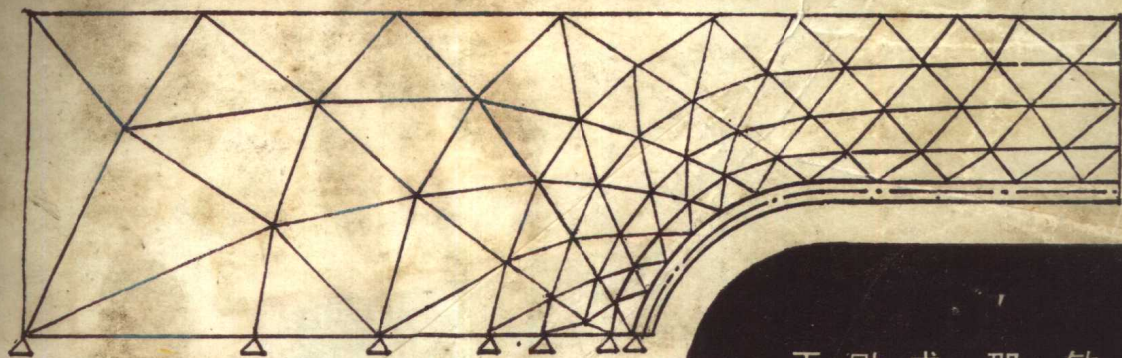


有限单元法

基本原理与数值方法

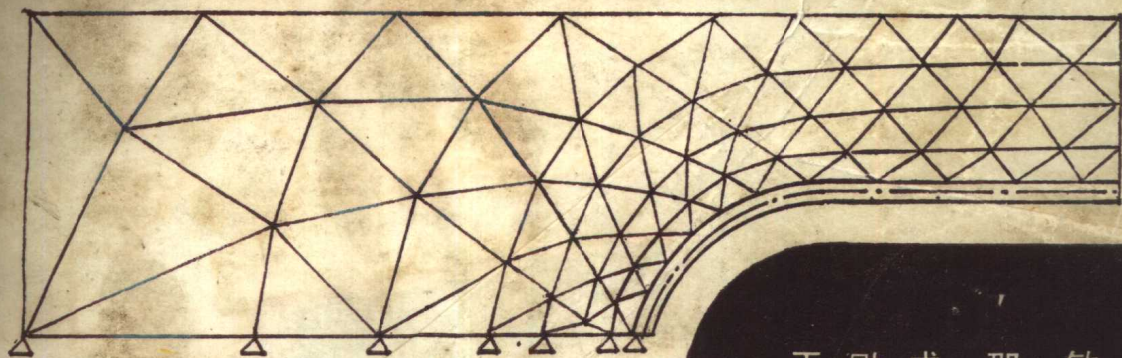


王勖成 邵敏

清华大学出版社

有限单元法

基本原理与数值方法



王勖成 邵敏

清华大学出版社

前 言

有限单元法发展至今天，已成为工程数值分析的有力工具。特别是在固体力学和结构分析的领域内，有限单元法取得了巨大的进展，利用它已成功地解决了一大批有重大意义的问题，很多通用程序和专用程序投入了实际应用。同时有限单元法又是仍在快速发展的一个学科领域，它的理论、特别是应用方面的文献经常而大量地出现在各种刊物和文集当中。

上述情况要求正在从事和即将参加“四化”建设的工程技术人员，特别是担负着开发和研究任务的科学技术工作者，能够较好地掌握有限单元法的基本原理和数值方法，以便一方面能有效地利用现有的成果和计算程序，另一方面能具有改进现有方法和计算程序，并发展新的单元和数值方法以及计算程序的能力。

本书正是为了适应上述要求，为工科院校力学机械、土水等专业本科高年级学生以及硕士研究生学习有限单元法课程提供一本教材。同时也可作为上述专业工程技术人员和教师工作和进修的参考读物。

本书编写的重点是：有限单元法表达格式的建立途径和方法；单元和插值函数的构造方法以及不同单元特性的分析比较；各种数值方法的原理、分析比较以及计算机执行。

内容的具体选择和安排反映了作者近十年来担任本课程教学的经验，注意了循序渐进、理论和实践的结合。本书共有十四章。

第一章综合阐述有限单元法的理论基础，即加权余量法和变分法，并着重讨论了弹性力学的各个变分原理及其相互关系。

第二、三章通过杆件系统和平面问题阐明利用直接刚度法和变分法建立有限单元法表达格式的途径。同时通过这两个问题的计算程序，具体阐述了计算程序的结构和基本技巧。

第四章专门讨论实际中有广泛应用的轴对称问题的有限元格式和应用，并讨论用部分离散的方法处理非轴对称载荷的原理和步骤。

第五章详细讨论了构造单元和插值函数的原则和方法，并着重讨论了在实际中有很广泛应用的等参单元的构造方法和表达格式。

第六章进一步讨论等参单元用于实际分析时的若干问题，例如数值积分阶数的选择，应力计算结果的改善，非协调元的利用等。

第七章专门讨论了大型、对称、稀疏、带状为系数矩阵特点的线性代数方程组的解法。这是有限单元法计算执行过程中的核心内容，对计算效率有很重要的影响。在本章中综合介绍了几种常用算法及其程序特点。

第八、九、十章讨论板壳问题的有限单元法。由于板壳结构有广泛的实际应用，同

板壳理论的单元要求具有 C_1 连续性，即在单元交界面上要求有连续的位移导数，因此板壳单元形式的研究较长时期以来是有限元研究工作的重点内容之一。在这几章中我们着重讨论了几种常用单元的原理、格式和特点。同时还讨论了板壳单元和实体单元的联结方法。

第十一至第十四章分别讨论了热传导问题、结构动力学问题、材料非线性问题以及一般非线性（即包括几何非线性）问题的有限单元法。这几类问题在实际工程技术中具有重要意义，有限单元法在这些领域内取得很大的进展。这几章比较详细地阐述了这几类问题有限元格式的建立，具体讨论了各种有效的数值方法，并适当地介绍了进一步研究的问题。

这十四章内容大致可以分为两部分，前七章的基本内容可以作为本科生教材，后七章和前七章的部分较深入的内容可以作为研究生教材。

需要指出的是第一章的主要内容属于有限元的理论基础部分，未学习过其他有限元概论性课程的读者可以先学习第二、三章，掌握有限元的基本概念、一般步骤和特点以后，再学习第一章的主要内容，可能更有利于理解和消化。

作为教材，每一章后面附有习题和思考题，有的章还附有典型计算程序或子程序。

本书在编写过程中，曾得到清华大学杜庆华教授的热情支持，谢志成教授审阅了文稿，他们都对本书的编写提出了十分宝贵的意见。清华大学黄庆平同志曾帮助调试了若干子程序，岑章志同志和杨锡芬同志也为本书的编写作了有益的贡献。作者对他们表示衷心的感谢。

本书的第一、二、三、四、六、七、十一章主要由邵敏编写，其余各章主要由王勖成编写。由于水平限制，本书肯定存在许多不妥和需要改进之处，诚恳地希望读者提出批评和意见。

作者 一九八七年八月

第一章 预 备 知 识

1.1 引 言

在工程技术领域内，对于许多力学问题或场问题，人们已经得到了它们应遵循的基本方程（常微分方程或偏微分方程）和相应的边界条件，但能用解析方法求出精确解的只是方程性质比较简单、且几何边界相当规则的少数问题。对于大多数的工程技术问题，由于物体的几何形状较复杂或者问题的某些特征是非线性的，则很少有解析解。这类问题的解决通常有两种途径：一是引入简化假设，将方程和边界条件简化为能够处理的问题，从而得到它在简化状态下的解答。这种方法只在有限的情况下是可行的，因为过多的简化将可能导致不正确的甚至错误的解答。因此，人们多年来寻求和发展了另一种解决问题的途径和方法——数值解法。

已经发展的若干近似数值分析方法中，开始常用的是有限差分法。一个问题的有限差分模型可以给出它的基本方程的逐点近似。当采用较多的结点时，模型的精度便可得到改进。借助于有限差分技术，我们能够处理某些相当困难的问题。但当遇到几何形状复杂的边界条件时，应用有限差分法，解的精度受到限制，甚至发生困难。

近三十年来，随着电子计算机的飞速发展和广泛使用，出现了另一种新的数值方法——有限单元法。其基本前提是：将连续的求解域离散为一组有限个单元的组合体。这样的组合体能解析地模拟或逼近求解区域。由于单元能按各种不同的联结方式组合在一起，且单元本身又可以有不同的几何形状，因此可以模型化几何形状复杂的求解域，有限单元法作为一种数值分析方法的另一重要步骤是利用在每一个单元内假设的近似函数来表示全求解区域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数在各个单元结点上的数值以及插值函数表达。这样一来，一个问题的有限单元分析中，未知场函数的结点值就成为新的未知量，从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一经求解出这些未知量，就可以利用插值函数确定单元组合体上的场函数。显然，随着单元数目的增加，也即单元尺寸的缩小，解的近似程度将不断改进，如果单元是满足收敛要求的，近似解最后将收敛于精确解。

从应用数学角度来看，有限单元法基本思想的提出，可以追溯到 Courant^[1] 在 1943 年的工作，他第一次尝试应用定义在三角形区域上的分片连续函数和最小位能原理相结合，来求解 St. Venant 扭转问题。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因都涉足过有限单元的概念。但只是到 1960 年以后，随着电子数值计算机的广泛应用和发展，有限单元法的发展速度才显著加快。

[1] R. Courant, "Variational Method for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations" Bull. Am. Math. Soc, vol. 49, 1943.

现代有限单元法第一个成功的尝试，是将刚架位移法推广应用于弹性力学平面问题。这是 Turner, Clough^[2] 等人在分析飞机结构时于 1956 年得到的成果。他们第一次给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。三角形单元的单元特性是由弹性理论方程来确定的，采用的是直接刚度法。他们的研究工作打开了利用电子计算机求解复杂平面弹性问题的新局面。1960 年 Clough^[3] 进一步处理了平面弹性问题，并第一次提出了“有限单元法”的名称，使人们开始认识了有限单元法的功效。

二十多年来，有限单元法的理论和应用都得到迅速的、持续不断的发展。

从确定单元特性和建立求解方程的理论基础和途径来说，正如上面所提到的，Turner、Clough 等人开始提出有限单元法时是利用直接刚度法。它来源于结构分析的刚度法，这对我们明确有限单元法的一些物理概念是很有帮助的，但是它只能处理一些比较简单的实际问题。1963—1964 年，Besseling^[4]，Melosh^[5] 和 Jones^[6] 等人证明了有限单元法是基于变分原理的里兹 (Ritz) 法的另一种形式，从而使里兹法分析的所有理论基础都适用于有限单元法，确认了有限单元法是处理连续介质问题的一种普遍方法。利用变分原理建立有限元方程和经典里兹法的主要区别是有限单元法假设的近似函数不是在全求解域而是在单元上规定的，而且事先不要求满足任何边界条件，因此它可以用来处理很复杂的连续介质问题。从六十年代后期开始，进一步利用加权余量法来确定单元特性和建立有限元求解方程。有限单元法中所利用的主要是伽辽金 (Galerkin) 法。它可以用于已经知道问题的微分方程和边界条件、但是变分的泛函尚未找到或者根本不存在的状况，因而进一步扩大了有限单元法的应用领域。

二十多年来，有限单元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、传热学等连续介质力学领域。在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到优化设计并和计算机辅助设计技术相结合。可以预计，随着计算机技术的发展，有限单元法作为一个具有巩固理论基础和广泛应用效力的数值分析工具，必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用，其自身亦将得到进一步的发展和完善。

本章我们将简要介绍学习有限单元法必要的预备知识。在第 2 节扼要地引述了作为

-
- [2] M.J.Turner, R.W.Clough, H.C.Martin, L.C.Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures" J.Aeronaut Sci.vol. 23, No.9, 1956.
 - [3] R.W.Clough, "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis" Pro. 2nd ASME Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept.1960.
 - [4] J.F Besseling, "The Complete Analogy Between the Matrix Equations and the Continuous Field Equations of Structural Analysis" International Symposium on Analogue and Digital Techniques Applied to Aeronautics, Liege, Belgium, 1963.
 - [5] R.J.Melosh, "Basis for the Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method" AIAAJ., Vol.1, 1963.
 - [6] R.E.Jones, "A Generalization of the Direct-Stiffness Method of Structural Analysis" AIAAJ., Vol.2, 1964.

今后主要分析对象的弹性力学的基本方程以及它的矩阵和张量表达形式。在以后各节将讨论加权余量法和变分原理，其中包括自然变分原理和约束变分原理，如前所述，这部分知识是建立有限元方程的重要理论基础。

1.2 弹性力学基本方程

在有限单元法中经常要用到弹性力学的基本方程，现将这些方程连同相应的矩阵表达形式和张量表达形式综合于下，但不作推导。关于这些公式的推导可从弹性力学的有关教材中查找。

1.2.1 弹性力学基本方程的矩阵形式

弹性体在载荷作用下，体内任意一点的应力状态可由六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 来表示。其中 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 为正应力； $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 为剪应力。应力分量的正负号规定如下：如果某一个面的外法线方向与坐标轴的正方向一致，这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，与坐标轴反向为负；相反，如果某一个面的外法线方向与坐标轴的负方向一致，这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，与坐标轴同向为负。应力分量及其正方向见图 1.1。

应力分量的矩阵表示称为应力列阵或应力向量。

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T$$

弹性体在载荷作用下，还将产生位移和变形，即弹性体位置的移动和形状的改变。

弹性体内任一点的位移可由沿直角坐标轴方向的三个位移分量 u, v, w 来表示。它的矩阵形式是

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [u \ v \ w]^T$$

称作位移列阵或位移向量。

弹性体内任意一点的应变，可以由六个应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 来表示。其中 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 为正应变； $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 为剪应变。应变的正负号与应力

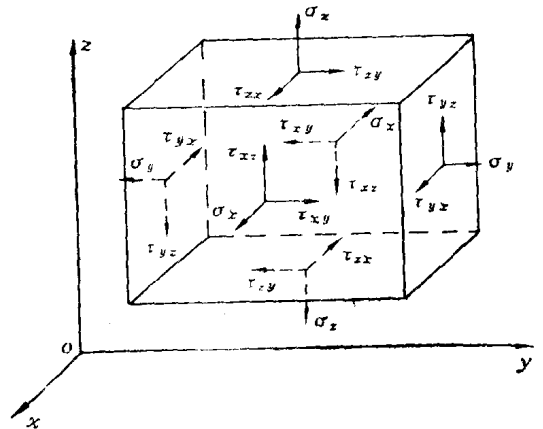


图 1.1 应力分量

的正负号相对应即应变以伸长时为正，缩短为负；剪应变是以两个沿坐标轴正方向的线段组成的直角变小为正，反之为负。图 1.2 的 (a)、(b) 分别为 ϵ_x 和 γ_{xy} 的正应变状态。

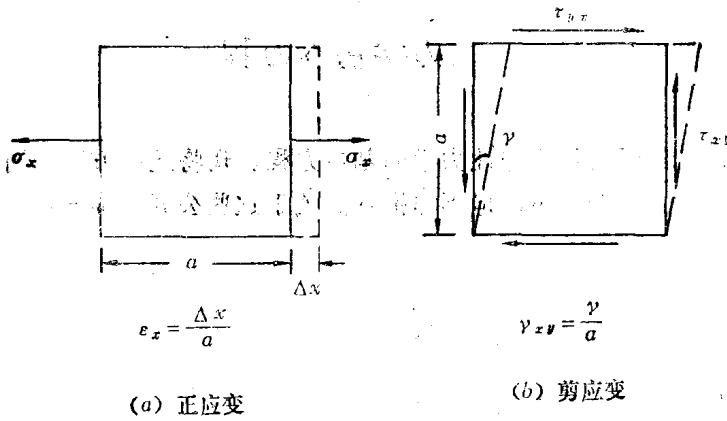


图 1.2 应变的正方向

应变的矩阵形式是

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T$$

称作应变列阵或应变向量。

对于三维问题，弹性力学基本方程可写成如下形式。

1. 平衡方程

弹性体 V -域内任一点沿坐标轴 x, y, z 方向的平衡方程为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

其中 f_x, f_y, f_z 为单位体积的体积力在 x, y, z 方向的分量。

平衡方程的矩阵形式为

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{f}} = 0 \quad \text{在 } V \text{ 域} \quad (1.2.2)$$

其中 \mathbf{A} 是微分算子

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (1.2.3)$$

\bar{f} 是体积力向量 $\bar{f}^T = [\bar{f}_x \ \bar{f}_y \ \bar{f}_z]$

2. 几何方程——应变-位移关系

在微小位移和微小变形的情况下，略去位移导数的高次幂，则应变向量和位移向量间的几何关系有

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.2.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}$$

几何方程的矩阵形式为

$$\varepsilon = \mathbf{L}u \quad \text{在 } V \text{ 域} \quad (1.2.5)$$

其中 \mathbf{L} 为微分算子

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \quad (1.2.6)$$

3. 物理方程——应力-应变关系

弹性力学中应力-应变之间的转换关系也称弹性关系。对于各向同性的线弹性材料，应力通过应变的表达式可用矩阵形式表示：

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon \quad (1.2.7)$$

其中

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \quad (1.2.8)$$

称为弹性矩阵。它完全取决于弹性体材料的弹性模量 E 和泊桑比 ν 。

表征弹性体的弹性，也可以采用拉梅 (Lam'e) 常数 G 和 λ ：

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.2.9)$$

G 也称为剪切弹性模量。注意到

$$\lambda + 2G = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.2.10)$$

物理方程中的弹性矩阵 D 亦可表示为

$$D = \begin{pmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{pmatrix} \quad (1.2.11)$$

物理方程的另一种形式是

$$\varepsilon = C\sigma \quad (1.2.12)$$

其中 C 是柔度矩阵。

弹性体 V 的全部边界为 S 。一部分边界上已知外力 $\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z$ ，称为力的边界条件，这部分边界用 S_σ 表示；另一部分边界上弹性体的位移 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 已知，称为几何边界条件或位移边界条件，这部分边界用 S_u 表示。这两部分边界构成弹性体的全部边界，即

$$S_\sigma + S_u = S \quad (1.2.13)$$

4. 力的边界条件

弹性体在边界上单位面积的内力为 T_x, T_y, T_z ，在边界 S_σ 上已知弹性体单位面积上作用的面积力为 $\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z$ ，根据平衡应有

$$T_x = \bar{T}_x \quad T_y = \bar{T}_y \quad T_z = \bar{T}_z \quad (1.2.14)$$

设边界外法线为 N ，其方向余弦为 n_x, n_y, n_z ，则边界上弹性体的内力可由下式确定

$$\begin{aligned}
 T_x &= n_x \sigma_x + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} \\
 T_y &= n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{zy} \\
 T_z &= n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z
 \end{aligned}
 \tag{1.2.15}$$

以上公式的矩阵形式为

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上}
 \tag{1.2.16}$$

$$\text{其中 } \mathbf{T} = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}
 \tag{1.2.17}$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{pmatrix}
 \tag{1.2.18}$$

5. 几何边界条件

在 S_u 上弹性体的位移已知为 \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , 即有

$$u = \bar{u} \quad v = \bar{v} \quad w = \bar{w}
 \tag{1.2.19}$$

用矩阵形式表示是

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{在 } S_u \text{ 上}
 \tag{1.2.20}$$

以上是三维弹性力学问题中的一组基本方程和边界条件。同样, 对于平面问题, 轴对称问题等也可以得到类似的方程和边界条件。

我们把弹性力学方程记作一般形式

$$\begin{aligned}
 \text{平衡方程} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{f}} &= 0 \quad \text{在 } V \text{ 内} \\
 \text{几何方程} \quad \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{u} \quad \text{在 } V \text{ 内} \\
 \text{物理方程} \quad \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{在 } V \text{ 内} \\
 \text{边界条件} \quad \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbf{T}} \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \\
 \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \text{在 } S_u \text{ 上}
 \end{aligned}
 \tag{1.2.21}$$

并有 $S_\sigma + S_u = S$, S 为弹性体全部边界。

对于不同类型问题, 几何方程和物理方程的有关矩阵符号的意义汇集于表 1.1。板与壳的基本方程将分别在本书有关章节中给出。

6. 弹性体的应变能和余能

单位体积的应变能 (应变能密度)

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}
 \tag{1.2.22}$$

应变能是个正定函数, 只有当弹性体内所有的点都没有应变时 ($\boldsymbol{\varepsilon} \equiv 0$), 应变能才为零。

单位体积的余能 (余能密度)

$$V(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}
 \tag{1.2.23}$$

余能也是个正定函数。在线性弹性力学中弹性体的应变能等于余能。

1.2.2 弹性力学基本方程的张量形式

弹性力学基本方程亦可用笛卡儿张量符号来表示, 使用附标求和的约定可以得到十分简练的方程表达形式。

在直角坐标系 x_1, x_2, x_3 中, 应力张量和应变张量都用 σ_{ij} 和 ϵ_{ij} 表示, 且有 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$; $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ 。其它位移张量、体积力张量、 \dots 都是一阶张量, 用 u_i, f_i, T_i 等表示。下面将分别给出弹性力学基本方程及边界条件的张量形式和张量形式的展开式。

1. 平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{在 } V \text{ 内} \quad (1.2.24)$$

式中下标“ j ”表示对独立坐标 x_j 求偏导数。

式 (1.2.24) 的展开形式是

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

坐标及应力张量见图 1.3。

2. 几何方程

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{在 } V \text{ 内} \quad (2.1.26)$$

其展开形式是

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ (1.2.27) \end{aligned}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \epsilon_{21}$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \epsilon_{32}$$

$$\epsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \epsilon_{13}$$

与 (1.2.4) 式比较可见, 当 x_1, x_2, x_3 就是笛卡儿坐标时,

$$\epsilon_{11} = \epsilon_x; \quad \epsilon_{22} = \epsilon_y; \quad \epsilon_{33} = \epsilon_z; \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}; \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}; \quad \epsilon_{31} = \frac{1}{2} \gamma_{zx}。$$

3. 物理方程

广义虎克定理假定每个应力分量与各个应变分量成比例。广义虎克定理可以用张量符号表示为

$$\sigma_{ij} D_{ijkl} = k_l \epsilon_{kl} \quad \text{在 } V \text{ 内} \quad (1.2.28)$$

81 个比例常数 D_{ijkl} 称为弹性常数, 是四阶张量。由于应力张量是对称张量, 因此张

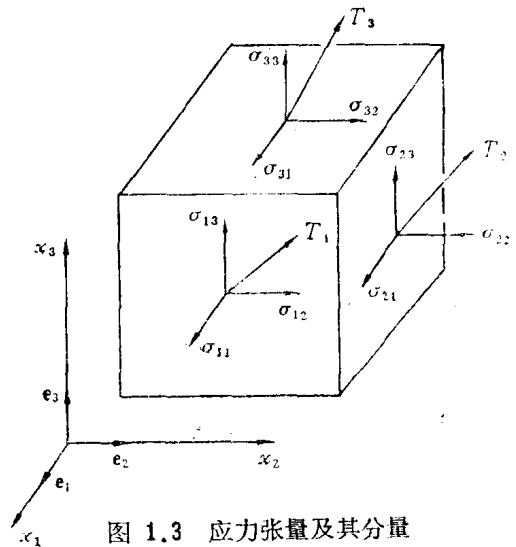


图 1.3 应力张量及其分量

具有对称性。同理，由于应变张量也是对称张量， D_{ijkl} 的二个
 对称性，即有

$$D_{ijkl} = D_{jilk} \quad D_{ijkl} = D_{klij} \quad (1.2.29)$$

当变形过程是绝热或等温过程时^[7]，还有

$$D_{ijkl} = D_{klij}$$

考虑了上述对称性后，对于最一般的线弹性材料，即在不同方向具有不同弹性性质的材料，81个弹性常数中有21个是独立的。对于各向同性的线弹性材料，独立的弹性常数只有两个，即拉梅常数 G 和 λ 或弹性模量 E 和泊桑比 ν ，此时广义虎克定律简化为

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} \quad (1.2.30)$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i=j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

(1.2.30) 式的展开形式为

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2G\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ \sigma_{22} &= 2G\epsilon_{22} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ \sigma_{33} &= 2G\epsilon_{33} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

$$\sigma_{12} = 2G\epsilon_{12} \quad \sigma_{23} = 2G\epsilon_{23} \quad \sigma_{31} = 2G\epsilon_{31}$$

上面二式中拉梅常数 G ， λ 与弹性模量 E 和泊桑比 ν 的关系见 (1.2.9) 式。

物理方程的另一种形式为

$$\epsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (1.2.32)$$

4. 力的边界条件

$$T_i = \bar{T}_i \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad (1.2.33)$$

其中

$$T_i = \sigma_{ij}n_j \quad (1.2.34)$$

n_j 是边界外法线 N 的三个方向余弦。

将 (1.2.34) 式代入 (1.2.33) 式后，它的展开形式有

$$\begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= \bar{T}_1 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 &= \bar{T}_2 \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= \bar{T}_3 \end{aligned} \quad (1.2.35)$$

5. 位移边界条件

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{在 } S_u \text{ 上} \quad (1.2.36)$$

6. 应变能和余能

单位体积应变能

$$U(\epsilon_{mn}) = \frac{1}{2} D_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (1.2.37)$$

单位体积余能

[7] Bisplinghoff, R.L., J.W.MAR, and T.H.H.PIAN; "Statics of Deformable Solids" Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.

$$V(\sigma_{mn}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (1.2.38)$$

1.3 加权余量法

加权余量法是求线性和非线性偏微分方程近似解的一种有效方法。有限单元法中可以应用加权余量法来建立有限元求解方程，但它本身是一种独立的数值解方法。在这一节中我们将阐明加权余量法的基本概念，至于如何应用加权余量法建立有限元的求解方程将在第十一章结合温度场的计算进行讨论。

1.3.1 微分方程的等效积分形式

工程或物理学中的许多问题，通常是以未知场函数应满足的微分方程和边界条件的形式提出来的，可以一般地表示为未知函数 \mathbf{u} 应满足的微分方程组

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{cases} A_1(\mathbf{u}) \\ A_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{cases} = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (1.3.1)$$

域 Ω 可以是体积域、面积域等，如图 1.4 所示。

同时未知函数 \mathbf{u} 还应满足边界条件

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{cases} B_1(\mathbf{u}) \\ B_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{cases} \text{在 } \Gamma \text{ 上} \quad (1.3.2)$$

Γ 是域 Ω 的边界。

要求解的未知函数 \mathbf{u} 可以是标量场（例如温度），也可以是几个变量组成的向量场（例如位移、应变、应力等）。 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 是表示对于独立变量（例如空间坐标、时间坐标等）的微分算子。同样，上述微分方程可以是单个的方程，也可以是一组方程，因此在式 (1.3.1) 和 (1.3.2) 中采用了矩阵形式。

下面我们给出一个典型的微分方程，以后我们还要寻求它的解答。

例 二维稳态热传导方程

$$\mathbf{A}(\phi) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (1.3.3)$$

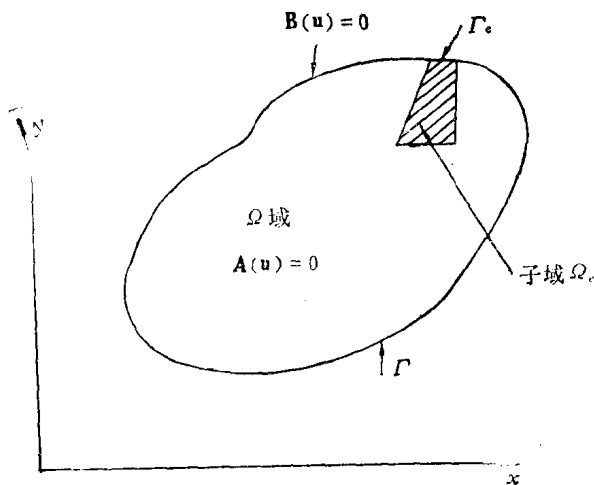


图 1.4 域 Ω 和边界 Γ

$$B(\phi) = \begin{cases} \phi - \bar{\phi} = 0 & \text{在 } \Gamma_s \text{ 上} \\ k \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} = 0 & \text{在 } \Gamma_q \text{ 上} \end{cases} \quad (1.3.4)$$

这里 ϕ 表示温度； k 是热传导系数； $\bar{\phi}$ 和 \bar{q} 是边界上温度和热流的给定值； n 是有关边界 Γ 的外法线方向； Q 是热源密度。

在上述问题中，若 k 和 Q 只是空间位置的函数时，问题是线性的。若 k 和 Q 亦是 ϕ 及其导数的函数时，问题就是非线性的了。

在第十一章温度场计算中，将对上述方程和其他问题进行讨论和求解。

由于微分方程组 (1.3.1) 在域 Ω 中每一点都必须为零，因此就有

$$\int_{\Omega} \mathbf{V}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega \equiv \int_{\Omega} (v_1 A_1(\mathbf{u}) + v_2 A_2(\mathbf{u}) + \dots) d\Omega \equiv 0 \quad (1.3.5)$$

其中

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (1.3.6)$$

\mathbf{V} 是函数向量，它是一组和微分方程个数相等的任意函数。

式 (1.3.5) 是与微分方程组 (1.3.1) 完全等效的积分形式。我们可以断言，若积分方程 (1.3.5) 对于任意的 \mathbf{V} 都能成立，则微分方程 (1.3.1) 必然在域内任一点都得到满足。这个结论的证明是显然的，假如微分方程 $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ 在域内某些点或一部分子域中不满足，即出现 $\mathbf{A}(\mathbf{u}) \neq 0$ ，马上可以找到适当的函数 \mathbf{V} 使 (1.3.5) 的积分形式亦不等于零。上述结论则得到证明。

假如边界条件 (1.3.2) 亦同时在边界上每一点都得到满足，对于一组任意函数 $\bar{\mathbf{v}}$ 应当成立

$$\int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{B}(\mathbf{u}) d\Gamma \equiv \int_{\Gamma} (\bar{v}_1 B_1(\mathbf{u}) + \bar{v}_2 B_2(\mathbf{u}) + \dots) d\Gamma \quad (1.3.7)$$

因此，积分形式

$$\int_{\Omega} \mathbf{V}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{B}(\mathbf{u}) d\Gamma = 0 \quad (1.3.8)$$

对于所有的 \mathbf{V} 和 $\bar{\mathbf{v}}$ 都成立是等效于满足微分方程 (1.3.1) 和边界条件 (1.3.2)。我们把 (1.3.8) 式称为微分方程的等效积分形式。

在上述讨论中，隐含地假定 (1.3.8) 式的积分是能够进行计算的。这就对函数 \mathbf{V} 、 $\bar{\mathbf{v}}$ 和 \mathbf{u} 能够选取的函数族提出了一定的要求和限制，以避免积分中任何项出现无穷大的情况。

在 (1.3.8) 式中， \mathbf{V} 及 $\bar{\mathbf{v}}$ 只是以函数自身的形式出现在积分中，因此对 \mathbf{V} 及 $\bar{\mathbf{v}}$ 的选择只需是单值的在 Ω 内或 Γ 上可积的函数就可以。这种限制并不影响上述“微分方程的等效积分形式”提法的有效性。 \mathbf{u} 在积分中还将以导数或偏导数的形式出现，它的选择将取决于微分算子 \mathbf{A} 或 \mathbf{B} 中微分运算的最高阶次。例如有一个连续函数，它在 x 方向有一个斜率不连续点如图 1.5 所示。我们设想在一个很小的区间 A 中用一个连续变化来代替这个不连续。可以很容易地看出，在不连续点附近，函数的一阶导数是不

定的，但是一阶导数是可积的，即一阶导数的积分是存在的。而在不连续点附近， u 的二阶导数趋于无穷，使积分不能进行。如果在微分算子 A 或 B 中仅出现函数的一阶导数，上述函数对于 u 将是一个合适的选择。一个函数在域内其本身连续，它的一阶导数具有有限个不连续点但在域内可积，这样的函数我们称之为具有 C_0 连续性的函数。可以类似地看到，如果在微分算子 A 或 B 的任何一项中出现 n 阶导数，则要求函数 u 必须具有连续的 $n-1$ 阶导数，即函数应具有 C_{n-1} 连续性。一个函数在域内函数本身（即它的零阶导数）直至它的 $n-1$ 阶导数连续，它的第 n 阶导数具有有限个不连续点但在域内可积，这样的函数我们称之为具有 C_{n-1} 连续性的函数。具有 C_{n-1} 连续性的函数将使包含函数直至它的 n 阶导数的积分成为可积。

在很多情况下可以对 (1.3.8) 式进行分部积分得到另一种形式

$$\int_{\Omega} C^T(\mathbf{v})D(\mathbf{u})d\Omega + \int_{\Gamma} E^T(\bar{\mathbf{v}})F(\mathbf{u})d\Gamma = 0 \quad (1.3.9)$$

其中微分算子 C, D, E, F 中所包含的导数的阶数较 (1.3.8) 式的 A, B 低，这样对函数 u 只需要求较低阶的连续性就可以了。在 (1.3.9) 式中降低 u 的连续性要求是以提高 v 及 \bar{v} 的连续性要求为代价的。由于原来对 v 及 \bar{v} （在 (1.3.8) 式中）并无连续性要求，因此适当提高对其连续性的要求并不困难。这种降低对函数 u 连续性要求的作法在近似计算中，尤其是在有限单元法中是十分重要的。(1.3.9) 式称为微分方程 (1.3.1) 和边界条件 (1.3.2) 等效积分的“弱”形式。值得指出的是，从形式上看“弱”形式对函数 u 的连续性要求降低了，但对实际的物理问题却常常较原始的微分方程更逼近真解，因为原始微分方程往往对解提出了过份“平滑”的要求。

下面我们仍以例题中的二维热传导方程为例，写出它们的等效积分形式和等效积分“弱”形式。例题中由二维稳态热传导方程 (1.3.3) 和边界条件 (1.3.4) 式，我们可以写出相当于 (1.3.8) 式的等效积分形式

$$\int_{\Omega} v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q \right] dx dy + \int_{\Gamma} \bar{v} \left[k \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} \right] d\Gamma = 0 \quad (1.3.10)$$

其中 v 和 \bar{v} 是任意的标量函数，并假设 Γ_s 上的边界条件

$$\phi - \bar{\phi} = 0$$

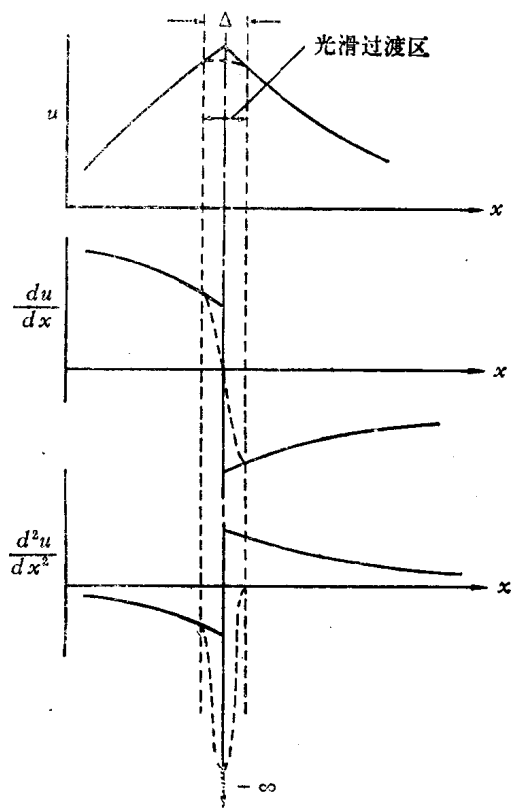


图 1.5 具有 C_0 连续性的函数