（京）新登字 039 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/刘彬主编．—北京：化学工业出版社，2000
高等学校教学用书
ISBN 7-5025-2806-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 28974 号

高等学校教学用书
高等数学学习指导
全国化工石化系统高校数学协作组　编
刘　彬　主编
管　平　主审
责任编辑：唐旭华
责任校对：陈　静
封面设计：田彦文
*
化学工业出版社
教材出版中心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市宇新装订厂装订
开本 787×1092 毫米 1/16　印张 19¾　字数 488 千字
2000 年 7 月第 1 版　2000 年 7 月北京第 1 次印刷
印　数：1—7000
ISBN 7-5025-2806-7/G·725
定　价：27.00 元

前　言

数学是培养和造就各类高层次理工人才的共同基础，是工科大学生重要的基础理论课。传统的工科数学教育曾对培养高级工程技术人才发挥了重要作用。随着科学技术、信息和知识的迅猛发展，传统的数学观念和教学体系受到冲击，工程技术对现代数学观点、方法及基础数学内容需求量的不断膨胀与有限的计划学时之间的矛盾日益突出。在当前工科数学教育中，迫切需要转变重继承、轻创造的教育思想和更新重传统、轻现代的教学内容，以适应高等工程教育面向21世纪人才培养模式的需要。在教学内容、课程体系及教学方法的改革中，教学内容的改革首当其冲，为此，全国化工石化系统高校数学协作组在成员校多年教学实践与改革探索的基础上，充分发挥各院校的优势，组织各校专家、教授编写了一套具有鲜明特点，又符合教学改革新形势需要的教材及教学参考书。

本套教材包括《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《数学建模》等；教学参考书包括《高等数学学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》等。

本套教材编委会名单如下：主编黄金坤；副主编刘慧、韩芝隆、李生训、郭金吉；编委黄晋阳、蒋逢海、刘彬、仇计清、赵璧、战学秋、李志林。

全国化工石化系统高校数学协作组

2000年1月

第一章　函数与极限

基本要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法。

2. 了解函数的四种特性：奇偶性、单调性、周期性和有界性。

3. 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形。

5. 会建立简单应用问题中的函数关系式。

6. 理解极限的概念，理解函数左右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系。

7. 掌握极限的性质及四则运算法则。

8. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握及利用两个重要极限求极限的方法。

9. 理解无穷小、无穷大以及无穷小阶的比较等概念，理解函数极限与无穷小之间的关系，会用等价无穷小代换求极限。

10. 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型。

11. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（最值定理和介值定理），并会应用这些性质。

重点　函数的概念，复合函数的概念，基本初等函数及其图形，极限和函数连续的概念，求极限的各种方法。

第一节　函数及其性质

函数是客观世界规律在数学中的量化表现，它也是高等数学研究的对象。熟练掌握函数概念及其性质是学习变量数学的基础。

一、求函数定义域及表达式

【例 1.1】　设初等函数 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$，求其定义域。

解　由基本初等函数的定义域,可得

$$\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\\ 2x-x^2\geqslant 0\\ 2x-1>0,\text{且 } 2x-1\neq 1\end{cases}$$

通过解上面不等式组得：$\dfrac{1}{2}<x\leqslant 2$ 且 $x\neq 1$，即所求定义域为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$。

注　此题说明，初等函数定义域不一定为区间。又如 $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$的定义域 D 为：$D=\left\{x\,\middle|\,x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}\right\}$。

【例 1.2】　求下列两函数的定义域：

(1) $y=f(x)=(2x)!$；(2) $y=\arccos\dfrac{x}{[x]}$，$[x]$表示不超过 x 的最大整数。

解 (1) 欲使$(2x)!$有意义，当且仅当 $2x$ 为非负整数，即函数定义域为集合 $\left\{\dfrac{n}{2}\,\middle|\, n=0,1,2,3,\cdots\right\}$。

(2) 欲使函数有意义，只须 x 满足 $-1\leqslant\dfrac{x}{[x]}\leqslant 1$，且$[x]\neq 0$，注意到 $x-1<[x]\leqslant x$，且当 $x<0$ 时，$0<\dfrac{x}{[x]}\leqslant 1$。

当 $0\leqslant x<1$ 时，由$[x]=0$ 知 $\dfrac{x}{[x]}$无意义；

当 $x\geqslant 1$ 时，由$\dfrac{x}{[x]}\geqslant 1$ 知 仅当 $x=1,2,3,\cdots$时，$\dfrac{x}{[x]}=1$，函数有意义。

故综合上述讨论知所求定义域为集合 D，其中

$$D=\{x\,|\,x<0 \text{ 或 } x=1,2,3,\cdots\}$$

注 (1) 中定义域为无穷多个离散的实数所构成的集合；(2) 中定义域为一无穷区间和正整数集之并。

【例 1.3】 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f[f(x)]$的定义域。

解 由 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$x\neq -1$ 得

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\frac{x+1}{x+2}$$

由 $x\neq -2$ 知，所求定义域为$\{x\,|\,x\in R，且\ x\neq -1,-2\}$。

注 求复合函数定义域不仅要看其表达式，而且也要看其复合过程。由此知函数 $y=f[f(x)]$与$y=\dfrac{x+1}{x+2}$不是同一个函数（二者定义域不同）。

【例 1.4】 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[-1,0)\\ -x, & x\in[0,1]\end{cases}$ 且设常数 $a>0$，$b>0$，求 $f(ax+b)+f(ax-b)$ 的定义域。

解 设
$$F(x)=f(ax+b)+f(ax-b)$$

则解不等式组
$$\begin{cases}-1\leqslant ax+b\leqslant 1\\ -1\leqslant ax-b\leqslant 1\end{cases}$$

得 $F(x)$的定义域
$$D_F=\begin{cases}\phi; & b>1\\ \left[-\dfrac{1-b}{a},\dfrac{1-b}{a}\right], & b<1\\ \{0\}, & b=1\end{cases}$$

注 本题有趣的是 D_F 随正参数 a,b 的取值而变化。ϕ 表示空集。

【例 1.5】 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[g(x)]=1-x$，求函数 $g(x)$的定义域 D_g。(研 88)

分析 已知 $f(x)$及 $f(x)$和 $g(x)$的复合，欲求 D_g，先求 $g(x)$的表达式。

解 由 $f(x)=e^{x^2}$知
$$f[g(x)]=e^{[g(x)]^2}$$

又 $f[g(x)]=1-x$ 从而有
$$e^{[g(x)]^2}=1-x$$

故
$$[g(x)]^2=\ln(1-x) \quad 或 \quad g(x)=\pm\sqrt{\ln(1-x)}$$

从而得 $D_g=(-\infty,0]$。

【例 1.6】 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，试求 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)$。

解 $\because$ $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$， $\therefore$ $f(x)=x^2-2$

故
$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}-4$$

【例 1.7】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f(x)\neq 0$，$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$，求 $f(1999)$。

解 令 $x=0$，$y=1999$ 由已知得
$$f(0)=f(0)\cdot f(1999)$$
又 $f(0)\neq 0$，故 $f(1999)=1$。

【例 1.8】 设 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，$a$，$b$，$c$ 为常数且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$。

分析 已知一个方程无法求出 $f(x)$，需再找一个方程，通过适当的变量代换可得到 $f(x)$ 满足的另一个方程，从而通过解方程组求出 $f(x)$。

解 $\because$ $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 满足
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \tag{1}$$
令 $\frac{1}{x}=t$ 得
$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$$
即
$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx \tag{2}$$
$(1)\times a-(2)\times b$ 得
$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx$$
$\therefore$
$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)$$

二、函数的运算（反函数、复合运算）

【例 1.9】 求双曲正切函数 $y=\operatorname{th}x\left(\operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)x\in(-\infty,+\infty)$ 的反函数和它的定义域。

解 令 $t=e^x>0$，则
$$y=\frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$
由比例关系(或直接推导)得 $t^2=\frac{1+y}{1-y}$ 从而 $t=\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$

故
$$x=\operatorname{arth}y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} \quad 或 \quad y=\operatorname{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$
为所求反函数，其定义域为 $x\in(-1,1)$。

【例 1.10】 求函数 $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数。

解 分段考虑各区间段的反函数。

当 $-\infty<x<1$ 时,由 $y=x$ 得 $x=y \quad -\infty<y<1$;

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时,由 $y=x^2$ 得 $x=\sqrt{y} \quad 1\leqslant y\leqslant 16$;

当 $4<x<+\infty$ 时,由 $y=2^x$ 得 $x=\log_2 y \quad 16<y<+\infty$。

综上所述,所求反函数为

$$y=\begin{cases} x, & x\in(-\infty,1) \\ \sqrt{x}, & x\in[1,16] \\ \log_2 x, & x\in(16,+\infty) \end{cases}$$

注 求分段函数的反函数亦需要分段考虑。

【例 1.11】 设 $f(x)=x/\sqrt{1+x^2}$, $f_1(x)=f[f(x)]$, $f_2(x)=f[f_1(x)]$, $\cdots$, $f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$, $n=2,3,\cdots$,试求 $f_n(x)$ 的解析表达式。

解 由 $f(x)=x/\sqrt{1+x^2}$ 得

$$f_1(x)=f[f(x)]=f(x)\Big/\sqrt{1+[f(x)]^2}=x/\sqrt{1+2x^2}$$

同理 $$f_2(x)=f_1(x)\Big/\sqrt{1+[f_1(x)]^2}=x/\sqrt{1+3x^2}$$

一般地,可用数学归纳法证明

$$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]=x/\sqrt{1+(n+1)x^2},\ n=2,3,4,\cdots$$

注 先一步一步复合,从特殊中归纳出一般规律,再用数学归纳法证明。

【例 1.12】 设 $$f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -1, & |x|>1 \end{cases}$$

$g(x)=e^x$,求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$。

解 $$f[g(x)]=\begin{cases} 1, & |g(x)|<1 \\ 0, & |g(x)|=1 \\ -1, & |g(x)|>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} e^x<1 \\ e^x=1 \\ e^x>1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x<0 \\ x=0 \\ x>0 \end{matrix} = -\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases} = -\operatorname{sgn} x$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases} e, & |x|<1 \\ 1, & |x|=1 \\ e^{-1}, & |x|>1 \end{cases}$$

注 两个分段函数复合时,要注意处于中间变量的函数值域与自变量的定义域之间关系,有时须分区间考虑。

【例 1.13】 试说明 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$ 是一个初等函数。

解 因为 $$f(x)=1-|x-1|=1-\sqrt{(x-1)^2}$$

所以由初等函数的定义知 $f(x)$ 是一个初等函数。

注 该例说明分段函数亦可能是初等函数,又如绝对值函数 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 也是初等函数。当然非初等函数的分段函数也是很多的。如符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$,取整函数 $y=[x]$ 等均是非初等函数。

三、函数的四种特性

【例 1.14】 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是

它在 X 上既有上界又有下界。

证 先证充分性。设 $f(x)$在 X 上有上界 B、下界 A，即对任意 $x\in X$ 有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$，取正数 $M=\max\{|A|,|B|\}$则对任意 $x\in X$，必有$|f(x)|\leqslant M$，即 $f(x)$在 X 上有界。

再证必要性。设 $f(x)$在 X 上有界，即存在 $M>0$，使任意 $x\in X$ 时，有$|f(x)|\leqslant M$ 即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$。取 $A=-M$，$B=M$，则对 $x\in X$，均有 $f(x)\geqslant A$ 且 $f(x)\leqslant B$，即 $f(x)$在 X 上是既有上界 B、又有下界 A 的函数。

注 函数的上(下)界并不唯一。

【例 1.15】 证明定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数 $f(x)$均可表示为一个奇函数及一个偶函数的和。

分析 若存在偶函数 $\varphi(x)$及奇函数 $\psi(x)$

使
$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x),x\in(-l,l) \tag{1}$$
则
$$f(-x)=\varphi(x)-\psi(x) \tag{2}$$
联立(1)(2)可得
$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

证 采用构造式证法。对 $f(x)$，$x\in(-l,l)$，令 $\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$，$\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$，不难验知 $\varphi(-x)=\varphi(x)$、$\psi(-x)=-\psi(x)$，即 $\psi(x)$，$\varphi(x)$分别为$(-l,l)$上的奇、偶函数，且使得 $f(x)=\psi(x)+\varphi(x)$。

注 本题所证结论可加强为：对 $f(x)$，$x\in(-l,l)$，存在唯一奇、偶函数 $\psi(x)$、$\varphi(x)$使 $f(x)=\psi(x)+\varphi(x)$。唯一性证明留作练习。

【例 1.16】 设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数，若 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加，证明 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加。

证 任意取 $x_1,x_2\in(-l,0)$且 $x_1<x_2$，下证 $f(x_1)<f(x_2)$即可。
$$\because\ x_i\in(-l,0)\qquad\therefore\ -x_i\in(0,l),i=1,2$$
由 $x_1<x_2$ 知 $-x_1>-x_2$，又 $f(x)$在$(0,l)$上单调增加，从而有
$$f(-x_2)<f(-x_1)$$
注意到 $f(x)$为奇函数，上式可化为
$$-f(x_2)<-f(x_1)\quad 即\quad f(x_1)<f(x_2)$$

【例 1.17】 设 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$在$(-\infty,+\infty)$上均单调增加，且 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，证明 $f(f(x))\leqslant g(g(x))\leqslant h(h(x))$。

证 任意 $x\in(-\infty,+\infty)$有
$$f(x)\leqslant g(x) \tag{*}$$
由 $f(x)$为单增函数，知
$$f(f(x))\leqslant f(g(x)) \tag{1}$$
又 $g(x)\in(-\infty,+\infty)$，再利用(*)得
$$f(g(x))\leqslant g(g(x)) \tag{2}$$
联立(1)(2)有
$$f(f(x))\leqslant g(g(x))$$
同理由 $g(x)$为单增函数，且 $g(x)\leqslant h(x)$可得
$$g(g(x))\leqslant g(h(x))\leqslant h(h(x))$$
从而有
$$f(f(x))\leqslant g(g(x))\leqslant h(h(x))$$

注 以上证明过程看出：函数 $h(x)$单增性条件在证明中并没用到，因而此条件可以取消。

【例 1.18】 设 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，且$f(x)$又是以 2 为周期的周期函数，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x^3$。求当$x\in[-5,-4]$时$f(x)$的表达式。

解 $\because$ $f(x)$以 2 为周期， $\therefore$ 任意$x\in R$有$f(x)=f(x+2k)$
其中$k\in \mathbf{Z}$为任意整数。从而当$x\in[-5,-4]$时

$$f(x)\xlongequal{\text{取 } k=2}f(x+4) \tag{1}$$

且由$-5\leqslant x\leqslant -4$知$-1\leqslant x+4\leqslant 0$， 或者 $0\leqslant -(x+4)\leqslant 1$
再由$f(x)$为偶函数知

$$f(x+4)=f[-(x+4)]=[-(x+4)]^3=-(x+4)^3$$

注意到(1)式得：当$x\in[-5,-4]$时，$f(x)=-(x+4)^3$。

【例 1.19】 设对任何$x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数$c\neq 0$，使$f(x+c)=-f(x)$。证明：$f(x)$是周期函数。

分析 只须证存在正数T，使任意$x\in R$，有$f(x+T)=f(x)$即可。

证 由已知，对任意$x\in R$有$f(x+c)=-f(x)$从而

$$f(x+2c)=f(x+c+c)=-f(x+c)=-(-f(x))=f(x)$$

由此不难得

$$f(x\pm 2c)=f(x)$$

从而取$T=2|c|>0$，有$f(x+T)=f(x)$对任意$x\in R$成立。

△【例 1.20】 设常数a,b有$a<b$,求一个实数c使$(b+c)\sin(b+c)-(a+c)\sin(a+c)=0$。

解 设辅助函数$f(x)=x\sin x$，$x\in R$ 则$f(x)$为R上的偶函数。依题意即求一个实数c使$f(b+c)=f(a+c)$，$a<b$

$$\because\ f(x)\text{为偶函数，}\quad \therefore\ f(b+c)=f[-(b+c)]$$

从而只须找c使$f[-(b+c)]=f(a+c)$，特别令$-(b+c)=a+c$，即$c=-\dfrac{a+b}{2}$满足题意。

注 上述解法构造函数，巧妙地运用了函数的奇偶性，使问题得以解决。若是用解方程法找c，则十分困难。事实上，从本题题意看，并不是要找满足等式的所有实数c，而仅是找出一个即可。

△【例 1.21】[讨论题] 单调函数必有单值反函数，不单调的函数是不是一定没有单值反函数？说明理由。

答 不是的。单调函数必有单值反函数，这是由定理保证的，在定理中，直接函数单调是其反函数单值的充分条件而非必要条件，故直接函数不单调，定理的结论仍可能成立，即其反函数仍可能单值。一个函数是否存在单值反函数，取决于它的对应规则f在定义域D与值域W之间是否构成一对应的关系。如果是一一对应，那么必有单值反函数；否则就没有单值反函数。即f：$D\to W$是一一对应映射才是反函数f^{-1}：$W\to D$单值的充要条件。

例如

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

在区间$[-1,1]$上不单调,但它的反函数$f^{-1}(x)$却是单值的，且

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

(读者画出$f(x)$、$f^{-1}(x)$之图形即可明了上述结论）又如

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 有理数}\\ -x, & x\text{ 无理数}\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$内不单调，但其反函数$\varphi^{-1}(x)=\varphi(x)$显然单值。

第二节　求极限的方法

高等数学的研究对象是函数，但用什么方法来研究呢？极限！有了极限，才有了函数的连续性、微积分及级数的敛散性等，可以说，极限是高等数学的灵魂。

同时，极限概念也是深入研究函数变化性态最基本的一个概念，极限方法是数学中最重要的一种思想方法。下面介绍本章涉及到的求数列、函数极限的各种方法与技巧。

一、利用单调有界准则求数列极限

准则　若数列$\{x_n\}$单调增加有上界，或$\{x_n\}$单调减少有下界，则$\{x_n\}$必收敛。

一般地，当数列由递推公式给出时，数列极限的存在性可用以上准则证明，但其未指明如何求出极限。做题时，常利用数列通项间的递推关系式求出极限a。

【例 2.1】　设$x_n=\dfrac{2^n}{n!}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解　[尝试求解与分析] 由$x_n=\dfrac{2^n}{n!}=\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}=\dfrac{2}{n}x_{n-1}$，设$x_n$极限为$a$，即设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_{n-1}=a$$

从而在等式

$$x_n=\frac{2}{n}\cdot x_{n-1}$$

两端令$n\to\infty$得$a=0\cdot a=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

问　以上求解过程正确吗？

答　结果正确，但求解方法不正确或者说求解方法有缺陷。

如例 2.1′　设$x_n=1+2x_{n-1}$，$n=2,3,\cdots,x_1=1$，问数列极限是否存在？

按上述例 2.1 的求解法，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由递推关系式$x_n=1+2x_{n-1}$两边令$n\to\infty$得$a=1+2a$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=-1$。

事实上，不难得当$x_1=1$，$x_n=1+2x_{n-1}$时，有$x_n=2^n-1\to+\infty(n\to\infty)$显然矛盾。即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq-1$，那么矛盾出在何处？

也许有同学怀疑设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$时，不一定有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}=a$？这一点无可置疑！因为数列$\{x_n\}$与$\{x_{n-1}\}$本质上是同一个数列，从而若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$必有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}=a$。

也许大家早已知道问题的症结所在，即两例的求解均没有事先证明数列极限存在，而这一步是不可缺少的。上述两例的求解只是说明：若例 2.1 中x_n极限存在，则$x_n\to0(n\to\infty)$；若例 2.1′中x_n极限存在，则$x_n\to-1(n\to\infty)$。事实上例 2.1′中$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$成为了无本之木。

例 2.1 的正确求解：

解　$\because$　$x_n=\dfrac{2^n}{n!}$，$\therefore$　$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{2}{n+1}<1$　$(n\geqslant2)$即当$n=2,3,\cdots$时，$\{x_n\}$为单调递减的，又显然对任意x_n有$x_n>0$，从而$\{x_n\}$为单减有下界数列故其极限必存在。设$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}$，则由$x_n=\dfrac{2}{n}x_{n-1}$令$n\to\infty$得$a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

对例 2.1′亦可这样解：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，则由上述方法得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$，又$x_1=1$，$x_2=1+2x_1=3>1,\cdots,x_n>1$，从而由极限保号性定理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant1$这和$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$矛盾。从而知原数

列极限不存在。

【例 2.2】 设常数 $a>0$，$x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{个}}$。证明：$\{x_n\}$收敛且求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 (1) 设$\{x_n\}$收敛，并记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。由已知得递推关系式：$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$，令 $n\to\infty$利用$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}=A$，得 $\qquad A=\sqrt{a+A}$

即 $A^2-A-a=0$， 解方程知 $\qquad A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

显然由 $x_n>0$ 知 $A\geqslant0$，即舍去负值有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

(2) 证$\{x_n\}$收敛。由 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$，…，显然 $x_2>x_1(a>0)$，归纳地设 $x_n>x_{n-1}$，则 $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}>\sqrt{a+x_{n-1}}=x_n$，即 x_n 单增。再证 x_n 有上界 B，那么如何取 B 呢？(若 x_n 有上界 B，则由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，从而此极限值必为 x_n 的一个上界）令 $B=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$则 $x_1=\sqrt{a}<B$，归纳地设 $x_n<B=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}<\sqrt{a+B}=\sqrt{a+\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{4a+2+2\cdot\sqrt{1+4a}}}{2}=\frac{\sqrt{(1+\sqrt{1+4a})^2}}{2}=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

故 x_n 为单增有上界数列，从而 $\{x_n\}$ 收敛。

注 这里 x_n 上界的选取似乎依赖于 x_n 的极限值。为了使上述解法看起来更合乎逻辑，一般教科书往往采用先证 (2)、再求 (1) 的方法，不过 (2) 中上界的选取实际上是事先计算出的极限值。当然若 $\{x_n\}$ 为单减的，则事先计算出的极限值就是数列 x_n 的一个下界了。

△**【例 2.3】** 设数列 x_n 满足：$x_1=100$，$x_n=\sqrt{5+x_{n-1}}$，求证$\{x_n\}$收敛且求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 (1) 由 $x_1=100$ 知 $x_2=\sqrt{5+100}<x_1$，归纳地设 $x_n<x_{n-1}$则 $x_{n+1}=\sqrt{5+x_n}<\sqrt{5+x_{n-1}}=x_n$，即$\{x_n\}$为单减数列，又显见 $x_n>0$(若用上题方法可证 x_n 有下界$\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$。其中$\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$为事先计算出的极限值)，从而$\{x_n\}$为单减有下界数列，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且设为 A。

(2) 求极限值 A。由 $x_n=\sqrt{5+x_{n-1}}$ 令 $n\to\infty$ 得 $A=\sqrt{5+A}$ 或 $A^2-A-5=0$

解方程得 $A=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$， 舍去负根故得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$。

注 同理可将以上两题推广到一般情形：设 $x_1=a>0$，$x_n=\sqrt{b+x_{n-1}}$，$(b>0)$，$n=2,3,\cdots$，则数列 x_n 收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$。

其中：①当 $x_1=x_2$，即 $a=\sqrt{b+a}$ 或 $a=\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 时，$x_n\equiv\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$；

②当 $x_1<x_2$，即 $a<\sqrt{b+a}$ 或 $a<\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 时，x_n 单增且以 $\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 为上界；

③当 $x_1>x_2$　即 $a>\sqrt{b+a}$ 或 $a>\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 时，x_n 单减且以 0 或 $\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 为下界。

显然例 2.2 中，$x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a+\sqrt{a}}=x_2$ 属情形②，此时 $b=a$，x_n 单增有上界且极限为 $\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$；而例 2.3 中，$x_1=100>\sqrt{5+100}=x_2$ 属情形③，此时 $b=5$，从而 x_n 单减有下界且极限为 $\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$。

有趣的是，数列 $x_n=\sqrt{b+x_{n-1}}$，$x_1=a>0$，$b>0$，$n=2,3,\cdots$，虽然与 a（x_n 的初始值）有关，但 x_n 的极限却与 a 无关，即不管 $x_1=a>0$ 如何取值，只要 b 不变，则 x_n 恒收敛且极限值不变$\left(\text{恒为}\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}\right)$（$a$ 的变化只影响 x_n 的单调性）。这说明在一个收敛的迭代数列中，不管初始值 x_1 如何选取，数列总收敛到相同的极限值，这也正是迭代计算法的存在价值。

【例 2.4】 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，$n=1,2,\cdots$，证明：$\{a_n\}$ 为收敛数列。（研 97）

分析　若设 $\{a_n\}$ 收敛且记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$ 得　$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$

解之得
$$a=-1/2\text{（舍去）},\quad \text{及 } a=1$$

又 $a_1=2$，$a_2=\frac{5}{4}$，$a_3=\frac{41}{40}$，猜测 a_n 为单减且以上极限值 1 为其一个下界，则问题已得。

证　∵
$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2a_n}\geqslant\frac{2a_n}{2a_n}=1\quad(a^2+b^2\geqslant 2ab)$$

∴　$\{a_n\}$ 以 1 为下界，即对任意 n 有 $a_n\geqslant 1$

又
$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-a_n\right)\leqslant 0\left(\frac{1}{a_n}\leqslant 1\leqslant a_n\right)$$

从而 $\{a_n\}$ 单减有下界故为收敛数列。

注　尽管本题不需要求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，但由上述分析及证明过程知，事先求出极限值 1 对问题的解决还是有帮助的。

利用单调有界准则求数列极限方法有很多，上述所讲只是较具代表性的一种，其他方法略。

二、利用夹逼准则求极限

【例 2.5】 求下列极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2^2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}}\right)$$

解　设
$$x_n=\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2^2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}}$$

则
$$x_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}(1+2+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2\cdot\sqrt{n^4+1}}$$

且
$$x_n\geqslant\frac{1}{\sqrt{n^4+n^2}}(1+2+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2\cdot\sqrt{n^4+n^2}}$$

又由
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\cdot\sqrt{n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\cdot\sqrt{n^4+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

得
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$$

【例 2.6】 求下述两函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x+\cdots+n^x)^{\frac{1}{x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{x}}$。

解 (1) 本题属∞^0型极限。由
$$(n^x)^{\frac{1}{x}}<(1+2^x+\cdots+n^x)^{\frac{1}{x}}<(n\cdot n^x)^{\frac{1}{x}}$$

且
$$(n^x)^{\frac{1}{x}}=n,\ (n\cdot n^x)^{\frac{1}{x}}=n\cdot n^{\frac{1}{x}}\to n\quad(x\to+\infty)$$

据夹逼准则得：原极限$=n$。

(2) ∵
$$1\leqslant(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{x}}\leqslant 2^{\frac{1}{x}}$$

且
$$\lim_{x\to+\infty}2^{\frac{1}{x}}=\lim_{t=\frac{1}{x}\to 0^+}2^t=1$$

∴ 据夹逼准则得　　原极限$=1$

注 (1) 作为∞^0型极限亦可以用第三章介绍的洛必达法则求解；(2) 中极限属“(不存在)^0”型夹逼准则法是此类题的有效解法之一。

三、利用极限四则运算法则求极限

【例 2.7】 求下列两极限：

(1) 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$；(2) 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$　(m,n为正整数)。

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}(x+1-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}=\dfrac{m}{n}$

注 (1) 对无理根式函数求极限，分子有理化或分母有理化是常用处理方法；(2) 题属$\dfrac{0}{0}$型极限，由分子、分母因式分解经消去公共趋零因式$(x-1)$后，由极限商法则即得(注意$x\to1$时,$x\neq1$)。

【例 2.8】 求下列函数极限：

(1) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}$；　(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$；

(3) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$。

解 (1)(2)(3)均为数列极限,它是函数极限的特例。

(1) 首先由　$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

知 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

故 $$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

(2) ∵ $1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{k^2-1}{k^2}=\dfrac{k-1}{k}\,\dfrac{k+1}{k}\qquad(k=2,3,\cdots,n)$

∴ $$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$$

(3) 当 $x=0$ 时，显然原式 $=1$

当 $x\neq0$ 时，对原式分子、分母同乘以 $\sin x$，且 $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

得 $$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x\cdot\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}}{2\cdot2\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x\cdot\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}}{2^3\cdot\sin\dfrac{x}{2^3}\cos\dfrac{x}{2^3}}$$
$$=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}}{2^n\cdot\sin\dfrac{x}{2^n}\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\overset{*}{=}\frac{\sin x}{x}$$

从而得
$$\text{原式}=\begin{cases}1, & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0\end{cases}$$

注 1 对题(3) * 处，应用了重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，且此题求得的极限值是 x 的函数，其中 n 为极限变量，而变量 x 在 $n\to\infty$ 之极限变化过程中保持不变，相当于常数。

注 2 显然，此三题都不能直接用极限运算法则，它们都需要先对原式进行变形化简，然后才能利用极限运算法则求极限，这种方法在不少极限题目中较为普遍。

四、利用两个重要极限求极限

对两个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 可做如下推广，从而可作为公式用于求极限。

$$\lim_{x\to\cdot}\frac{\sin\Delta}{\Delta}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}1,\ \lim_{x\to\cdot}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\overset{1^\infty}{=\!=}\mathrm{e}$$

在以上两公式中，$x\to\cdot$ 表示 x 变化的所有情形：即 x 既可是连续变量，又可是离散变量；x 既可趋向有限数，亦可趋向无穷大；x 既可沿单侧方向变化如 $x\to x_0^-$，$x\to-\infty$，又可沿双侧

方向变化如 $x\to x_0, x\to\infty$。而 $\Delta\neq 0$ 表示满足$\lim\limits_{x\to\cdot}\Delta(x)=0$ 的 x 的函数，记作 $\Delta=\Delta(x)$，它是 $x\to\cdot$ 变化过程中的无穷小量。重要极限等号上方的符号“$\frac{0}{0}$”或“1^∞”是一种形象记号，它提醒读者，在用上述公式中应注意验证 Δ 是无穷小。

一般说，含三角函数的$\frac{0}{0}$型极限可用第一个重要极限，而幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的 1^∞ 型极限须用第二个重要极限。

【例 2.9】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

解 由$\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2$

及重要极限、极限四则运算知：原式$=\dfrac{1}{2}$。

【例 2.10】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n\cdot\sin\frac{1}{n}}{(n-1)^{n-1}}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{2}{x}}$。

解 (1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n\cdot\sin\dfrac{1}{n}\right)\cdot\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right]\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{n}{n-1}-1\right)\right]^{n-1}$

$$=1\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]=\mathrm{e}$$

(2) 法 1：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{\frac{\sin 2x}{x}}$$

$\because$ $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]\overset{1^\infty}{=}\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=2$

$\therefore$ 原式$=\mathrm{e}^2$

法 2：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin x+\cos x-1)^{\frac{1}{\sin x+\cos x-1}}\right]^{(\sin x+\cos x-1)\cdot\frac{2}{x}}$

$$=\mathrm{e}^2\left(\text{其中}\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x-1)\frac{2}{x}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x-1}{x}\right)=2\right)$$

五、利用有界量乘无穷小仍为无穷小求极限

【例 2.11】 求下列函数极限：

(1) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\sin 2x}{x}+x\sin\dfrac{3}{x}\right]$；(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}[\arctan(n!)\cdot\sin(\sqrt{n^2+1}-n)]$。

解 (1) $\because$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(\sin 2x)\cdot\dfrac{1}{x}\overset{*}{=}0$ 且$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}\cdot 3\overset{**}{=\!=}3$

$\therefore$ 原式$=0+3=3$

注 这里 * 处利用了$|\sin 2x|\leqslant 1$，$\dfrac{1}{x}\to 0(x\to+\infty)$无穷小的性质；* * 处利用了重要极限。此题若不注意 x 的变化范围，则容易做错。

(2) $\because\quad |\arctan(n!)|\leqslant\frac{\pi}{2}$ 为有界量

而
$$\sin(\sqrt{n^2+1}-n)=\sin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

得
$$\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}-n)=0$$

$\therefore$ 据有界量乘无穷小仍为无穷小之性质，得原式$=0$。

六、利用函数连续性求极限

这里所用到的函数连续性主要指连续性定义，即当 $f(x)$ 在 x_0 点连续时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)=f(x_0)$。亦称极限号与函数符号可交换次序。

【例 2.12】 求 $\lim\limits_{x\to 2}\sin(e^{x-1})$。

解 设 $f(x)=\sin e^{x-1}$，显然 $f(x)$ 为初等函数，且定义域为 $(-\infty,+\infty)$。从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，特别在 $x=2$ 处连续。故

$$\text{原式}=\sin(\lim_{x\to 2}e^{x-1})=\sin\left(e^{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}\right)=\sin e$$

【例 2.13】 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$。证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=A^B$。

证 $\because\quad \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$

$\therefore$ 由极限保号性定理知，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时 $f(x)>0$，设 $x\in\mathring{U}(x_0)$（x_0 的某空心邻域）

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

由 $\ln x$，e^x 的连续性，可有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\cdot\ln f(x)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\cdot\ln[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]}=e^{B\ln A}=A^B$$

七、利用等价无穷小替换求极限

利用该法要掌握较多的等价无穷小，且能灵活掌握，替换中要严守无穷小替换定理，即替换只在积、商运算中进行，其他运算则不能用，除非特别证明。

常见的等价无穷小如下：设 $x\to 0$，则 $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\arcsin x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$；另外还有 $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$；$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$ $(x\to 0)$。此外，还应掌握它们的一些变化形式，如：$x\to 0$ 有 $e^{x^2}-1\sim x^2$；$1-\cos 2x\sim 2x^2$；$\ln(1-x)\sim -x$ 等等。

【例 2.14】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\cdot\ln(1+x)}$；（研 97） (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)\arctan x^2}{x\cdot\sin^2 x\cdot\ln(1-x)}$。

解 (1) $\text{原式}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}\lim\limits_{x\to 0}\left(3\dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}+\dfrac{x}{\ln(1+x)}\cdot x\cos\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\cdot x\cos\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{2}(3\cdot 1+1\cdot 0)=\frac{3}{2}$$

(2) 由 $x\to 0$ 时，$1-\cos 2x\sim 2x^2$，$\arctan x^2\sim x^2$，$x\sin^2 x\sim x^3$，$\ln(1-x)\sim -x$ 分别代入得：原式$=-2$。

【例 2.15】 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-\sqrt[3]{1-x})}{\arcsin\sqrt[3]{x^2-1}}$。

解 $\because$ 当 $x\to1$ 时 $\sqrt[3]{1-x}\to0$，$\sqrt[3]{x^2-1}\to0$

$\therefore$ $$\ln(1-\sqrt[3]{1-x})\sim-\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{x-1}$$

$$\arcsin\sqrt[3]{x^2-1}\sim\sqrt[3]{x^2-1}$$

从而
$$原式=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

八、利用变量代换求极限

【例 2.16】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0,a\neq1)$； (2) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$；（研 93） (4) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$；（研 93）

(5) 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(4x)}=3$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(6x)}{x}$。

解 (1) 作变量代换，令 $y=a^x-1$，则 $x=\log_a(1+y)$，且由指数函数连续性知：当 $x\to0$ 时，$y\to0$，从而

$$原式=\lim_{y\to0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{y}\log_a(1+y)}=\left[\lim_{y\to0}\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-1}$$
$$=\left\{\log_a\left[\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]\right\}^{-1}=(\log_a e)^{-1}=\ln a$$

(2) 令 $1-x=t$，则 $x=1-t$，当 $x\to1$ 时，$t\to0$。故

$$原式=\lim_{t\to0}\left[t\cdot\tan\frac{\pi(1-t)}{2}\right]=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan\dfrac{\pi}{2}t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\dfrac{\pi}{2}t}=\frac{2}{\pi}$$

(3) 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则

$$原式=\lim_{t\to0}(\sin2t+\cos t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}[1+(\sin2t+\cos t-1)]^{\frac{1}{\sin2t+\cos t-1}\cdot\frac{\sin2t+\cos t-1}{t}}$$

又 $$\lim_{t\to0}\frac{\sin2t+\cos t-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{t}+\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2t}{t}-\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^2}{2}}{t}=2$$

$$\therefore\quad 原式=e^2$$

(4) 法 1：令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $x\to-\infty$ 时，$t\to0^-$。从而

$$原式=\lim_{t\to0^-}\frac{1}{t}\left(\sqrt{\frac{1}{t^2}+100}+\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to0^-}\frac{1-\sqrt{1+100t^2}}{t^2}=\lim_{t\to0^-}\frac{-100t^2}{t^2(1+\sqrt{1+100t^2})}=-50$$

法 2：$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{-\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-1}=-50$$

(5) 令 $4x=t$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(4x)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{4}t}{f(t)}=3$，从而 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{f(t)}=12$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\frac{f(6x)}{x}\xlongequal{令\,6x=y}\lim_{y\to0}\frac{f(y)}{y}\cdot6=\frac{1}{12}\times6=\frac{1}{2}$$

以上讨论了求极限的 8 种常用方法。在实际做题时，有时可能要综合几种方法来求解，比如例 2.16 中（1）（2）（3）题都要用到二种以上的方法。应该指出上面给出的方法仅限在第一章范围内讨论，若就高等数学全部内容来看，求极限还有洛必达法则、导数定义、定积分定义、级数等方法，我们在以后章节中再逐一介绍。

第三节　极限概念及应用

一、极限定义与性质

1. 极限定义即 ε-N、ε-δ 等语言的叙述，此内容虽是高等数学的基本概念，但对工科、文经类专业来说，重点是要求能理解定义的精神实质，会叙述不同情况下极限的定义语言即可。

【例 3.1】 用极限语言叙述以下极限定义：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；　（2）$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$；　（3）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$。

解　（1）$\Leftrightarrow$任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$。

（2）$\Leftrightarrow$任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

（3）$\Leftrightarrow$任意 $M>0$，存在 $X>0$，使当 $|x|>X$ 时，恒有 $f(x)>M$。

注　极限定义的语言叙述，其目的是理解极限的实质，仅靠死记硬背是不行的。

【例 3.2】 以下几种叙述与数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义是否等价？说明理由。

（1）任意 $\varepsilon>0$，存在正数 X，使当 $n>X$ 时，有 $|x_n-a|\leqslant k\varepsilon$（其中 k 为与 ε 无关的正常数）；

（2）任意 ε 且 $0<\varepsilon<1$，存在正整数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，有 $|x_n-a|\leqslant\varepsilon$；

（3）对无限多个 $\varepsilon>0$ 中的每一个 ε，都存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$；

（4）对任给自然数 K，存在实数 A，使当 $n>A$ 时，有 $|x_n-a|\leqslant\dfrac{1}{K}$；

（5）任意 $\varepsilon>0$，存在无限多项 x_n，使 $|x_n-a|<\varepsilon$；

（6）任意 $\varepsilon>0$，只有有限项 x_n，位于 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外。

解　（1）、（2）、（4）、（6）均等价，而（3）、（5）不等价。原因在于：

（1）由于 k 为与 ε 无关之正常数，能够保证 $k\varepsilon$ 为任意小，且 X 的存在能保证正整数 N 的存在，所以等价。

（2）对 ε 的任意性本质上是限定它任意小，若取 $\varepsilon\geqslant1$，则由以上叙述取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}\in(0,1)$，存在正整数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，有 $|x_n-a|\leqslant\varepsilon_0<\varepsilon$ 成立。故亦等价。

（3）无限多个 $\varepsilon>0$，可以是无限多个大于 1 的 ε，不蕴含 ε 任意小的意思，即无限多个 $\varepsilon>0$ 并不等价于任意的 $\varepsilon>0$，故不等价。

（4）由 K 之任意性，可保证 $\dfrac{1}{K}$ 的任意小，且实数 A 的存在确保 N 的存在，所以等价。

（5）无限多项 x_n，不保证包含从某 N 开始后的所有项，故不等价。

（6）此说明某一项以后的一切项均在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内，即满足当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$。故等价。

【例 3.3】 选择："对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$" 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的________条件。（研 99）

（A）充分但非必要；　　　　（B）必要但非充分；

（C）充分且必要；　　　　　（D）既非充分也非必要。