$

〔例〕 求 $3ab$, $4ac$, $8ad$ 之和

〔解〕 $3ab+4ac+8ad$（此为不同类项，故不能相加）

(3) 多项式与多项式相加时，将同类项写在同一直行内，然后再由左到右求各项的代数和。

〔例〕 求 $3a-4b+6c$, $-4a+5b-5c$, $-7a+4b-8c$ 之和

〔解〕

$$\begin{array}{rr} & 3a-4b+6c \\ & -4a+5b-5c \\ +) & -7a+4b-8c \\ \hline & -8a+5b-7c \end{array} \text{(答)}$$

4. 减法

减法和加法相似，只有同类项才能相减。方法是先变减数的符号，再加于被减数。

〔例〕 求 $50x$, $30x$ 之差

〔解〕 $50x-(30x)=50x+(-30x)=20x$

〔例〕 求 $-10a$, $-4a$ 之差

〔解〕 $-10a-(-4a)=-10a+4a=-6a$

〔例〕 求 $3ab$, $-6ab$ 之差

〔解〕 $3ab-(-6ab)=3ab+6ab=9ab$

多项式与多项式相减时，将同类项写在同一直行内，然后照单项式方法相减。

〔例〕 求 $8x^3-9x^2+5x-8$, $3x^3+6x^2-10x+4$ 之差

〔解〕

$$\begin{array}{r} 8x^3-\ \ 9x^2+\ \ 5x-8 \\ -)\ 3x^3+\ \ 6x^2-10x+4 \\ \hline 5x^3-15x^2+15x-12 \end{array} \text{(答)}$$

计算时要依指数的大小来排列，由大到小叫降幂，由小到大叫升幂。上题的排法叫降幂。

5．乘法

代数式乘法和算术乘法的主要区别也在于＋、－符号关系。

(1) 同号数相乘，其乘积为正数(＋乘＋得＋，－乘－得＋)。

(2) 异号数相乘，其乘积为负数(＋乘－得－，－乘＋得－)。

(3) 几个数相乘时，数字系数相乘，字母的指数相加。

〔例〕 求 $2xy$, $3x^2y^3$ 之积

〔解〕 $2xy\cdot 3x^2y^3=6x^3y^4(2\cdot 3=6,\ x\cdot x^2=x^{1+2}=x^3,\ y\cdot y^3=y^{1+3}=y^4)$

〔例〕 求 $3ab^3$, $-4a^2b^2$ 之积

〔解〕 $3ab^3\cdot(-4a^2b^2)=-12a^3b^5$(“$\cdot$”可省略不写)

(4) 多项式和多项式相乘，将同类项排在同一直行内，然后照算术乘法相乘。

〔例〕 求 $a+4$, $a+3$ 之积

〔解〕

$$\begin{array}{r} a+4 \\ a+3 \\ \hline 3a+12 \\ a^2+4a \\ \hline a^2+7a+12 \end{array}\text{(答)}$$

〔例〕 求 $2ab+4ac$, $3ab-3ac$ 之积

〔解〕

$$\begin{array}{r} 2ab \quad + \; 4ac \\ 3ab \quad - \; 3ac \\ \hline -6a^2bc \; -12a^2c^2 \\ 6a^2b^2 \; +12a^2bc \qquad\qquad \\ \hline 6a^2b^2 \; +6a^2bc \; -12a^2c^2 \end{array} \text{(答)}$$

6. 除法

除法是乘法的逆运算。运算时 +、- 符号的确定和乘法相同。

(1) 数字系数相除，字母的指数相减。

〔例〕 求 $40a^3b^6$ 除以 $10ab^3$ 之商

〔解〕
$$\frac{40a^3b^6}{10ab^3}=4a^2b^3$$

$$\left(\frac{40}{10}=4,\ \ \frac{a^3}{a}=a^{3-1}=a^2,\ \ \frac{b^6}{b^3}=b^{6-3}=b^3\right)$$

〔例〕 求 $27a^2b^3c^2$ 除以 $-9a^2bc^2$ 之商

〔解〕
$$\frac{27a^2b^3c^2}{-9a^2bc^2}=-3b^2\quad\left(\frac{a^2}{a^2}=\frac{a\cdot a}{a\cdot a}=1\right)$$

(2) 多项式与多项式相除时，先用被除数的第一项除以除数的第一项，得第一商数项，再用除数乘以商数，从被除数减去除数与商数的乘积，其余数为新被除数；再以除数第一项除新被除数(即余数)得一商数，以此第二商数项乘以除数，又从余数减去此项乘积，以此类推，直到被除数除尽为止。

〔例〕 求 $a^2-2ab+b^2$ 除以 $a-b$ 之商

〔解〕

$$\begin{array}{r|l} & a \; -b \quad \text{(答)} \\ \hline a-b & a^2-2ab+b^2 \\ & a^2-\;ab \\ \hline & \quad -\;ab+b^2 \\ & \quad -\;ab+b^2 \\ \hline & \qquad — \end{array}$$

〔例〕 求 $6x^2-12x-18$ 除以 $2x-6$ 之商

〔解〕

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & \underline{\;3x+3\;} \quad (\text{答}) \\
2x-6 \,\big)\!\!\! & \overline{6x^2-12x-18} \\
 & \underline{6x^2-18x\qquad} \\
 & \qquad\quad 6x-18 \\
 & \qquad\quad \underline{6x-18} \\
 & \qquad\qquad - \\
\end{array}
$$

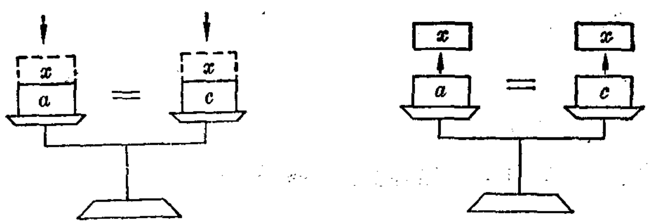
三、一元一次方程式

1. 等式

两个代数式之间用等号相连接起来，就叫做等式。等式前后的两个代数式，叫做等式的两边，例如 $x+x=2x$ 等。

等式有这样几个性质：

(1) 等式的两边，加上相同的数，其和仍为等式（图2(a)）。



(a) (b)

图2 等式

例如 $a=c$，则 $a+x=c+x$

(2) 等式的两边，减去相同的数，其差仍为等式（图2(b)）。

例如 $a=c$，则 $a-x=c-x$

(3) 等式的两边，乘以相同的数，其积仍为等式。

例如 $a=c$，则 $ax=cx$

(4) 等式的两边，除以相同的数，其商仍为等式。

例如 $a=c$，则 $\frac{a}{x}=\frac{c}{x}$ (除数不能为 0)

上面的四个等式，都是不证自明的公理，我们叫它为普通公理(或等式公理)，这些公理在解方程式时作为依据。

如果等式中的字母，用任何数值代入后，结果总是相等的，我们叫它为恒等式，例如 $x+3x=4x$ (这里的 x 可以代表任意数值)。

如果等式中的字母，必定要用特定数值代入后，才能相等，则我们叫它为方程式，例如 $5x-2=8$ (这里的 x 必须为 2)。

2. 移项

应用上面四个普通公理，我们就可以得到移项的方法。

〔例〕 $x-6=4$

由公理(1)于等式的两边同加 6 得

$$(x-6)+6=4+6,\ x=10$$

〔例〕 $x+5=9$

由公理(2)于等式的两边同减 5 得

$$(x+5)-5=9-5,\ x=4$$

〔例〕 $\frac{x}{6}=5$

由公理(3)于等式的两边同乘 6 得

$$\frac{x}{6}\times 6=5\times 6,\ x=30$$

〔例〕 $5x=15$

由公理(4)于等式的两边同除 5 得

$$\frac{5x}{5}=\frac{15}{5},\quad x=3$$

所以，在方程两边的项可以任意互移，只要把原来的运算符号改变一下，即 + 变 －，－ 变 +，× 变 ÷，÷ 变 ×。

3. 一元一次方程式的解法

方程内各项所含未知数的次数不超过一的，叫做一次方程。一次方程所含的未知数只有一种的，叫做一元一次方程式。它的标准式是：

$$ax+b=0$$

通常以 x 代表未知数，a 和 b 代表已知数。

〔例〕 解 $7x+9=2x+24$

〔解〕 (1) 用移项法则，把含有未知数的项移在一边，不含未知数的项移在另一边

$$7x-2x=24-9$$

(2) 两边化简，合并同类项

$$5x=15$$

(3) 移系数就可得方程式的根(即未知数的值)

$$x=\frac{15}{5},\ x=3$$

(4) 把求得的根代入原式中验算，若能使原式成恒等式，那么这个根便符合于原方程式。

验算：

$$7x+9=2x+24$$
$$7\times3+9=2\times3+24$$
$$30=30$$

3 是原方程式的根是正确的。

〔例〕 解 $\frac{x}{6}+2=\frac{x}{4}+1\frac{3}{4}$

以各项分母的最小公倍数 12 乘以等号两边各项，即可去其分母得

$$2x+24=3x+21$$

$$-x=-3$$

$$x=3$$

(两边同乘－号得＋号)

四、二元一次联立方程式

含有数值相同的根的两个或多个方程，叫做联立方程，其中含有两个未知数的两个一次方程，叫做二元一次联立方程式。

例如 $4x-6=6$

为一元一次方程式，

$$5x-2y=9$$

为二元一次方程式。

$$\begin{cases}4x-3y=6\\2x+3y=12\end{cases}$$

为二元一次联立方程式

二元一次联立方程式的解法如下：

二元一次联立方程式的解法有三种：即加减消去法，代入消去法，比较消去法。这三种解法，都是使两个未知数消去一个成为一个未知数(即消元法)。下面只介绍加减消去法。

〔例〕 解方程

$$\begin{cases}4x-3y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\2x+3y=12\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

上题中可以清楚地看出(1)式含有 $-3y$，(2)式含有 $+3y$，如果将(1)式和(2)式相加，则可把 y 项消去，即

$$\begin{array}{r} 4x-3y=6 \\ 2x+3y=12 \\ \hline 6x\qquad=18 \end{array}$$

解一元一次方程

$$6x=18,\ x=\frac{18}{6}=3$$

将 x 的数值代入联立方程式的任何一个方程式里，就可得 y 的值。

如代入(1)式

$$4\times3-3y=6$$

$$12-3y=6$$

$$-3y=6-12$$

$$-3y=-6$$

$$y=2$$

〔例〕 解方程

$$\begin{cases} 4x+3y=32 \\ 6x+2y=38 \end{cases}$$

此题中的(1)式和(2)式的 x 系数和 y 系数都没有相同的，所以用上题方法直接相加或相减都不可能消去一元，因此我们首先要把准备消去的未知数的系数变为相同后，再照上题方法消去。在此例中我们准备消去 x，则

(1) $\times3$ 得 $12x+9y=96$…………(3)

(2) $\times2$ 得 $12x+4y=76$…………(4)

将(3)－(4)得

$$5y=20$$

$$y=4$$

代入(1)式

$$4x+3\times4=32$$

$$4x=20$$
$$x=5$$

由上面两题解得结果，我们知道加减消去法的法则：

(1) 使两个方程式中的某个未知数(x或y)有一个相同的系数；

(2) 如果某个系数相同的未知数是同号(即+、+或—、—)，我们用减法，如果是异号，则用加法；

(3) 将所得的值代入原方程式，就可得另外一未知数之值。

五、因式分解

我们在算术里，学习分数约分的时候，要先学会质因数分解。代数里的因式分解，基本上也是乘法的倒转，不同的是以字母去代替数字，用式子来加以研究归纳，以便遇着这种形式的式子时，就可把它分成熟习的某种形式的两个因式。

1. 提出公因式

如果多项式的各项都含有系数的公约数或同字母的公因式时，我们可将公约数或公因式提出放在括号外。

例如　$a^2+ab+ac+ad=a(a+b+c+d)$

$$16x^4-8x^3+24x^2y=8x^2(2x^2-x+3y)$$
$$7m(a+b)+5n(a+b)=(a+b)(7m+5n)$$

2. 分组分解

有些式子粗看起来好象没有公约数或公因式可提出，但如果把它分成几组后还是可以提出的。

例如　$ac+bd+cd+ab=(ab+ac)+(bd+cd)$

$$=a(b+c)+d(b+c)=(b+c)(a+d)$$

$$x^3-3x^2-5x+15=(x^3-3x^2)-(5x-15)$$
$$=x^2(x-3)-5(x-3)=(x-3)(x^2-5)$$

3. 完全平方三项式

如果三项式是两数平方的和加上(或减去)这两个数的乘积的两倍时，我们叫它为完全平方三项式。

分解方法是将两数平方的根分解成两数之和(或差)的平方。

例如 $$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$
$$4a^2+20ab+25b^2=(2a)^2+2(2a)(5b)+(5b)^2$$
$$=(2a+5b)^2$$

4. 两项平方之差

两项平方的差可分解为两项的和乘两项的差。

例如 $$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$4b^2-1=(2b)^2-1^2=(2b+1)(2b-1)$$
$$4x^2+4x+1-m^2=[(2x)^2+2(2x)+1^2]-m^2$$
$$=(2x+1)^2-m^2$$
$$=(2x+1+m)(2x+1-m)$$

5. 立方之和或差

我们用添加辅助项的办法，以多项式分组来进行立方之和或差的分解。

例如

$$a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3\ (+a^2b-a^2b\ \text{等于不加不减})$$
$$=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)$$
$$=a^2(a+b)-b(a+b)(a-b)$$
$$=(a+b)[a^2-b(a-b)]$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$