经济管理丛书

企业最优决策方法

——线性规划在企业管理中的应用

孟宪礼　张广全　编

中国经济出版社

内 容 简 介

作为企业的生产组织和经营管理者，首要的问题是，如何科学地安排人力、设备、资金和时间，以获得最佳的经济效益。而线性规划则是你解决上述问题的最有效的工具。本书通过大量的实例详细介绍了线性规划的理论，方法及对各种实际问题的应用，以使读者能够熟练地掌握它并在企业管理过程中更好地运用它。

读者对象：经济管理干部、企业干部职工，大专院校有关专业师生。

责任编辑：杨 岗 高曼宏
封面设计：木 青

企业最优决策方法
——线性规划在企业管理中的应用
孟宪礼 张广全 编
中国经济出版社出版发行
（北京市百万庄北街3号）
各地新华书店经销
通县曙光印刷厂印刷
787×1092毫米 1/32 7.25印张 157千字
1990年8月第1版 1990年8月第1次印刷
印数：1—4700
ISBN 7-5017-0367—1/F 312
定价：3.75元

目　录

第一章　线性规划的基本概念

第一节　线性规划简介

线性规划是运筹学的重要分支之一。运筹学的概念最早是在第二次世界大战中提出的。当时，英国军事管理部门邀请了一批科学家来研究空警预防系统的有效使用问题；1942年，美国也成立了运筹学小组，它们的主要任务是研究军事上的问题，诸如新的作战方案的产生，埋设水雷的计划，飞机的出机时间及编队等，同时也包括一些较复杂的逻辑问题的研究。他们的工作解决了许多复杂的战略和战术问题，取得了异常显著的成果。由于运筹学在军事上成功的应用，二次世界大战后，工业及社会管理学家也利用这种方法来解决他们遇到的问题。由于广泛地运用和研究，加上现代数字计算机的出现和发展，使得运筹学这门学科在几十年的时间内得以飞速发展，成为一门包含许多分支的宠大学科。以《运筹学国际文摘》收集编写的各国运筹学论文的内容为例，按技术分类就有五十多种，主要有规划论（包括线性规划、非线性规划、动态规划、目标规划等）、决策论、对策论、排队论、图论、存储论等分支。

线性规划作为运筹学的一个主要分支，是研究较早、理论较完整、应用最广泛的一门科学。1939年，苏联科学家康托洛维奇发表了《生产组织与计划中的数学方法》一书；1947年，美国人但泽提出了单纯形算法和许多有关的理论，为线

性规划奠定了理论基础。在这之后，通过近十年的研究，又提出了许多有关线性规划的问题和方法，充实了线性规划的内容，到五十年代，线性规划已成为经济学家们分析问题解决问题的主要工具，并被广泛应用于工业、农业、财贸、交通运输和管理等各个领域。据美国《幸福》杂志对全美五百家大公司的调查，线性规划的应用范围名列前茅，有85%的公司频繁地使用线性规划。那么，线性规划究竟解决了那些问题呢？

在人们进行生产的组织和经营管理中，首要的问题是如何科学地分配人力、物力、资金和时间，以获得最佳的经济效益。这主要包括两个方面，一是在一项任务确定后，如何以最低限度的成本（如人力、物力、资金和时间等）去完成这一任务；二是如何在现有条件下进行组织和安排，以完成更多的工作。这些就是线性规划所要解决的问题。

第二节　线性规划问题的数学模型

要利用线性规划的方法解决实际问题，首先要建立其数学模型。数学模型是描述实际问题共性的抽象的数学形式，因此可以利用纯数学的方法进行研究，从而得到实际问题的性质及其解决的办法。为了在建立数学模型时叙述的方便，我们先引入三个概念。

对一个实际问题进行决策，就是要确定一组变量的取值（如，人员的数量、时间的长短、产品产量的多少，投入资金的数额等等），换句话说，当这组变量的值取定之后，决策方案也就随之而定，我们就称这组变量为决策变量。

决策变量的确定是建立数学模型的关键。

在对一个问题进行决策时，往往要受到实际条件的限

制，这些限制条件称为约束条件。在线性规划问题的数学模型中，约束条件都是决策变量的线性方程或线性不等式，分别称之为约束方程和约束不等式。

对每个问题的决策都有一个目标，这个目标用数学形式表示出来就称为目标函数。在线性规划问题的数学模型中，目标函数是决策变量的线性函数。一般地，对实际问题进行决策，就是求目标函数的最小值（如，最小成本等）或最大值（如，最大利润等）。

下面我们通过一些实际例子介绍建立线性规划问题的数学模型的方法。

一、运输问题

〔例一〕 有A_1，A_2两个苹果基地，产量分别为50吨和70吨，联合供应B_1，B_2，B_3三个销地，这三个销地的销售量经预测分别为40吨，50吨和30吨。两个产地到三个销地的单位运价如下表所示

表1-1 运价表(单位：元/吨)

产地 \ 单位运价 \ 销地	B_1	B_2	B_3
A_1	60	30	50
A_2	20	70	30

问每个产地向每个销地各发货多少，才能使总的运费最少？

解：1）在该问题中，所要确定的量是各产地运往各销地的苹果数量，即决策变量是运输量。设 x_{ij}($i=1,2$；$j=1$,

2,3）分别表示由产地A_i运往销地B_j的苹果数量。

2）在解决该问题的过程中，要受到如下条件限制，即约束条件：

i）各产地运出的数量应等于其产量，即

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=50 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=70 \end{cases}$$

ii）各销地运进的数量应等于其当地预测销售量，即

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=40 \\ x_{12}+x_{22}=50 \\ x_{13}+x_{23}=30 \end{cases}$$

iii）从各产地运往各销地的数量不能为负值，即

$$x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2;\ j=1,2,3)$$

3）该问题的目的是运价最低，所以运价是目标函数，即目标函型为

$S=60x_{11}+30x_{12}+50x_{13}+20x_{21}+70x_{22}+30_{23}$，所求问题是计算S在上述约束条件下的最小值。因此，该问题的数学模型为：

求变量$x_{ij}(i=1,2;\ j=1,2,3)$的一组值，使得在约束条件：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=50 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=70 \\ x_{11}+x_{21} \qquad\quad =40 \\ x_{12}+x_{22} \qquad\quad =50 \\ x_{13}+x_{23} \qquad\quad =30 \\ x_{ij}\geqslant 0(i=1,2;\ j=1,2,3) \end{cases}$$

下，目标函数

$$S=60x_{11}+30x_{12}+50x_{13}+20x_{21}+70x_{22}+30x_{23}$$

取得最小值，我们简记为：

求　$\min S=60x_{11}+30x_{12}+50x_{13}+20x_{21}+70x_{22}+30_{23}$

$$
\text{约束条件}\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}=50\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}=70\\
x_{11}+x_{21}\qquad\quad=40\\
x_{12}+x_{22}\qquad\quad=50\\
x_{13}+x_{23}\qquad\quad=30\\
x_{ij}\geqslant 0(i=1,2;\ \ j=1,2,3)
\end{cases}
$$

其中，min表示取最小值。

〔例二〕例一的一般形式为：设某种产品有m个产地A_1，A_2，…Am，产量分别为a_1，a_2，…a_m（吨），有几个销地B_1，B_2，…，B_n，销量分别为b_1，b_2，…，b_n（吨）。如果由产地A_i运往销地B_j的单位运价为C_{ij}（元/吨），在产销平衡的情况下，应如何调运才能使运费最省？

解：设x_{ij}表示由产地A_i运往销地B_j的数量（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$），则该问题的数学模型为：

求变量x_{ij}的一组值，使得在约束条件

$$
\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1\\
x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2\\
\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\
x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m
\end{cases}
$$

（即各产地运出的数量应等于其产量）；

$$
\begin{cases}
x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1\\
x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2\\
\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\
x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n
\end{cases}
$$

（即各销地收到的数量应等于其销售量）；

$$x_{ij} \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

（即由各产地到各销地的运输量不能为负）

下，目标函数

$$S=C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+\cdots+C_{1n}x_{1n}+C_{21}x_{21}+C_{22}x_{22}$$
$$+\cdots+C_{2n}x_{2n}+\cdots+C_{m1}x_{m1}+C_{m2}x_{m2}+\cdots+C_{mn}x_{mn}$$

取得最小值。亦即

$$\text{求}\quad \min S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

在运输问题中，如果没有产销平衡这一条件，则有两种可能，一种是产大于销，另一种是产小于销。

当产大于销时，运输问题的数学模型为：

$$\text{求}\quad \min S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i(i=1,2,\cdots,m)$$

（即各产地运出的数量之和不超过它的产量）

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

（即各销地运进的数量之和等于实际销量）

$$x_{ij}\geqslant 0\quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

（即各产地运往各销地的数量不能为负值）。

当产小于销时，这一问题的数学模型为：

求$\min S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ (i=1,2,\cdots,m)$$

（即各产地运出的数量之和应等于它的产量）；

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\leqslant b_j\ (j=1,2,\cdots n)$$

（即各销地运进的数量之和不超过它的销量）；

$$x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots n)$$

（即各产地运往各销地的数量不能为负值）。

二、农作物布局问题

〔例三〕某农场要在$A_1,A_2,\cdots,A_m$这m块土地上种植$B_1,B_2,\cdots,B_n$ n种农作物，已知A_i块土地的面积为a_i亩（$i=1,2,\cdots,m$）；B_j种农作物计划播种b_j亩（$j=1,2,\cdots,n$），B_j种农作物在A_i块土地上的单位产值为C_{ij}（元/亩），在现有土地面积和计划播种面积相等的情况下，应如何安排种植计划，才能使总产值最高？

解：1）该问题所要确定的量是每块土地上种植每种农作物的面积数，这就是决策变量。设在A_i块土地上种植B_j种农作物x_{ij}亩（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）。

2）在该问题中，要受到如下的条件限制：

i）在一块土地上各种农作物的播种面积之和应等于该块土地的实际面积，即

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 \\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \end{cases}$$

ii）一种农作物在各块土地上的播种面积之和应等于该种农作物的计划播种面积，即

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \end{cases}$$

iii）每种农作物在各块土地上的播种面积不能为负值．即

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

3）该问题的目标是总产值最高，因此总产值是目标函数，即目标函数为：

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$$

所求问题是求S的最大值。

因此，该问题的数学模型为：

$$\text{求}\quad \max\ S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad (j=1,2,\cdots,n) \\ x_{ij}\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

其中，max表示取最大值。

在此问题中，如果令：

$$S'=-S=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$$

则对于新的目标函数S′，其数学模型与运输问题的数学模型

完全相同。我们就把具有这种数学模型的问题统称为运输问题。又称康托洛维奇——希区柯克问题，或简称为康——希问题。

应当指出，对于农作物布局问题也有实际土地面积与计划播种面积不等的情况，其解决方法与运输问题完全相同，此处不再赘述。

三、配料问题

〔例四〕某饲料厂要配制一种鸡饲料，每袋0.5公斤，要求其中钙的含量在0.8%到1.2%之间，蛋白质含量至少为22%，粗纤维含量不超过5%，他们打算使用石灰石（碳化钙），谷物和大豆粉来配制。原料的价格每公斤分别为0.03元、0.1元和0.2元，并且已知它们对三种成分的含量如下表所示：

表1-2

成份 / 原料 每公斤含量	钙	蛋白质	粗纤维
石灰石	0.380	0	0
谷物	0.001	0.09	0.02
大豆粉	0.002	0.5	0.08

问应如何进行调配，才能既使饲料符合要求，又能使成本最低？

解：1）该问题所要确定的量是每袋饲料所用石灰石、谷物和大豆粉的数量，这就是决策变量。设每袋饲料使用石灰石、谷物和大豆粉分别为x_1，x_2，x_3公斤。

2）在该问题中，要受到如下条件的限制：

i）混合后的饲料各种成分的含量必须符合要求，即：

$$\begin{cases}0.380x_1+0.001x_2+0.002x_3\geqslant 0.008\times 0.5\\0.380x_1+0.001x_2+0.002x_3\leqslant 0.012\times 0.5\\\qquad\qquad 0.09x_2+0.5x_3\geqslant 0.22\times 0.5\\\qquad\qquad 0.02x_2+0.08x_3\leqslant 0.05\times 0.5\end{cases}$$

ii）所用原料数的总和等于一袋的重量，即

$$x_1+x_2+x_3=0.5$$

iii）每种原料的用量不能为负值，即

$$x_i\geqslant 0\quad(i=1,2,3)$$

3）该问题的目的是成本最低，因此，成本就是目标函数，即

$$S=0.03x_1+0.1x_2+0.2x_3$$

所求问题是计算S的最小值。

因此，该问题的数学模型为：

求 $\min\ S=0.03x_1+0.1x_2+0.2x_3$

$$\begin{cases}0.380x_1+0.001x_2+0.002x_3\geqslant 0.004\\0.380x_1+0.001x_2+0.002x_3\leqslant 0.006\\\qquad\qquad 0.09x_2+0.5x_3\geqslant 0.11\\\qquad\qquad 0.02x_2+0.08x_3\leqslant 0.025\\x_1+\quad x_2+\quad x_3=0.5\\x_i\geqslant 0\quad(i=1,2,3)\end{cases}$$

〔例五〕配料问题的一般形式为，设有$A_1,A_2,\cdots,A_m$种原料，配制含有几种成分B_1，$B_2,\cdots,B_n$的产品，要求产品中各种成分的含量不低于$a_1,a_2\cdots,a_n$；不高于$b_1,b_2,\cdots,b_n$；B_j种成分在A_i种原料中的单位含量为C_{ij}，各种原料的单位价格依次为$d_1,d_2,\cdots,d_m$，问如何调配原料，才能既使产品符合要求，又使成本最低？

解：设x_i表示每单位产品中原料A_i的使用量（$i=1,2,\cdots,m$），则其数学模型为

求 $\min S=\sum_{i=1}^{m} d_i x_i$

$$\begin{cases} a_1 \leqslant C_{11}x_1+C_{21}x_2+\cdots+C_{m1}x_m \leqslant b_1 \\ a_2 \leqslant C_{12}x_1+C_{22}x_2+\cdots+C_{m2}x_m \leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n \leqslant C_{1n}x_1+C_{2n}x_2+\cdots+C_{mn}x_m \leqslant b_n \\ x_1+x_2+\cdots+x_m=1 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m) \end{cases}$$

四、生产的组织和计划问题

〔例六〕（资源利用）某冷饮厂用A_1，A_2，A_3三种原料配制B_1，B_2两种饮料，其中B_1种饮料每袋需要A_1，A_2，A_3三种原料各100克，75克和75克，B_2种饮料每袋需要A_1，A_2，A_3三种原料各100克，50克和100克，而该厂现有A_1，A_2，A_3三种原料各为60公斤，30公斤和45公斤，B_1，B_2两种饮料每袋能获利0.5元和0.4元，在该厂产品全部能销售的情况下，B_1，B_2两种饮料各生产多少袋才能获利最大？

解：1）该问题所要确定的量是B_1，B_2两种饮料的产量，这就是决策变量。设配制B_1，B_2两种饮料的袋数分别为x_1和x_2。

2）该问题要受到如下条件的限制：

i）配制饮料所用原料数不能超过现有原料数，即

$$\begin{cases} 0.1x_1+0.1x_2 \leqslant 60 \\ 0.075x_1+0.05x_2 \leqslant 30 \\ 0.075x_1+0.1x_2 \leqslant 45 \end{cases}$$

ii）每种饮料的生产数量不能为负值，即

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

3）该问题的目的是获利最大，因此，利润是目标函数，即

$$S = 0.5x_1 + 0.4x_2$$

所以，该问题的数学模型为：

求 $\max S = 0.5x_1 + 0.4x_2$

$$\begin{cases} 0.1x_1 + 0.1x_2 \leq 60 \\ 0.075x_1 + 0.05x_2 \leq 30 \\ 0.075x_1 + 0.1x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

〔例七〕（时间利用）某工厂生产甲、乙两种产品，每件纯利润为6元和4元，生产这两种产品每件需机器工作时间2小时和3小时，需人力工作时间4小时和2小时。已知该工厂每天能提供260小时的机器工作时间和280小时的人力工作时间，问应如何安排生产，才能使工厂获利最大？

解：1）该问题所需确定的量是每天生产甲、乙两种产品的数量，这就是决策变量。设每天生产甲、乙两种产品各x_1件和x_2件。

2）在该问题中，要受到如下条件的限制：

i）每天生产两种产品所用机器工作时间和人力工作时间不能超过所能提供的时间，即

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 260 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 280 \end{cases}$$

ii）两种产品所生产的数量不能为负值，即

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

3）该问题的目的是利润最大，因此，利润是目标函数，即

$$S=6x_1+4x_2$$

所以，该问题的数学模型为：

求 $\max\ S=6x_1+4x_2$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 260\\ 4x_1+2x_2\leqslant 280\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

〔例八〕（机器加工配套问题）某工厂用$A_1,A_2,\cdots,A_m$这m种机床生产由$B_1,B_2,\cdots B_n$种零件组成的机器，如果每台机器所用各种零件的数目分别为$d_1,d_2,\cdots,d_n$，机床A_i每小时生产零件B_j的件数为C_{ij}，问应如何安排生产才能使工厂生产的机器最多？

解：1）该问题所要决定的量是每台机器生产各种零件的时间数，这就是决策变量。设x_{ij}表示机床A_i生产零件B的时间数（小时）（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,m$）。

2）该问题要受到如下条件的限制：

i）每台机床生产各种零件时间的总和应等于一天的实际工作时数（以24小时计算），即

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=24\ (i=1,2,\cdots,m)$$

ii）各种机床所生产的各种零件的总数应与一台机器所需的各种零件数对应成比例，即生产的各种零件数恰好装配成整套机器，即

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}C_{i1}x_{i1}}{d_1}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}C_{i2}x_{i2}}{d_2}=\cdots=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}C_{in}x_{in}}{d_n}$$

iii）每台机床安排生产每种零件的时间数不能为负值，即

$$x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$