微波电路例题解算

〔日〕 藤泽和男 冈本尚道 著

杨逢春 译　王积勤 校

国防工业出版社

原　序

近来，微波的应用日益广泛，从事微波的学生和技术人员逐渐增多。本书为了上述人员学习方便起见，搜集了从微波电路理论基础到实际方面的典型例题。书中虽已将重要理论基础列为“要点”，但其详细阐述可参看作者另著《微波电路》(电子通信学会大学讲座，コロナ公司)。

本书是一个入门，其着眼点是：充分理解基础理论，并培养解决实际问题的能力，因此例题尽量作到具体、实际。因作者水平所限，尚有不足之处，有待今后补正。

作　者

目　　录

1. 电磁场的基本关系式

1.1 电磁场的基本关系式

媒质的构成关系式

它规定了媒质的电磁性质，说明了电场 $\boldsymbol{E}$ 和电极化强度 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{E}$ 和电通量密度 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$、磁场 $\boldsymbol{H}$ 和磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 以及 $\boldsymbol{H}$ 和磁通量密度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系。

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})=\mu\boldsymbol{H} \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E} \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H} \tag{1.5}$$

$$\varepsilon=\varepsilon_0(1+\chi_e)=\varepsilon_0\varepsilon_r \tag{1.6}$$

$$\mu=\mu_0(1+\chi_m)=\mu_0\mu_r \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_r=1+\chi_e \tag{1.8}$$

$$\mu_r=1+\chi_m \tag{1.9}$$

在上式中，当 χ_e、χ_m、σ 与电磁场的大小无关时，称为线性媒质。当 χ_e、χ_m、σ，也即 ε、μ、σ 与电磁场的方向无关时，这些常数均为标量，称为各向同性媒质。上列诸式即为各向同性媒质的关系式。当任一的 χ_e、χ_m、σ，也即 ε、μ、σ 与电场或磁场的方向有关时，则称为各向异性媒质。在这种场合，这些常数均以张量表示，例如得出 $\boldsymbol{D}=\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E}$ 形式的关系式。

麦克斯韦方程式

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \tag{1.10}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} \tag{1.11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.12}$$

电流连续方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.13}$$

积分形式的电磁场方程式

$$\oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \text{（法拉第感应定律）} \tag{1.14}$$

式中　c——曲面积 S 的周界。

$$\oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}\right) \cdot d\boldsymbol{S} \text{（广义的安培定律）} \tag{1.15}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dv, \quad \oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \text{（高斯定律）} \tag{1.16}$$

式中 $d\boldsymbol{s}$——线元矢量，$d\boldsymbol{S}$——面元矢量。$d\boldsymbol{S}$ 的方向取为外法线矢量的方向。S 为体积 V 的表面，dv 为体积元。

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dv \text{（电荷守恒定律）} \tag{1.17}$$

坡印亭定理

若

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ 〔$\mathrm{W \cdot m^{-2}}$〕＝坡印亭矢量

$w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}$ 〔$\mathrm{J \cdot m^{-3}}$〕＝电存储能量密度

$w_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}$ 〔$\mathrm{J \cdot m^{-3}}$〕＝磁存储能量密度

则由麦克斯韦方程式可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\frac{\partial}{\partial t}(w_e+w_m)+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}=0 \tag{1.18}$$

$$\oint_S \boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{S}=-\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}dv-\frac{d}{dt}\int_V(w_e+w_m)dv \tag{1.19}$$

上式右边的第一项是在体积V中损耗的功率上加负号，也就是体积V中产生的功率。第二项是在单位时间内体积V中存贮能量的减少量，也就是减少率。因此根据能量守恒定律，公式左边为单位时间内通过V的表面S流出去的能量，所以$\boldsymbol{S}$是单位时间内流过单位面积的能量。上式称为坡印亭定理。

媒质界面上的边界条件

假设从媒质1到媒质2的界面的单位法线矢量为$\boldsymbol{n}$，则下式成立。

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0,\quad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{K} \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\xi,\quad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \tag{1.21}$$

式中$\boldsymbol{K}$是界面上的表面电流密度〔$\mathrm{A\cdot m^{-1}}$〕，ξ是界面上的表面电荷密度〔$\mathrm{C\cdot m^{-2}}$〕。

特别是在理想导体表面上，因有$\boldsymbol{E}_1=0$，$\boldsymbol{H}_1=0$，$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}$，可得

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{K} \tag{1.20$'$}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\xi,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.21$'$}$$

1.2 正弦波电磁场的基本关系式

当电磁场以角频率$\omega=2\pi f$随时间作正弦振荡时，对于实际的观测量$\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$，我们引进满足下式的复

振幅 $\mathbf{A}(x, y, z)$，并加以讨论。

$$A(x, y, z, t) = \mathrm{Re}[\mathbf{A}(x, y, z)e^{j\omega t}] \tag{1.22}$$

式中 Re 表示实部。本书中实数矢量一律采用英文斜体书写，而复数矢量则用英文正体书写，以示区别。对于复振幅，以下各关系式成立。

麦克斯韦方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} = -j\omega\mu\mathbf{H} \tag{1.23}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} \tag{1.24}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.25}$$

电流连续性方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + j\omega\rho = 0 \tag{1.26}$$

坡印亭定理

若

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \text{复数坡印亭矢量}$$

$$\overline{w}_e = \frac{1}{4}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* = \text{电存储能量密度的时间平均值}$$

$$\overline{w}_m = \frac{1}{4}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^* = \text{磁存储能量密度的时间平均值}$$则根据麦克斯韦方程式，可得出坡印亭定理如下：

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + 2j\omega(\overline{w}_m - \overline{w}_e) + \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* = 0 \tag{1.27}$$

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot dS = -\int_V \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dv - 2j\omega \int_V (\overline{w}_m - \overline{w}_e) dv \tag{1.28}$$

上式右边第一项是在体积V中损耗的功率（时间平均值），前面加负号表示V中产生的功率(时间平均值)。因此根据能量

守恒定律，公式左边的实部相当于通过V的表面S流出去的平均功率，因而 Re(**S**) 是通过单位面积的平均功率。

〔**例题1.1**〕 试证明均匀的各向同性导电媒质中，对于静电场和正弦电磁场来说，$\rho=0$。

解答 依题意ε和σ是与位置无关的常数，因此

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=\sigma\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

将上式代入公式（1.13），则得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

此微分方程式的解按下式呈指数函数衰减

$$\rho(x,\ y,\ z,\ t)=\rho(x,\ y,\ z,\ t')e^{-\sigma/\varepsilon\cdot(t-t')}$$

因而在某一时刻t'，由于某种原因产生的ρ，将随着时间趋于消灭（$t\to\infty$，$\rho\to0$），这样，ρ只能在过渡过程中产生，而在静电场中ρ是不可能存在的。另外，很明显：正弦振荡不满足上述微分方程式，因此对于正弦电磁场$\rho=0$。

〔**例题1.2**〕 试推导出在均匀的各向同性媒质中，电场或磁场满足下列波动方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{1.29}$$

或导出对于正弦电磁场，下式是成立的

$$\nabla^2\mathbf{E}-j\omega\mu\sigma\mathbf{E}+\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E}=0 \tag{1.30}$$

解答 取公式（1.10）的旋度，再将公式（1.11）代入等式右边，则得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

根据矢量分析公式（Ⅰ.19)〔见附录〕

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

利用〔例题 1.1〕的结果：$\rho=0$ 时，$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，因此

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

同理，对于磁场可得出同样形式的方程式。在此公式中用 $j\omega$ 代替 $\partial/\partial t$，便得出正弦电磁场的波动方程式。

〔例题1.3〕 电场的复振幅 E 可分别采用直角坐标分量和柱坐标分量写成下式

$$\mathbf{E}\equiv\boldsymbol{i}_xE_x+\boldsymbol{i}_yE_y+\boldsymbol{i}_zE_z\equiv\boldsymbol{i}_rE_r+\boldsymbol{i}_\varphi E_\varphi+\boldsymbol{i}_zE_z$$

式中 $\boldsymbol{i}_x$，$\boldsymbol{i}_y$，$\boldsymbol{i}_z$，$\boldsymbol{i}_r$，$\boldsymbol{i}_\varphi$ 分别为 x，y，z，r，φ 坐标轴方向的单位矢量。试证明这时直角坐标分量满足下列方程式

$$\nabla^2E_x-j\omega\mu\sigma E_x+\omega^2\varepsilon\mu E_x=0 \quad 等等$$

而柱坐标分量 E_r 和 E_φ 则不满足上列关系式，也就是说证明存在下列关系式

$$\nabla^2E_r-j\omega\mu\sigma E_r+\omega^2\varepsilon\mu E_r\neq0$$

$$\nabla^2E_\varphi-j\omega\mu\sigma E_\varphi+\omega^2\varepsilon\mu E_\varphi\neq0$$

解答 因为 $\boldsymbol{i}_x$，$\boldsymbol{i}_y$，$\boldsymbol{i}_z$ 均为与位置无关的常数矢量，故

$$\nabla^2\boldsymbol{i}_x=\nabla^2\boldsymbol{i}_y=\nabla^2\boldsymbol{i}_z=0$$

因此得

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{E}&=\nabla^2(\boldsymbol{i}_xE_x+\boldsymbol{i}_yE_y+\boldsymbol{i}_zE_z)\\&=\boldsymbol{i}_x\nabla^2E_x+\boldsymbol{i}_y\nabla^2E_y+\boldsymbol{i}_z\nabla^2E_z\end{aligned}$$

将上式代入〔例题 1.2〕的波动方程式，可得

$$\boldsymbol{i}_x(\nabla^2E_x-j\omega\mu\sigma E_x+\omega^2\varepsilon\mu E_x)+\boldsymbol{i}_y(\nabla^2E_y-j\omega\mu\sigma E_y$$
$$+\omega^2\varepsilon\mu E_y)+\boldsymbol{i}_z(\nabla^2E_z-j\omega\mu\sigma E_z+\omega^2\varepsilon\mu E_z)=0$$

要使上式成立，其坐标分量必须为 0，因此可得

$$\nabla^2 E_x - j\omega\mu\sigma E_x + \omega^2\varepsilon\mu E_x = 0 \quad \text{等等}$$

与此相反，$\boldsymbol{i}_r$ 和$\boldsymbol{i}_\varphi$ 是位置的函数〔见附录中的公式(Ⅰ.28)〕。因此得

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla^2(\boldsymbol{i}_r E_r + \boldsymbol{i}_\varphi E_\varphi + \boldsymbol{i}_z E_z)$$

$$= E_r \nabla^2 \boldsymbol{i}_r + \boldsymbol{i}_r \nabla^2 E_r + E_\varphi \nabla^2 \boldsymbol{i}_\varphi + \boldsymbol{i}_\varphi \nabla^2 E_\varphi + \boldsymbol{i}_z \nabla^2 E_z$$

而

$$\nabla^2 \boldsymbol{i}_r = \nabla^2(\boldsymbol{i}_x \cos\varphi + \boldsymbol{i}_y \sin\varphi)$$

$$= \boldsymbol{i}_x \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\cos\varphi) + \boldsymbol{i}_y \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\sin\varphi)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\boldsymbol{i}_r$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{i}_\varphi = \nabla^2(-\boldsymbol{i}_x \sin\varphi + \boldsymbol{i}_y \cos\varphi)$$

$$= \boldsymbol{i}_x \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(-\sin\varphi) + \boldsymbol{i}_y \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\cos\varphi)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\boldsymbol{i}_\varphi$$

将上列各式代入〔例题 1.2〕的波动方程式，可得

$$\boldsymbol{i}_r\left(\nabla^2 E_r - j\omega\mu\sigma E_r + \omega^2\varepsilon\mu E_r - \frac{1}{r^2}E_r\right)$$

$$+ \boldsymbol{i}_\varphi\left(\nabla^2 E_\varphi - j\omega\mu\sigma E_\varphi + \omega^2\varepsilon\mu E_\varphi - \frac{1}{r^2}E_\varphi\right)$$

$$+ \boldsymbol{i}_z(\nabla^2 E_z - j\omega\mu\sigma E_z + \omega^2\varepsilon\mu E_z) = 0$$

假设上式的各坐标分量为 0，则得

$$\nabla^2 E_r - j\omega\mu\sigma E_r + \omega^2\varepsilon\mu E_r = \frac{1}{r^2}E_r \neq 0$$

$$\nabla^2 E_\varphi - j\omega\mu\sigma E_\varphi + \omega^2\varepsilon\mu E_\varphi = \frac{1}{r^2}E_\varphi \neq 0$$

〔**例题1.4**〕 很明显，若在公式（1.30）中，令 $\sigma=0$，方程就成为均匀各向同性无损耗媒质中的波动方程式

$$\nabla^2\mathbf{E}+\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E}=0 \tag{1.31}$$

现在考虑矢量函数 $\mathbf{E}=\mathbf{A}e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$，其中 $\mathbf{A}$ 为常数矢量，$\boldsymbol{k}$ 为实数矢量，$\boldsymbol{r}$ 为动径矢量。试求：

（a）该矢量函数满足波动方程式的条件；

（b）此电场的复振幅矢量作为麦克斯韦方程式的解的条件；

（c）在满足上述条件下，由麦克斯韦方程式求出对应于 $\mathbf{E}$ 的磁场振幅 $\mathbf{H}$；

（d）讨论具有上述 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的电磁波的性质。

解答 （a）令

$$\boldsymbol{r}\equiv\boldsymbol{i}_x x+\boldsymbol{i}_y y+\boldsymbol{i}_z z$$

$$\boldsymbol{k}\equiv\boldsymbol{i}_x k_x+\boldsymbol{i}_y k_y+\boldsymbol{i}_z k_z$$

则

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=xk_x+yk_y+zk_z$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=-jk_x e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=-k_x^2 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \quad \text{等等}$$

故

$$\nabla(e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=-j\boldsymbol{k}e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\nabla^2\mathbf{E}=\mathbf{A}\nabla^2 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\mathbf{A}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$=-\mathbf{A}k^2 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=-k^2\mathbf{E}$$

式中 $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$，因此满足波动方程式的条件是

$$k^2=\omega^2\varepsilon\mu, \qquad k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{1.32}$$

（b）由麦克斯韦方程得 $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，因此

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=0$$

$$[A_x(-jk_x)+A_y(-jk_y)+A_z(-jk_z)]e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=0$$

故

$$A_xk_x+A_yk_y+A_zk_z=0$$

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{k}=0 \quad 或 \quad \mathbf{A}\perp\boldsymbol{k} \tag{1.33}$$

（c）$\mathbf{H}=-\dfrac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\mathbf{E}=\dfrac{1}{j\omega\mu}\mathbf{A}\times\nabla(e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})$

$$\nabla(e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\left(\boldsymbol{i}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{i}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{i}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$=-j(\boldsymbol{i}_xk_x+\boldsymbol{i}_yk_y+\boldsymbol{i}_zk_z)e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=-j\boldsymbol{k}e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

因此

$$\mathbf{H}=-\frac{1}{\omega\mu}\mathbf{A}\times\boldsymbol{k}e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\mathbf{E}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\boldsymbol{i}_k\times\mathbf{E} \tag{1.34}$$

式中 $\boldsymbol{i}_k$ 为 $\boldsymbol{k}$ 矢量方向的单位矢量。此外，在上式中还利用了公式（1.32）的关系式。

（d）显然，下列关系式是成立的

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}\perp\boldsymbol{k},\quad \mathbf{H}\perp\boldsymbol{k},\quad \mathbf{E}\perp\mathbf{H}\\ \mathbf{S}=\dfrac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*=\boldsymbol{i}_k\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}|\mathbf{E}|^2,\quad \mathbf{S}/\!/\boldsymbol{k}\end{array}\right\} \tag{1.35}$$

现在考察下式的波动量，其中 $\boldsymbol{i}_E$ 为 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{E}$ 方向的单位矢量，而 $\mathbf{E}$ 为复振幅

$$\mathbf{E}e^{j\omega t}=\mathbf{A}e^{j\omega t-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{i}_E|A|e^{j\omega t-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+j\theta_A}$$

对应于此复数量的实际观测量，可由下式给定

$$\mathrm{Re}(\mathbf{E}e^{j\omega t})=\boldsymbol{i}_E|A|\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\theta_A)$$

很明显，上式表示波动，其等相位面由下式给出

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=kr\cos\varphi=\text{const} \tag{1.36}$$

此等相位面为垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面，如图 1.1 所示。因此具有某

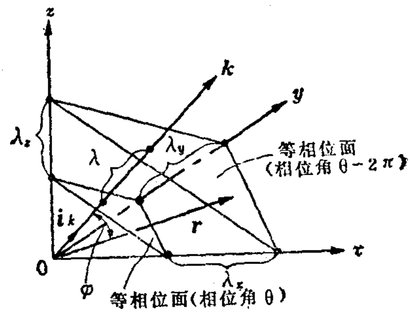

图1.1 等相位面和波数矢量 $\boldsymbol{k}$

一特定相位角 θ 的波面，随着时间 t 的增加显然是沿着 $\boldsymbol{k}$ 的方向传播的。根据公式

$$\omega\Delta t-k\Delta r=0, \quad (\varphi=0)$$

其传播速度可写成

$$v_{\mathrm{ph}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}\bigg|_{\varphi=0}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \tag{1.37}$$

假设传播波长为 λ，则

$$\lambda=\frac{v_{\mathrm{ph}}}{f}=\frac{2\pi}{k} \qquad \text{或者} \quad k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{1.38}$$

因此 k 称为波数，$\boldsymbol{k}$ 称为波数矢量。

这里所得到的电磁波为一平面波，它是沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的，且具有垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的等相位面，其传播速度等于媒质中的光速，而且是电场和磁场均为垂直于传播方向 $\boldsymbol{i}_k$ 的所谓 TEM 波。此外，公式 (1.35) 还表明：由 Re(S)给定的传输功率也是沿着 $\boldsymbol{k}$ 方向传输的。

〔注1〕 必须注意，由上例可知：麦克斯韦方程式的解满足波动方程式，但波动方程式的解不一定是麦克斯韦方程式的解。

〔注2〕 所谓平面波(plane wave) 通常是指在垂直于传播轴的平面内相位不变，而且在此平面内电场和磁场的大小也不变的波，为了区别起见，将这样的平面波特别称之为均匀平面波 (uniform plane wave)，如果单说平面波也可以看为相位面是平面的波，本书中如不特别说明，所谓平面波均指均匀平面波而言。

〔**例题1.5**〕 有损耗的均匀各向同性媒质中的波动方程式可由公式（1.30）给出。现在考虑矢量函数

$$\mathbf{E}=\mathbf{A}e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}}$$

其中 **A** 和 **γ** 均为复常数矢量，$\boldsymbol{r}$ 为动径矢量。试求出：

（a）此矢量函数满足波动方程式的条件；

（b）该矢量在什么条件下才是麦克斯韦方程式解的电场复振幅；

（c）在满足上述条件下，由麦克斯韦方程式求出对应于 **E** 的磁场振幅 **H**；

（d）讨论具有上述 **E** 和 **H** 的电磁波的性质。

解答（a）

$$\boldsymbol{\gamma}\equiv\boldsymbol{i}_x\gamma_x+\boldsymbol{i}_y\gamma_y+\boldsymbol{i}_z\gamma_z\equiv\boldsymbol{i}_\gamma\gamma\equiv\boldsymbol{i}_\gamma(\alpha+j\beta) \qquad (1.39)$$

$$\nabla^2\mathbf{E}=\mathbf{A}\nabla^2(e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}})=-\mathbf{A}(\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma_z^2)e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}}=-\gamma^2\mathbf{E}$$

将上式代入波动方程式（1.30），则得

$$\gamma^2=j\omega\mu\sigma-\omega^2\varepsilon\mu,\quad \gamma=\omega\sqrt{\left(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\varepsilon\mu} \qquad (1.40)$$

根据上式求出 $\gamma=\alpha+j\beta$ 的实部 α 和虚部 β，则得

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2-\beta^2&=-\omega^2\varepsilon\mu\\ 2\alpha\beta&=\omega\mu\sigma\end{aligned}\right\}$$

解上列方程式，可得

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\frac{\sqrt{1+(\sigma/\omega\varepsilon)^2}-1}{2}\right]^{1/2}\\ \beta &= \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\frac{\sqrt{1+(\sigma/\omega\varepsilon)^2}+1}{2}\right]^{1/2}\end{aligned}\right\}\tag{1.41}$$

这就是满足波动方程式的条件。

（b）根据 $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，因而 $\mathbf{A}\cdot\nabla(e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}})=0$

而 $$\nabla(e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}})=-\boldsymbol{\gamma}e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}}$$

故 $$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\gamma}=0,\qquad \mathbf{A}\perp\boldsymbol{\gamma}\tag{1.42}$$

（c）$$\mathbf{H}=-\frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\mathbf{E}=\frac{1}{j\omega\mu}\mathbf{A}\times\nabla(e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}})$$

$$=\frac{1}{j\omega\mu}\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{E}=\frac{\gamma}{j\omega\mu}\boldsymbol{i}_\gamma\times\mathbf{E}\tag{1.43}$$

（d）显然

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{E}\perp\boldsymbol{\gamma},\qquad \mathbf{H}\perp\boldsymbol{\gamma},\qquad \mathbf{E}\perp\mathbf{H}\\ &\mathbf{S}=\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*=\boldsymbol{i}_\gamma\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\gamma}{j\omega\mu}\right)|\mathbf{E}|^2\\ &\mathbf{S}\,/\!/\,\boldsymbol{\gamma}\end{aligned}\right\}\tag{1.44}$$

因此这一电磁波与〔例题 1.4〕相同，乃是沿 $\boldsymbol{\gamma}$ 方向传播的平面波，它具有垂直于 $\boldsymbol{\gamma}$ 的等相位面，而且 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的大小在此平面内不变。与〔例题 1.4〕不同的地方是，在沿 $\boldsymbol{\gamma}$ 方向传播时，电磁场的振幅按指数函数 $\exp(-\alpha\boldsymbol{i}_\gamma\cdot\boldsymbol{r})$ 衰减，而波的相位则是沿 $\boldsymbol{\gamma}$ 方向以指数 $\exp(-j\beta\boldsymbol{i}_\gamma\cdot\boldsymbol{r})$ 形式变化的。另外，电磁波的能量也是沿 $\boldsymbol{\gamma}$ 方向传播的。

〔注 3〕 γ——传播常数，α——衰减常数，β——相位常数。

〔注 4〕 必须注意：本例题的解是把〔例题1.4〕解中的 ε 用

$$\varepsilon_{\text{eff}}=\varepsilon+\sigma/j\omega\tag{1.45}$$

来代替，并采用了 $jk\to j\omega\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}\mu}=\gamma$ 的置换关系而得到的。

〔**例题1.6**〕 在均匀无损耗各向同性媒质中波动方程式可由公式（1.31）给出。现在我们采用柱坐标系（r，φ，z），来考察下列矢量函数

$$\mathbf{E}=\boldsymbol{i}_z f(r)$$

式中 $f(r)$ 仅为 r 的函数，一般为复数。

（a）试确定 $f(r)$ 使此矢量函数满足波动方程式；

（b）根据这个解建立两个电磁波，它以上述矢量函数作为电场的振幅，而相位则分别沿 r 增加和减小的方向传播，试讨论其性质。

解答 （a）根据〔例题1.3〕的结果和附录的公式（Ⅰ.32）可得

$$\nabla^2\mathbf{E}=\boldsymbol{i}_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)=\boldsymbol{i}_z\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

将上式代入波动方程式，则得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+k^2 f=0,\quad 其中\ k^2=\omega^2\varepsilon\mu$$

上述公式为0阶贝塞尔微分方程式，因此它的解一般可写成

$$f(r)=AJ_0(kr)+BN_0(kr)$$

式中 J_0 为0阶贝塞尔函数，N_0 为0阶纽曼（ノイマン）函数。由此得出了波动方程式的解。

（b）对于以上所得到的 $\mathbf{E}$，显然满足 $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，因此这一矢量函数 $\mathbf{E}$ 就成为满足麦克斯韦方程式的电场振幅。我们考察下列0阶汉克尔函数

$$H_0^{(1)}(kr)=J_0(kr)+jN_0(kr)$$

$$H_0^{(2)}(kr)=J_0(kr)-jN_0(kr)$$