多维奇异积分和积分方程

〔苏联〕C. Γ. 米赫林著　李明忠　吳立鹏譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是作者的一本专著，研究欧氏空間或李雅普諾夫流形上的奇异积分以及含有这些积分的方程，运用符号的概念，建立了一系列重要的結果．全书共分八章．第一章对各方面研究的結果作了綜述，并叙述了閱讀本书所必需的若干知識．第二章至第六章討論多維奇异积分，包括这些积分的簡单性质，合成法則，在泛函空間 L_p 中的主要結果以及有关符号的性质．第七章研究奇异积分方程和方程組．第八章討論了多維奇异积分方程在数学物理边值問題中的若干应用．最后另有附录一篇，研究富里叶积分乘积的問題．本书可供高等学校数学系高年級学生、研究生及科研工作人員参考．

МНОГОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

С. Г. Михлин

Физматгиз, 1962

多維奇异积分和积分方程

李明忠　吳立鵬　譯　陈傳璋　校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷六厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32　印張 7　排版字数 172,000
1964 年 5 月第 1 版　1964 年 5 月第 1 次印刷
印数 1—4,500

統一书号 13119·564　定价（十四）1.20 元

序 言

本书主要是叙述作者在关于多維奇异积分和含有这些积分的方程的理論方面所得到的一些結果；同时，为了組成所述的理論，也需要引进其他作者的結果．但是，作者考虑到，在奇异积分方面有着一系列重要而且有意义的工作，它們以另外一些思想方法为基础，同本书的內容不发生直接的联系．为了将这些工作介紹給讀者，在緒論的 § 1 中簡要地叙述了这些工作的內容；在这方面，作者力求不忽視任何一个有意义的工作．緒論的其他几节包含了今后必需的一些知識；特別，在 § 2 中讲述了 Banach 空間的方程一般理論的某些問題，这些問題的本身也是有意义的．

研究的主要对象是展布在欧氏空間或无边的 Ляпунов 流形上的奇异积分，以及含有这些积分的方程；研究是在泛函空間 L_p 中进行的．有关这些方程的一些主要結果是用作者所引进的符号概念这一术語十分簡单地加以表达：如果奇异方程的符号滿足某些光滑性条件，而且它的模的下界是正的，那么对于給定的方程，Fredholm 的基本定理是成立的．如所周知，对于一般情形下的一維奇异方程和多維奇异方程組，这样的結論是不成立的．

在第八章中給出了多維奇异积分方程在数学物理边值問題中的某些应用．当然，第八章的內容远沒有給出所有可能的这一类应用；这一点即使从 A. Calderon [2] 和山口 [1] 的工作中也可以看到，他們将奇异积分很成功地应用到双曲型偏微分方程中去．

Fourier 积分的乘积問題是和奇异积分算子的理論相联系着的；就作者所知，这个問題直到最近在文献中还沒有触及到，虽然对于 Fourier 級数的类似問題已有很多工作．在附录中叙述了作

者所得到的空間 L_p 中 Fourier 积分乘积的理論.

作者謹向 О. А. Олейник, Г. П. Акилов 和 Х. Л. Смолицкий 表示誠摯的謝意，他們讀完了本书的原稿并且提出了一系列宝貴的意見. 作者采納了所有这些意見并在本书的許多地方作了改进.

C. Г. 米赫林

列宁格勒 1961 年 4 月

目　录

第一章 緒 論

§1 結果簡述

1° 差不多在 Fredholm 建立关于具有連續(或至少是有界)核的积分方程理論的同时,出現了 Hilbert 和 Poincaré 的著名工作,在其中研究了所謂奇异积分方程,即这些方程中的积分在通常意义下是发散的,而应該按 Cauchy 主値的意义来理解,或者如目前所采用的說法,积分是奇异的. 与 Fredholm 方程相比較,奇异积分方程和它不同的一个很重要的特性是所含的奇异积分是相应函数空間的有界算子,但不是全連續算子;因此 Fredholm-Riesz-Szauder 理論不能应用于奇异积分方程. 这些方程的另一个特性是,自变量的个数对于它們不是沒有关系的;故必須对一个和几个自变量的情形加以区别.

上面提到的 Hilbert 和 Poincaré 的工作是关于一維奇异积分方程的. 这些方程的理論和应用在其后的一系列工作中有了广泛的发展,有关这里的結果,在 Н. И. Мусхелишвили[1], Н. П. Векуа[1], Б. В. Хведелидзе[1] 和 Ф. Д. Гахов[1] 等专著中从不同的观点作了詳略程度不同的叙述,也可参看作者的概括性論文[11]. 在 G. Fichera 的短文[1]中也叙述了一維奇异积分方程理論的某些問題.

2° 多維奇异积分方程的第一个出色的工作是 F. G. Tricomi 的[1,2]. 这位作者研究了如下形式的二重奇异积分:

$$Au=v(x)=\iint\limits_{E_2}\frac{f(\theta)}{r^2}\,u(y)\,dy, \tag{1}$$

其中 x 和 y 是欧氏空間 E_2 中的点，r 和 θ 是点 y 关于极 x 的极坐标；Tricomi 称函数 $f(\theta)$ 为积分(1)的**特征**，积分(1)理解为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{r>\varepsilon}\frac{f(\theta)}{r^2}u(y)\,dy.$$

Tricomi 建立了积分 (1) 存在的必要和充分条件，它至少适用于 $u(x)$ 是满足正指数的 Lipschitz 条件的情况；上述条件就是

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta=0; \tag{2}$$

这个条件可以推广到多維的情形，以后我們总假定它是满足的.

业經指出，积分 (1) 是在平面內挖去了圓 $r<\varepsilon$ 的区域上同一被积函数的积分的极限，Tricomi 研究了在平面上挖去点 x 的某个非圓邻域的区域上积分的极限問題，并且得出了下面的結果. 假設从点 x 挖去邻域 σ_ε，它的边界方程具有形式 $r=\alpha(\varepsilon,\theta)$，而且假設关于 θ 一致地有

$$\frac{\alpha(\varepsilon,\theta)}{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\beta(\theta),\quad \beta(\theta)>0,$$

这时

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{E_2-\sigma_\varepsilon}\frac{f(\theta)}{r^2}u(y)\,dy$$
$$=\iint\limits_{E_2}\frac{f(\theta)}{r^2}u(y)\,dy-u(x)\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\ln\beta(\theta)\,d\theta.$$

Tricomi 也建立了二重弱奇性积分的微分公式

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\iint\limits_{E_2}\frac{\varphi(\theta)}{r}u(y)\,dy$$
$$=\iint\limits_{E_2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\varphi(\theta)}{r}\right]u(y)\,dy+u(x)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\frac{\partial r}{\partial x_k}\,d\theta.$$

Tricomi 的重要結果之一还在于建立了二重奇异积分的合成法則，换句話說，就是形如(1)的算子的乘积法則. 假設

$$A_ju=\iint\limits_{E_2}\frac{f_j(\theta)}{r^2}u(y)\,dy,\quad j=1,2,$$

則

$$A_1A_2u=\alpha u(x)+\iint\limits_{E_2}\frac{f(\theta)}{r^2}u(y)dy, \tag{3}$$

其中

$$\alpha=2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}_1(\theta)\tilde{f}_2(\theta+\pi)d\theta, \tag{4}$$

$$f(\theta)=\frac{d}{d\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\{\tilde{f}_1(\psi)\tilde{f}_2(\theta)+\tilde{f}_1(\theta)\tilde{f}_2(\psi)-\tilde{f}_1(\psi)\tilde{f}_2(\psi+\pi)\}\operatorname{ctg}(\psi-\theta)d\psi; \tag{5}$$

在这些公式里 $\tilde{f}_j(\theta)$ 表示关于 $f_j(\theta)$ 的不定积分，$f_j(\theta)$ 的 Fourier 級数不包含自由項.

Tricomi 在論文[2]中推导公式 (4) 时犯了錯誤，导出了不正确的結果. 作者在[2]中修正了这个錯誤；且順便指出，在論文[1]中，Tricomi 沒有推出正确的公式(4).

Tricomi 利用公式(3)指出了求解形如

$$au(x)+\iint\limits_{E_2}\frac{f_1(\theta)}{r^2}u(y)dy=g(x),\quad a=\text{常数} \tag{6}$$

的奇异积分方程的某些方法.

在方程(6)的二边作用以算子

$$Bv=bv(x)+\iint\limits_{E_2}\frac{f_2(\theta)}{r^2}v(y)dy,\quad b=\text{常数},$$

就归結到方程

$$(ab+\alpha)u(x)+\iint\limits_{E_2}\frac{u(y)}{r^2}[bf_1(\theta)+af_2(\theta)+f(\theta)]dy=Bg, \tag{7}$$

其中 α 和 $f(\theta)$ 是由公式(4)和(5)确定的. 我們选擇常数 b 和特征 $f_2(\theta)$，如果这种选擇是可能的話，使得 $ab+\alpha=1$ 和

$$bf_1(\theta)+af_2(\theta)+f(\theta)=0, \tag{8}$$

这时，公式(7)直接給出了方程(6)的解. 等式(8)是关于未知函数 $\tilde{f}_2(\theta)$ 的一維奇异积分方程；Tricomi 沒有深入探討过这个方程.

3° 以后关于多維奇异积分的重要工作是 G. Giraud 的[1]. 这个作者研究了分布在任意 m 維閉的 Ляпунов 流形上的积分，这些流形不必是連通的，但它不具有单边的部分①. 在所研究的流形 Γ 上，通常的方法是引进参数：把流形划分为有限个相互联接的部分，其中每一部分都相互单值地映射到 m 維欧氏空間中的某一区域；因为流形是 Ляпунов 的，于是可以相信，实现上述映照的函数具有一阶导数，并滿足正指数的 Lipschitz 条件.

G. Giraud 研究了形如

$$\int_\Gamma K(x, y)u(y)d\Gamma_y \tag{9}$$

的奇异积分，其中函数 $u(y)$ 滿足具有正指数的 Lipschitz 条件，而核 $K(x, y)$ 服从于以下的要求.

1. 把流形 Γ 分解成上面所說的部分，并假設点 x 和 y 属于流形的同一部分. 以 $x_1, x_2, \cdot\cdot, x_m$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 表示 m 維欧氏空間中点 x 和 y 的笛卡尔坐标，并且令

$$r^2 = \sum_{j=1}^{m} (x_j - y_j)^2.$$

这时，$K(x, y) = K_1(x,y) + K_2(x,y)$，其中 $K_2(x, y) = O(r^{\lambda-m})$，$\lambda>0$，而 $K_1(x, y) = K_1^*(x_1-y_1, \cdots, x_m-y_m; v_1(x), \cdots, v_p(x))$，而且 $K_1^*(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m; v_1, v_2, \cdots, v_p)$ 和它对变量 $v_1, v_2, \cdots, v_p$ 的一阶导数是关于 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ 的 m 次齐次函数，如果 ω_j 不全为零，它們是連續的. 还要假設，在同样的条件下导数 $\dfrac{\partial K_1^*}{\partial \omega_j}$ 也是連續的，而且函数 v_i 是連續可微的.

2. 对于每一点 $x \in \Gamma$，可以有这样一个正定形式

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{m} A_{\alpha\beta}(x) t_\alpha t_\beta,$$

使得在流形 Γ 内由不等式

① 只有一边的曲面如拓扑上的 Möbius 带.——譯者注

$$0<\eta^2<\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta}(x)(x_\alpha-y_\alpha)(x_\beta-y_\beta)<\zeta^2$$

所确定的那部分上，积分

$$\int K_1(x, y)d\Gamma_y$$

等于零，不管足够小的数 η 和 ζ 是什么.

Giraud 定义积分(9)是在流形 Γ 内挖去了由不等式

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta}(x)(x_\alpha-y_\alpha)(x_\beta-y_\beta)<\eta^2 \tag{10}$$

所确定的那一部分上积分

$$\int K(x, y)u(y)d\Gamma_y$$

在 $\eta\to 0$ 时的极限. 他証明了，在所列举的条件下，积分(9)确定了一个函数，它满足与函数 $u(y)$ 有相同指数的 Lipschitz 条件，如果这个指数小于1的話. 类似地可以研究这样两个积分的合成，其中一个是奇性的，另一个是弱奇性的；他也研究了另外一些情形的奇异积分的合成①.

Giraud 研究了奇异积分方程

$$u(x)-\lambda\int_\Gamma K(x, y)u(y)d\Gamma_y=f(x), \tag{11}$$

它的核的奇性部分 $K_1(x, y)$ 总是具有特殊的形式：

$$K_1(x, y)=\sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha(x)(x_\alpha-y_\alpha)\left[\sum_{\beta,\gamma=1}^{m} A_{\beta\gamma}(x_\beta-y_\beta)(x_\gamma-y_\gamma)\right]^{-\frac{m+1}{2}}, \tag{12}$$

其中 $c_\alpha(x)$ 是某些給定的函数.

在方程(11)的两边作用以算子

$$v(x)+\lambda\int_\Gamma H(x, y; \lambda)v(y)d\Gamma_y,$$

---

① 在不久前出現的 Т. Г. Гегелиа 的論文[8]中得到了分布在 Ляпунов 流形上奇异积分合成的一些新結果，从而也研究了一个是奇性的，另一个是弱奇性的积分的合成.

其中 $H(x, y; \lambda)$是任意的奇性核，则导得方程

$$[1+\lambda^2\Phi(x, \lambda)]u(x)+\lambda\int_\Gamma\Big[H(x, y; \lambda)-K(x, y)$$

$$-\lambda\int_\Gamma H(x, z; \lambda)K(z, y)d\Gamma_z\Big]u(y)d\Gamma_y$$

$$=f(x)+\lambda\int_\Gamma H(x, y; \lambda)f(y)d\Gamma_y; \tag{13}$$

其中 $\Phi(x, \lambda)$ 是完全由核 K, H 和流形 Γ 所确定的函数．方程(13) 是 Fredholm 型的，只要核 $H(x, y; \lambda)$ 是这样选擇的，使得 $1+\lambda^2\Phi(x, \lambda)\neq 0$，并且

$$H(x, y; \lambda)-K(x, y)-\lambda\int_\Gamma H(x, z; \lambda)K(z, y)d\Gamma_z=O(r^{k-m}),$$

$$k>0. \tag{14}$$

对于流形的維数 $m=1$ 和 $m=2$ 的情形，G. Giraud 解出了方程(14)．第一种情形对于我們是不感兴趣的．当 $m=2$ 时，Giraud 归結为求解一个关于輔助未知函数 $\omega(t)$ 的一維奇异积分方程

$$\omega(t)-\mu\int_0^{2\pi}\left(\cos t\ln\sin^2\frac{\theta-t}{2}-\sin t\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\right)\omega(\theta)d\theta$$

$$=-\Psi(t)\cos t, \tag{15}$$

其中 $\Psi(t)$是某个已知函数．方程 (15) 可以化为某个調和函数的边值問題而获得解决．因而对于具有核(12)的方程 (11) 的求解，可用上面所述的方法归結为 Fredholm 方程，方程 (11) 的一切解都满足这个方程①：这种归結是可能的，如果在給定 λ 时，$1+\lambda^2\Phi(x, \lambda)$ 对无論怎样的 x 均不为零，否则这种归結就不可能．

G. Giraud 在論文[1]的結尾，給出了原先所得到的結果的某些应用．对一般的二阶椭圓型方程的解可以作出类似的单层位势．如果这个位势的密度满足指数小于 1 的 Lipschitz 条件，则在这个曲面上这个位势存在一阶导数，它們满足具有同样指数的

① 这个問題通常称为**正則化問題**(参看§2)．

Lipschitz 条件;并且它們都能用某个奇异积分来表示. 以后 Giraud 把这个結果应用到二阶椭圓型方程的斜微商問題中去(参看下面,第 43 节);Giraud 把这个問題归結为具有形式(12)的核的奇异积分方程問題.在二維或三維空間坐标的情形,假設微分的方向①不是所研究区域的境界的切綫方向,Giraud 証明了 Fredholm 定理对上述方程是正确的. Giraud 在論文[2]中还把这个結論推广到任意多維空間坐标的情形.

4° 在作者的工作[1, 2]中研究了确定在二維平面上的二重积分. 闡明了形如

$$au(x)+\iint\limits_{E_2}\frac{f(\theta)}{r^2}u(y)\,dy \tag{16}$$

的奇异算子可以表示成带有特征 $e^{i\theta}$ 的奇异算子的正和負冪的級数的形式;这种情况使得作者有可能把算子(16)联系于某一函数,即所謂这个算子的**符号**,使得算子的和及积对应于它們符号的和及积. 符号的概念可以立即拓广到更一般形式的算子

$$a(x)u(x)+\iint\limits_{E_2}\frac{f(x,\theta)}{r^2}u(y)\,dy, \tag{17}$$

只要对函数 $a(x)$ 和 $f(x,\theta)$ 对于 x 的依賴特性加以某些限制即可. 使用了符号这个术語,可以很簡单地解决奇异积分方程的正則化問題: 正則化是可能的,当且仅当符号的模的下确界是正的. 在短文[3]中作者定义了分布在二維流形上的奇异积分的符号.

G. Giraud[3] 刊載了一个未曾推导的关于确定奇异积分符号的公式,該积分分布在任意維数的欧氏空間上. 这些公式的推导后来是在作者的論文[18]中給出的.

在作者的工作 [4, 5] 中研究了 $L_2(E_2)$ 上形如(17)的算子并且給出了它們有界性的簡单的充分条件. 这就使得作者有可能解决关于奇异积分方程等价正則化的問題,即把它归結成等价的

① 即斜导数的方向.——譯者注

Fredholm 型方程的問題(更精确地說是 Riesz-Szauder 型的). 如前所說,只要符号的模的下确界取为正的,条件仍是充分的,这样,如果含有二重积分的奇异积分方程可以正則化,那么它也可以等价正則化. 奇怪的是,对一維奇异积分方程,类似的結論是不存在的.

在短文[6, 7]中,作者証明了形如

$$au(x)+\int_{E_m}\frac{f(\theta)}{r^m}u(y)dy,\ r=|y-x|;\quad \theta=\frac{y-x}{r} \tag{18}$$

的奇异算子在 $L_2(E_m)$ (E_m 是 m 維的欧氏空間) 中是有界的,假若这个算子的符号是有界的,并且算子的范数不超过符号的模的最大值. 也建立了,算子(18)可以表示成带有符号 $e^{2i\vartheta_1}$, $e^{2i\vartheta_2}$, $\cdots$, $e^{2i\vartheta m-2}$, $e^{i\varphi}$ 的奇异算子彼此調配后的冪級数的形式,其中 ϑ_1, ϑ_2, $\cdots$, ϑ_{m-2}, φ 是点 θ 的角坐标;后面这些算子是复正交的. 在短文[7]中还得到了更强的結論,按照这个結論,在系数 a 和特征 f 还依賴于 x 的情况下,奇异算子的范数不超过符号的模的最大值. 后来 M. Г. Крейн 向作者指出,这个結論事实上并未証明;从所有能够看得到的情况来說,它是不正确的①.

在上述的短文以及作者的論文[11]中,証明了多維奇异积分方程的一系列定理;这些定理的証明是不可靠的,因为它們依賴于上述的未被証明的結論. 在以后的工作中(参看下面),作者弄清楚这个定理是正确的,不过要对符号加上更加严格的限制. 作者认为这里还必須指出一个在論文 [11, 19] 中所犯的錯误:在一般情况下,带有符号行列式不为零的多維奇异积分方程組的指数可以是不等于零的.

有关二維奇异积分方程的某些新結果包含在 И. А. Ицкович 的工作[1]中.这里可指出他的关于变数代換下符号值域不变的定理. Ицкович 在論文 [2] 中給出了用符号来表示二重奇异积分特

① 对此,詳細的可参看作者的短文[17],同样也可以参看在后面 §25 中的注.

征的表达式.

5° 值得提出的是 W. J. Trjitzinsky 的工作[1]，他研究的是在具有边界的二維曲面上的奇异积分，在这篇文章中做出了很有趣的結果，但是，从我們的观点，即企图在三維空間中建立起平面 Riemann 問題型的边值問題的理論来看，它远不是完全的.

6° J. Horwáth[2～4]将作者和 Giraud 得到的奇异积分合成的公式推广到密度①是 L. Schwartz 意义下广义函数的奇异积分上去②.

7° 在 1952 年开始出現了 A. P. Calderon 和 A. Zygmund 的工作[1～7]；这些工作的結果在 Calderon[1]和 Zygmund[3,4]的概述性文章中作了部分地叙述.

Calderon 和 Zygmund 的工作中所得到的基本結果是关于多維奇异积分算子在空間 $L_p(E_m)$, $p>1$, 中的有界性. Calderon 在文章[1]中应用 Fourier 变换研究了形如

$$\int_{E_m} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)dy \tag{19}$$

的积分，从而得到了这样的定理：若积分的核的 Fourier 变换有界，則奇异积分算子在 $L_2(E_m)$中有界. 以后作者[19]指出，积分(19)的核的 Fourier 变换与它的符号重合；从而說明了上面提到的 A. P. Calderon 和 A. Zygmund 的定理与作者[7]在 1938 年証明的相同. 然而有趣的是由 Calderon 和 Zygmund 所建立的符号有界性的准則：符号有界的充分条件是积分

$$\int_S |f(\theta')| \ln \frac{1}{|\cos\gamma|} dS'$$

有界，其中 S 是单位球面，dS' 是它的面积元素，γ 是向量 $O\theta$ 与 $O\theta'$ 之間的夹角.

---

① 参看下面 §5.

② 在 B. Malgrange 的文章[1～7]中也研究了作为广义函数空間中算子的奇异积分，这些文章作者在不久前才知道.

同样在 Calderon 和 Zygmund 的同一文章 [1] 中也研究了空間 $L_p(E_m)$, $1<p<\infty$, $p\neq 2$, 中的积分(19); 証明了, 如果 $f(\theta)$ 滿足 Dini 条件

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt<\infty, \tag{20}$$

其中 $\omega(t)$ 是特征 $f(\theta)$ 的連續模,則算子(19)在 $L_p(E_m)$ 中有界.

文章 [1] 还包含了一系列其他的結果, 我們不停留在这些上面.

在文章 [2] 中研究了在具有單位長度的側边并以坐标原点为中心的立方体 R 上的奇异积分; 假定积分的核 $K(x-y)$ 和密度 $u(y)$ 是周期的, 它关于每一个坐标具有单位的周期. 在特征满足 Dini 条件的假定下, 証明了一系列类似于文章 [1] 的但适合于空間 $L_p(R)$ 的定理.

在作者的短文[17]中指出了,二个奇异积分

$$\iint\limits_{E_2}\frac{f(x,\theta)}{r^2}\,u(y)\,dy, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x,\,\theta)\,d\theta=0$$

在 $L_2(E_2)$ 中有界,假如

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x,\,\theta)|^2\,d\theta\leqslant C=\text{const}.$$

Calderon 和 Zygmund[3] 推广了这个定理到任意維数的情况; 他們还指出, 在后面一个积分中的指数 2 可以代之以任意的 $p>\dfrac{2(m-1)}{m}$; 同时又用例子說明了, 再减少 p 是不可能的. 在文章 [3] 中包含着作者在 [19] 中所指出的錯誤; 这个錯誤已由 Calderon 和 Zygmund 在短文[6]中作了改正.

按照我們的見解, Calderon 和 Zygmund 在文章[4]中所得到的最重要的結果是关于奇异积分的理論. 現在我們簡单地叙述一些这篇文章中的重要定理.

定理 1.1 若积分

$$\int_S |f(\theta)|\, dS, \quad \int_S |f(\theta)+f(-\theta)|\ln^+|f(\theta)+f(-\theta)|dS$$

存在，則奇异积分算子

$$\int_{E_m} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)dy$$

对于任意的 p, $1<p<\infty$, 在 $L_p(E_m)$ 中有界.

定理 2.1 若

$$\int_S |f(x, \theta)|^{p'} dS \leqslant C = \text{const}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,$$

則奇异积分算子

$$\iint\limits_{E_m} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y)dy$$

在 $L_p(E_m)$ 中有界, $1<p<\infty$.

对于 $f(x, \theta)=-f(x, -\theta)$ 的情形, И. А. Ицкович[3]給出了定理 2.1 的簡单的并且很好的証明，这个証明利用了广义函数和带有 Cauchy 核的一維奇异算子在 L_p 中有界性的 M. Riesz 定理.

Calderon 和 Zygmund 在文章[5]中研究了形如

$$Ku = au(x) + \int_{E_m} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)dy \tag{21}$$

的奇异算子的合成. 把它們分解为两个算子类: 1)带有关于点 θ 的笛卡尔坐标无穷次可微的特征 $f(\theta)$ 的算子类 $\mathscr{A}$; 2) 使得量

$$\|K\|_p = |a| + \left[\int_S |f(\theta)|^p dS\right]^{\frac{1}{p}}$$

是有限的算子类 $\mathscr{A}_p$. 証明了，这两个算子类对于算子的乘积是閉的;如果 K 和 L 是类 $\mathscr{A}_p$ 的算子，那么

$$\|KL\|_p \leqslant A_p \|K\|_p \cdot \|L\|_p,$$

其中 A_p 仅依賴于 p.

在文章[7]中研究了作用于下列一类函数上的 Laplace 算子