面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数学实验

乐经良　主编
乐经良　向隆万　李世栋　策划

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数学实验

乐经良　主编
乐经良　向隆万　李世栋　策划

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

数学实验/乐经良主编.—北京:高等教育出版社,
1999
ISBN 7-04-007706-X

Ⅰ.数…　Ⅱ.乐…　Ⅲ.数学-实验　Ⅳ.01-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 30627 号

数学实验
乐经良　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010-64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	北京外文印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　本	787×960　1/16	版　次	1999 年 10 月第 1 版
印　张	18	印　次	1999 年 10 月第 1 次印刷
字　数	330 000	定　价	19.10 元

内 容 简 介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材．本书收集的21个实验素材，是在上海交通大学进行数年教学试点基础上编写的．目的是使学生了解并初步实践应用数学和建模、通过计算机来解决实际问题的全过程，从而培养学生的综合应用能力和创新意识．

本书取材涉及物理、力学、生物、经济、管理、金融和工程技术等领域．通过实验介绍了数值方法、摄动方法、仿真方法、运筹方法等．书中的每一个实验都有相对独立性和完整性，各实验虽然内容不同，深浅各异，但并无先后次序之分．使用者既可单独设课，采用全部或大部分实验；也可配合某门工科数学课程的教学，选用若干实验．

本书可作为高等学校工科各专业的教科书，也可供理科专业选用和社会读者阅读．

序

电子计算机的出现，首先得归功于数学家的奠基性工作，它有力地证明了数学这一历史悠久的重要基础学科具有无限的生命力和广阔的应用前景.而电子计算机技术的飞速进步，又为数学的发展提供了威力无比的武器和工具，彻底改变了长期以来数学仅仅依靠一支笔、一张纸的传统，不仅使数学的应用在广度及深度两方面都达到了前所未有的程度，而且深刻地影响了数学的发展进程和思维模式.可以说，正是电子计算机的出现和发展，给数学赋予了新的动力和生命，使数学真正从数学家的书斋里和课本中解放出来，成为各行各业得心应手的锐利武器，并使数学技术成为现今高科技的一个重要组成部分和突出标志.

这样的形势自然不可能不反映到对人才的训练和培养上来，并对数学课程的改革提出了新的要求.追溯近年来数学类课程的改革进程，可以看到大体上经历了下面三个阶段.首先是增设了一些有关计算机的课程，帮助学生熟悉和使用计算机.但仅仅这样，还没有在实际应用和数学理论之间架起桥梁，还不能解决长期以来存在的矛盾：一方面数学很有用，而另一方面学生学了数学以后却不会用.继而，出现了种种“数学模型”的课程，填补了传统数学类课程在这方面的严重不足，发挥了很好的作用.但是，“数学模型”课程的内容，如果不强调付诸实践，仍可能只是纸上谈兵，难以使学生领会到个中滋味，不能真正学到手，也不能起到进一步巩固和加深数学理论基础的作用.而要实践，除极少数相当简单的情况外，就不可避免地要使用计算机，包括使用有关的应用软件，而且要安排足够的课内外教学时间使这一实践能够得到保证.这就使数学这一门高度抽象的学科也需要进行实验；而“数学实验”课程，作为数学改革中的一件新生事物，也就应运而生了.

当然，数学实验的内容，可以单独设课，可以体现在“数学模型”课程的教学要求中，也可以结合其他的课程分散地进行.同时，“数学实验”课程的内涵及训练侧重点也可以各有千秋，没有必要强求一律.现

在的这一本“数学实验”教材，作为在这方面的一个积极尝试，我感到具有下面一些特点：

1. 内容选自众多不同的领域，题材各异，风格也不尽相同，有利于适应多方面的需要和选择，也有利于开阔视野，促进思考.

2. 贴近应用，引人入胜，而不是故弄玄虚，无病呻吟. 这对培养学生的应用意识和兴趣，颇为有益.

3. 对不同的实验案例，由实际的需要引入相应的数学模型，并结合介绍有关的数学方法和原理；而且尽可能地提出不同的思路和途径，再加以比较. 这较之传统数学课程中数学理论与方法的讲授，更加有的放矢，也更加灵活生动，有助于认识的深化.

4. 对数学基础知识的要求主要限于微积分、线性代数及数理统计等内容，适用于理工科大学低年级的学生，使他们能尽早地得到这方面的训练.

5. 各个实验互相独立，可根据情况有选择地使用，也便于采用相对集中或分散进行的灵活方式.

6. 对实验有明确的要求和具体的任务，既便于进行检查和督促，也可确保课程目标的实现.

我怀着极大的兴趣浏览了全书的内容，深为这一本相当新颖并颇具特色的教材的出版感到高兴，并相信它对理工科大学生的培养将会发挥积极的作用.

李大潜
1999 年 8 月

前　言

数学实验是工科数学教育改革的产物，它既提供了一些新的教学内容，又构成了一个新的教学环节．在1996年，上海交通大学参加了原国家教委的立项课题"工科数学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践"，承担了子课题"数学实验课程的研究与实践"．同年，我们就开始了"数学实验"课程的教材编写和教学试点．本书便是我们初步工作的总结．

众所周知，由于计算工具和计算技术的飞速发展，在自然科学、工程技术、经济管理以至人文社会科学各领域中，数学日益成为解决实际问题的有力工具．数学技术(数值计算与仿真、图象处理、统计分析等等)、理论研究、实验研究三足鼎立，在现代社会进步中正起着巨大作用．在这种形势下，大学数学教育除了培养传统的逻辑推理能力、几何直观能力和运算能力以外，还应培养数学建模能力和科学计算能力．数学实验课正为综合培养这些能力提供了用武之地．

传统数学教材中也配备了一定数量的应用题，对培养学生理论联系实际的能力有一定作用．但这些应用题毕竟比较浅显，综合性较差，留给学生创造的余地很小．此外，目前流行的数学教科书中的应用题，多偏于物理、力学等经典领域，面比较窄．近年来，许多高等院校开设了"数学建模"课程，由于该课程的应用性和实践性，而且还结合了大学生数学建模竞赛，因此倍受广大师生的关注．不过，数学建模课程侧重于介绍各种建模方法，往往涉及较多的数学分支，并且要化相当多时间学习各种领域的背景知识，对低年级学生学习有一定困难．数学实验课程在内容深广度上介于通常数学课程的应用和数学建模课程之间．它希望通过实验，使学生初步学习数学应用的全过程：用所学的数学知识，将实际问题转化为合理的数学问题，进而应用数学方法和计算技巧，以计算机为工具，使问题得以解决．数学实验课程，特别强调学生自己动脑动手，真正进行"实验"，从而培养学生的创新意识和应用能力．

本书选取的实验来自许多领域．不仅有传统的物理、力学问题，也有经济、管理、金融等领域的例子．有的问题虽然古老，却在人类认识世界和改造世界的过程中起着里程碑的作用，例如Newton万有引力定律对Kepler行星三定律的推导；有的问题是重大科学研究的成果，例如CT技术曾获得诺贝尔医学奖；而Black－Scholes方程曾获诺贝尔经济学奖等．也有的问题直接来自生产第一线，如储油罐的标尺刻度，产品质量控制问题等．

涉及的数学分支既有连续变量数学(微积分)，也有离散变量数学(线性代

数)和随机变量数学(概率与统计等).有些内容会涉及较深的分支,但都经过了浅化的处理,最终归结为较简单的形式.事实上,有的实验介绍了若干数学的新发展,如混沌理论、小波方法等.

根据1995年底召开的“工科数学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”项目负责人会议记要,数学实验应以数学建模和数值方法为核心,我们在编写中注意了侧重这两方面的内容.因此,在本书中没有突出介绍数学软件的应用(书末附录了Matlab使用初步),当然,在教学中安排实验任务时,可以根据学生的情况,选择编程或使用软件.

教材中多数实验的内容和任务安排,具有若干层次.这主要是适应不同水平学生的要求.因此,教师在进行数学实验教学时,可对教材内容有所取舍.

虽然我们对数学实验课程的认识和实践时间还不多,但已经收到很好的效果,受到学生的普遍欢迎.不少实验结果的水平大大超出教师预料;有些实验报告对问题考虑深入,有一定的创见;有些实验报告则反映出在计算方面(例如,提高精度、作图和编程等)的突出能力.有的学生还自发地在实验报告中写道:“这样的数学实验既能运用课堂知识又能培养分析能力,对我们学生的素质培养益处很大.”“实验加强了我们从理论到实践再返回理论的能力,很有好处.”

本书由乐经良主编,乐经良、向隆万和李世栋策划,实验二、四、六、八、九和二十一由乐经良编写,实验一、三、五和十三由向隆万编写,实验十、十一、十二和十九由李世栋编写,实验十七由黄建国编写,实验十五由肖柳青编写,实验十四由孙祝岭编写,实验二十由周钢编写,实验十八由顾圣士、乐经良编写,实验七由向隆万、黄建国编写,实验十六由孙祝岭、乐经良编写,附录由彭勃编写,全书由乐经良作了统稿和修订.

中国科学院院士、复旦大学李大潜教授十分支持数学教学的改革,在百忙中为本书作序,我们对他表示衷心的感谢。

本书由复旦大学谭永基教授和合肥工业大学苏化明教授主审,并由教育部工科数学课程指导委员会组织的专家小组评审.我们对上述诸位教授的认真工作深表谢意,尤其感谢谭永基教授对本书的许多有益的帮助和建议,感谢课委会主任、西安交通大学马知恩教授对本书编写给予的热情支持.我们还要感谢高等教育出版社杨芝馨副编审,她的积极细致的工作使本书的出版能顺利进行.

数学实验是一门新的改革课程.对这门课程的定位、内容选取和教学方式等诸方面都可能有各种不同理解与多样选择,我们采用的方式仅仅是一种尝试,而且事实上,在尝试的过程中,我们对实验课的理解与观点也在不断地变化.正因为这样,本教材还远远谈不上成熟;实验的选取数量还不够;对工科数学知识的覆盖显得不足;各实验的内容深浅未必得当,体例也不尽统一;尤其是对数学软件的应用,如何在实验课中适当地加以结合,是我们一直在探索而尚未在教材

中体现的问题.由于能力所限,时间匆促,其他疏漏错误更在所难免,敬请读者指正,我们特别希望各个领域的读者能提供新鲜的、有数学应用潜力的实例.抛砖可引玉,集腋必成裘.我们深信,在全国同行共同努力下,数学实验课程的建设(包括教材建设)必将更加丰富完善.

编者
1999.4

使用说明

本书共包括21个实验.实验1～7主要涉及微积分和微分方程,实验8～12主要涉及线性代数,实验13～16主要涉及概率统计,当然有些实验可能用到不止一方面的知识;这三部分内容相对而言较为容易.实验17～21的内容则相对难一些,尤其是最后3个实验的背景知识比较专门,不熟悉相应背景的读者开始接触这些实验会略有困难,但事实上实验所要求掌握的部分还是适合理工科学生水平的.

使用本书开设数学实验课宜在大学二年级,某些实验在一年级下半学期也可以选用,但更早开设此课程则不合适,主要原因是课程需要学生具有使用计算机的一定能力和对数学基础知识的适当掌握.

完成本教材教学的课内总学时约为36～45学时,课外需要相等的机时,但由于本课程的模块式结构特点,各实验之间一般没有先后次序的联系,因此教师可以灵活安排,既可集中在一个学期中,也可分散到几个学期;既可以独立开设课程,也可以和微积分、微分方程、线性代数、概率统计等课程结合进行教学,总的学时也可以根据客观情况作出安排.

本书中多数实验的内容和任务安排,具有若干层次,这主要是适应不同水平学生的需要.因此教师在进行数学实验教学时,对教材内容有所舍取,即根据学生的具体情况作出选择是十分必要的,特别在布置实验任务时,更不必局限于本书,而可以另外增加适当的问题或要求,使得大多数学生能完成实验,有余力的学生能做得更好.

数学实验的教学方式宜采用讲授与训练相结合、课内与课外相结合、理论推导及运算与上机操作相结合的方式.我们的经验是:每一实验先由教师授课2学时左右,介绍实验问题的背景和要求、相关的建模过程、解决问题的数学方法(包括数值计算方法等),再向学生布置实验任务.然后,学生分小组(每组2～3人为宜)在课外讨论、建模,再上机操作2学时左右,最后写出实验报告.在多数情况下对学生的实验情况作出小结是有益的;尤其对在实验报告中表现出对问题有自己独特的看法和兴趣,或者在任务的某一方面做得出色的学生,应注意给予另外的鼓励和指导,结果不仅对学生的发展有利,而且可能会促进教师对实验的理解和教学水平的提高.

在数学实验中结合使用数学软件是必要的,但软件主要还是作为一个工具,而对数学方法包括计算方法的思想的了解是理工科学生数学素质的体现.本书

中多数实验可以使用常用数学软件(Mathematica 或 Matlab),建议教师在布置任务时,注意要求学生除了会使用软件,更应要求适当掌握有关的建模和数学思想.

责任编辑 杨芝馨
封面设计 李卫青
责任绘图 李维平
版式设计 史新薇
责任校对 俞声佳
责任印制 陈伟光

目　　录

[实验一] 曲柄滑块机构的运动规律

一、实验目的

本实验主要涉及微积分中对函数特性的研究. 通过实验复习函数求导法、Taylor 公式和其他有关知识. 着重介绍运用建立近似模型并进行数值计算来研究、讨论函数的方法.

二、实际问题

曲柄滑块机构是一种常用的机械结构,它将曲柄的转动转化为滑块在直线上的往复运动,是压气机、冲床、活塞式水泵等机械的主机构. 图 1.1 为其示意图.

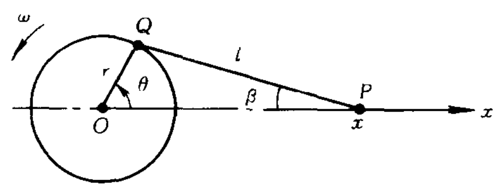

图 1.1

记曲柄 OQ 的长为 r,连杆 QP 的长为 l. 当曲柄绕固定点 O 以角速度 ω 旋转时,由连杆带动滑块 P 在水平槽内作往复直线运动. 假设初始时刻曲柄的端点 Q 位于水平线段 OP 上,曲柄从初始位置起转动的角度为 θ,而连杆 QP 与 OP 的锐夹角为 β(称为摆角). 在机械设计中要研究滑块的运动规律和摆角的变化规律,确切地说,要研究滑块的位移、速度和加速度关于 θ 的函数关系,摆角 β 及其角速度和角加速度关于 θ 的函数关系,进而

(1) 求出滑块的行程 s(即滑块往复运动时左、右极限位置间的距离);

(2) 求出滑块的最大和最小加速度(绝对值),以了解滑块在水平方向上的作用力;

(3) 求出 β 的最大和最小角加速度(绝对值),以了解连杆的转动惯量对滑块的影响.

在求解上述问题时,我们假定 $r = 100$ (mm), $l = 3r = 300$ (mm),

$\omega = 240$ (转/min).

三、数学模型

取 O 点为坐标原点，OP 方向为 x 轴正方向，P 在 x 轴上的坐标为 x，那么可用 x 表示滑块的位移. 利用三角关系，立即得到

$$x = r\cos\theta + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta} \tag{1.1}$$

由于 $\theta = \omega t$，故有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \tag{1.2}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -r\sin\theta - \frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta}} \tag{1.3}$$

于是滑块的速度

$$v = -\omega r\sin\theta\left[1 + \frac{r\cos\theta}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta}}\right] \tag{1.4}$$

进而，可以得到滑块的加速度为

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} \\ &= -\omega^2 r\left[\cos\theta + \frac{r(l^2\cos2\theta + r^2\sin^4\theta)}{(l^2 - r^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\right] \end{aligned} \tag{1.5}$$

同样，基于关系式

$$l\sin\beta = r\sin\theta \tag{1.6}$$

我们有摆角的表达式

$$\beta = \arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\theta\right) \tag{1.7}$$

式(1.6)对 t 求导，

$$l\cos\beta\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = r\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\omega\cos\theta$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{r\omega}{l}\frac{\cos\theta}{\cos\beta} \tag{1.8}$$

由此再得

$$\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{r\omega}{l}\left(-\frac{\omega\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}}{\cos^2\beta}\right) \tag{1.9}$$

利用(1.6)，不难由上两式导出

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=\frac{r\omega\cos\theta}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta}} \tag{1.10}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{r\omega^2\sin\theta(l^2-r^2)}{(l^2-r^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.11}$$

至此,我们得到了滑块位移 x 和连杆摆角 β 运动规律中有关变量依赖 θ 的表达式.

虽然我们已经得到了有关变量的解析式,但是要求出问题的解并非十分简单.由于滑块加速度和摆角角加速度的函数表达式(1.5)和(1.11)相当复杂,从这两个式子来了解这两个量并不方便,而要用它们进一步求出极值则更加不易(当然,可以借助数学软件来进行,我们把这一点留给读者.).

由于数学模型本身是对实际问题的抽象,从而也必定有某种简化和忽略.即使我们得到了问题的解析形式解,一般说来,它仍然是对实际情况的近似.为了方便起见,对较为复杂的解析模型进行近似处理常常是必要的.事实上,在曲柄连杆结构(以及不少工程问题)的研究中,确实经常使用着这个方法.

四、近似模型

将位移的表达式(1.1)改写为

$$x=r\cos\theta+l\left(1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

一般而言,$\frac{r^2}{l^2}$是远比 1 小的数,于是利用

$$(1+\varepsilon)^{\alpha}=1+\alpha\varepsilon+\cdots,\quad |\varepsilon|<1 \tag{1.12}$$

得到滑块位移的近似模型为

$$x_1=r\cos\theta+l-\frac{r^2}{2l}\sin^2\theta \tag{1.13}$$

从而有相应的近似速度

$$\begin{aligned} v_1&=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\left(-r\sin\theta-\frac{r^2}{2l}\sin2\theta\right)\\ &=-\omega r\left(\sin\theta+\frac{r}{2l}\sin2\theta\right) \end{aligned} \tag{1.14}$$

和近似加速度

$$a_1=\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=-\omega^2r\left(\cos\theta+\frac{r}{l}\cos2\theta\right) \tag{1.15}$$

这里的速度 v_1 和加速度 a_1 是直接对近似位移模型 x_1 求导得来,而不是对 v 和 a 的精确表达式(1.4)和(1.5)的近似.当然,我们也可以直接从滑块速度的

解析式(1.4)进行近似. 仍利用公式(1.12)有

$$\frac{1}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{l}\left(1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{l}\left(1+\frac{r^2}{2l^2}\sin^2\theta\right)$$

把上式代入(1.4)，就得到滑块速度的近似模型

$$\begin{aligned}v_2&=-\omega r\sin\theta\left[1+\frac{r\cos\theta}{l}\left(1+\frac{r^2}{2l^2}\sin^2\theta\right)\right]\\&=-\omega r\left(\sin\theta+\frac{r\sin2\theta}{2l}+\frac{r^3\sin^2\theta\sin2\theta}{4l^3}\right)\end{aligned}\tag{1.16}$$

从(1.16)出发,又可得近似加速度

$$a_2=-\omega^2r\left[\cos\theta+\frac{r\cos2\theta}{l}+\frac{r^3(\sin^22\theta+2\sin^2\theta\cos2\theta)}{4l^3}\right]\tag{1.17}$$

对摆角 β 可以利用幂级数展开的 Maclaurin 公式

$$\arcsin\varepsilon=\varepsilon+\frac{\varepsilon^3}{6}+\cdots,\quad |\varepsilon|<1\tag{1.18}$$

得到摆角的近似模型. 粗略一些,可以取

$$\beta_1=\frac{r}{l}\sin\theta\tag{1.19}$$

$\left(\text{当}\frac{r}{l}\text{较小时可用此式}\right)$. 而必要时,可以取

$$\beta_2=\frac{r}{l}\sin\theta+\frac{r^3}{6l^3}\sin^3\theta\tag{1.20}$$

相应的近似角速度为

$$\frac{d\beta_1}{dt}=\omega\frac{r}{l}\cos\theta\tag{1.21}$$

或

$$\frac{d\beta_2}{dt}=\omega\left(\frac{r}{l}\cos\theta+\frac{r^3}{2l^3}\sin^2\theta\cos\theta\right)\tag{1.22}$$

近似角加速度为

$$\frac{d^2\beta_1}{dt^2}=-\omega^2\frac{r}{l}\sin\theta\tag{1.23}$$

或

$$\frac{d^2\beta_2}{dt^2}=-\omega^2\left[\frac{r}{l}\sin\theta+\frac{r^3}{2l^3}(\sin^3\theta-\sin2\theta\cos\theta)\right]\tag{1.24}$$