三星级

中国高中生

最新

典型题完全解题与强化训练

总主编 何 舟
本书主编 潘娉姣

题典

TI DIAN

数学

吉林教育出版社

◆典型题、高考题、竞赛题集萃

◆权威性、典型性、开放性大全

◆★运用能力 ★★综合能力

★★★研究、设计、创新能力

中国高中生

典型题完全解题与强化训练

最新题典 数学

以“3·3·3”非常设计诠释最新教学与考试理念

满足
3种需求

1. 用于复习迎考有《典型题分类解与练》。
2. 用于回顾展望有《历届考题分类解与练》。
3. 用于创新能力培养有《竞赛题分类解与练》。

促进
3种发展

1. 依据全国各地高考对素质的要求，展示常考题型，侧重培养学生的应试能力，指点重、难点的突破方法。
2. 通过历届考题分类回顾，让学生快速掌握各类试题的解题技法，领悟命题趋势。
3. 通过近年竞赛题的分类展示，侧重改进并完善学生的学习方法，形成探究意识，发展创新能力。

体现
3个结合

1. 读题与做题结合：既有对各种题的“命题目的”“解题点拨”与“完全解题”的“读”，又有“类似题集”供举一反三的“做”。体现以学生为主体的原则。
2. 典型性与难易梯度结合：按3星、4星、5星分别注明小学、初中、高中各题的难易程度，便于学生了解自己读题、做题水平，检测自我能力。
3. 最新、最全题型与最新教学及考试理念结合：本丛书从立足于考查“双基”与知识的继承，转向考查基本素质、能力、实践与创新；增加主观题、与实际相联系题、开放题；从答案惟一到鼓励学生标新立异。

ISBN 7-5383-1980-8

9 787538 319804 >

ISBN 7-5383-1980-8/G·1730

定价：38.00元

中国高中生

最新 典型题完全解题与强化训练

题典

数学

五星级

总主编 何 丹

本书主编 潘娉姣（特级教师）

撰 稿 潘春雷 施镇新 高纪平 俞泰鸿 孙 榕 朱建明 刘 岩 孙祥雨

吉林教育出版社

（吉）新登字 02 号
封面设计：周建明
责任编辑：王世斌　李建军　孔庆义

五星级

中国高中生最新数学典型题完全解题与强化训练题典

总主编　何　舟
本书主编　潘娉姣（特级教师）

吉林教育出版社　出版发行
济南印刷四厂印刷　新华书店经销

开本：850×1168 毫米　1/32　印张：28.125　字数：938 千字
2002 年 2 月吉林第 1 版　2002 年 2 月山东第 1 次印刷
本次印数：15000 册

ISBN 7-5383-1980-8/G·1730
定价：38.00 元


以"3·3·3"非常设计诠释最新教学与考试理念
最新
满足3种需求
促进3种发展
体现3个结合

目　　录

第一单元

函 数

一、典型题分类解与练

本单元的考试要求是理解集合、子集、全集、交集、并集、补集的概念，正确使用有关的术语和符号，正确判断元素与集合、集合与集合之间的关系，准确熟练地求出若干个集合的交集、并集、补集；理解映射与函数的概念及意义，掌握求函数的表达式、定义域、值域、最值的方法，理解函数与图象的对应关系，掌握作函数的图象的基本方法，能够绘出基本函数的图象，能应用函数的思想解决实际应用方面的问题；理解函数单调性、奇偶性的基本概念，能正确判断给定函数的单调区间、单调性或奇偶性，会求较简单函数的单调区间；掌握反函数的基本概念，会求给定函数的反函数，以及反函数的定义域、值域，会利用奇偶性或互为反函数的图象关系作函数的图象；掌握二次函数、幂函数、指数函数与对数的性质、运算法则和技巧，熟悉各类函数的图象并能利用图象解决与函数有关的问题；会解较简单的指数方程与对数方程.

函数是高中数学中的重要概念，又是学习其他数学知识的必备基础.要注意把深化对函数概念的认识自觉地作为处理函数问题的指导思想，要注意从数和形两个方面求得对函数概念认识的统一，要加强对由常见函数构成的较复杂函数以及未给出解析式的抽象函数的认识，使函数的基本思想和方法在运用中更显其综合性和抽象性.

本单元的重点是：理解集合、子集、交集、并集、补集的含义及符号，正确进行交、并、补的运算；理解并掌握所学过的几类基本函数的图象和性质，能熟练画出各类基本函数的图象，并能结合图象研究函数的性质；能解较简单的指数方程和对数方程，对含字母系数的函数、方程能正确进行分类讨论.

本单元的难点是：反函数、周期函数、复合函数的概念及有关符号，求函数的单调区间及函数的最值；含字母系数的函数与方程的讨论.

☆☆题1 已知 $A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\mid x^2+4x+p<0\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 p 的取值范围.

【命题目的】 通过对集合基本运算的考查，考查学生的分析、推理能力.

【解题点拨】 1. 关键之一：理解 $A\cup B=A$.

2. 关键之二：不要忽略 $B=\varnothing$ 的情况.

【完全解题】 由 $A\cup B=A$，知 $B\subseteq A$.

$\because$ $$A=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty),$$

$\therefore$ 当 $p\geqslant 4$ 时，$B=\varnothing$；$p<4$ 时，$B=(-2-\sqrt{4-p},-2+\sqrt{4-p})$.

故 $p\geqslant 4$ 时，显然有 $B\subseteq A$；$p<4$ 时，若满足 $B\subseteq A$，必须 $-2+\sqrt{4-p}\leqslant -1$，即
$$\sqrt{4-p}\leqslant 1, 3\leqslant p<4.$$

综合起来，p 的取值范围是 $[3,+\infty)$.

类似题集

☆ 已知 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{a}{x+3}\leqslant 1\right\}$，$B=\{x\mid x^2+px+q\leqslant 0\}$，且 $A\cup B=\mathbf{R}$，$A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$，求 a,p,q 的值.

【解】 $a=3,p=-1,q=-12$

☆☆题2 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

(1)当 a 为何值时，$(A\cup B)\cap C$ 有两个元素？

(2)当 a 为何值时，$(A\cup B)\cap C$ 有三个元素？

【命题目的】 考查综合运用集合运算中交对于并的分配律以及运算的能力.

【解题点拨】 1. 由 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

2. 求出 $A\cap C$，$B\cap C$.

3. 再分析 $(A\cap C)\cup(B\cap C)$ 中元素个数问题.

【完全解题】 $\because$ $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}ax+y=1\\x^2+y^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow A\cap C=\left\{(x,y)\,\middle|\,(0,1),\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}x+ay=1\\x^2+y^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow B\cap C=\left\{(x,y)\,\middle|\,(1,0),\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)\right\}.$$

(1)若$(A\cup B)\cap C$中恰有两个元素,则有

$$\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1,\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0,\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1.\end{cases}$$

解得 $a=0$ 或 $a=1$;

(2)若$(A\cup B)\cap C$中恰有三个元素,则有

$$\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=\dfrac{1-a^2}{1+a^2},\\ a\neq 0,1.\end{cases}$$

解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$.

类似题集

☆1. $A=\{y\mid y=x^2+2x-2,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y\mid y=-x+2,|x|\leqslant 3\}$,求$A\cap B$.

☆2. $A=\{(x,y)\mid y=x^2+2x-2,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{(x,y)\mid y=-x+2,|x|\leqslant 3\}$,求$A\cap B$.

☆3. 已知$A=\{a^2,a+1,-3\}$,$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,若$A\cap B=\{-3\}$,求a的值.

☆4. 已知集合A和集合B各含12个元素,$A\cap B$含有4个元素,试求同时满足下面两个条件的集合C的个数.(1)$C\subsetneqq A\cup B$,且C中含3个元素;(2)$C\cap A\neq\varnothing$.

【解】 1. $\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 5\}$ 2. $\{(x,y)\mid(1,1)\}$ 3. $a=-1$ 4. $C_{20}^3-C_8^3=1084$

☆☆题3 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若$A\cap\{x\mid x\in(0,+\infty)\}=\varnothing$,求实数$p$的取值范围.

【命题目的】 考查集合的运算;考查空集的性质:①$\varnothing\subseteq A$,$\varnothing\subsetneqq A(A\neq\varnothing$时);②$\varnothing\cap A=\varnothing$,$\varnothing\cup A=A$;考查一元二次方程的基本知识.

【解题点拨】 1. 利用一元二次方程根的判别式$\Delta=p(p+4)$进行讨论.

2. $\Delta<0\Leftrightarrow -4<p<0$.

3. $\Delta=0\Leftrightarrow p=0$ 或 $p=-4$.

4. $\Delta>0\Leftrightarrow p<-4$ 或 $p>0$.

【完全解题】 $\Delta=(p+2)^2-4=p(p+4)$.

(1)当$-4<p<0$时,$\Delta<0$,此时$A=\varnothing$,满足$A\cap\{x\mid x\in(0,+\infty)\}=\varnothing$;

(2)当 $p=0$ 时，$A=\{x|x=-1\}$，有 $A\cap\{x|x\in(0,+\infty)\}=\varnothing$，当 $p=-4$ 时，$A=\{x|x=1\}$，$A\cap\{x|x\in(0,+\infty)\}\neq\varnothing$；

(3)当 $p<-4$ 或 $p>0$ 时，$\Delta>0$，方程有两个不等根 x_1、x_2，

∵ $$x_1+x_2=-(p+2),x_1x_2=1,$$

∴ x_1,x_2 同号，当 $p>0$ 时，$x_1+x_2<0$.

∴ A 中元素均为负数，$A\cap\{x|x\in(0,+\infty)\}=\varnothing$；而 $p<-4$ 时，x_1,x_2 均为正，$A\cap\{x|x\in(0,+\infty)\}\neq\varnothing$.

由(1)、(2)、(3)，知 $p>-4$.

类似题集

☆☆ 集合 $A=\{(x,y)|x^2+mx-y=0\}$，$B=\{(x,y)|x-y+1=0$，且 $0\leqslant x\leqslant 2\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

【解】 $m\in(-\infty,-1]$

☆☆题 4 求出函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域.

【命题目的】 考查求函数值域的常用方法.

【解题点拨】 1. 首先注意到 $y-x=\sqrt{x^2-3x+2}\geqslant 0$.

2. 化无理式为有理式，两边平方，得

$$y^2-2yx+3x-2=0.$$

解得 $$x=\frac{2-y^2}{3-2y}.$$

3. 代入 $y-x\geqslant 0$，得 $y-\dfrac{2-y^2}{3-2y}\geqslant 0$，于是可得函数的值域.

【完全解题】 解法一：由 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$，得

$$y-x=\sqrt{x^2-3x+2}\geqslant 0.$$

两边平方，得

$$y^2-2yx+3x-2=0,$$

解得 $$x=\frac{2-y^2}{3-2y}\left(\text{其中 } y\neq\frac{3}{2}\right).$$

由 $y-x\geqslant 0$，得

$$y-\frac{2-y^2}{3-2y}\geqslant 0.$$

于是可得 $1\leqslant y<\dfrac{3}{2}$ 或 $y\geqslant 2$，

即原函数的值域是$\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup[2,+\infty)$.

类似题集

☆☆1. 函数 $y=\dfrac{5}{2x^2-4x+3}$ 的值域是________.

☆☆2. 函数 $y=\sqrt{1-2x}+x$ 的值域是__________.

☆☆☆3. 函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+2x+10}$ 的值域是________.

【答】1. $(0,5]$　2. $(-\infty,1]$　3. $[\sqrt{26},+\infty)$

☆☆题5 恒成立的条件是$2ax+2$，当 $x\in[-1,+\infty)$时，$f(x)$

(1)$\Delta\leqslant 0\Rightarrow a\in[-2,1]$;

(2)$\left.\begin{array}{l}\Delta>0\\ a<-1\ (\text{对称轴})\\ f(-1)\geqslant 0\end{array}\right\}\Rightarrow a\in[-3,-2)$.

综合(1)、(2)，得 $a\in[-3,1]$.

类似题集

☆☆☆1. 函数 $y=x^2-4ax+2a+6$ 的值域为$[0,+\infty)$，求实数 a 的值.

☆☆☆2. 对一切实数 x，$y=x^2-4ax+2a+6$ 的值均为非负数(a 为实数)，求函数 $f(a)=2-a|a+3|$ 的值域.

【解】1. $a=-1$ 或 $a=\dfrac{3}{2}$　2. $\left[-\dfrac{19}{4},4\right]$

☆题6 若 $f(x-1)=2x^2+1$，求 $f(x)$.

【命题目的】本题考查解函数方程的能力，加强对符号 $f(x)$的理解.

【解题点拨】1. 可以用换元法，设 $x-1=t$，则 $x=t+1$，解答即可.

2．可以凑出一个$(x-1)$．

【完全解题】解法一：令 $x-1=t$，则 $x=t+1$．

于是 $f(t)=2(t+1)^2+1=2t^2+4t+3$．

∴ $f(x)=2x^2+4x+3$．

解法二：∵
$$\begin{aligned}f(x-1)&=2[(x-1)^2+2x-1]+1\\&=2[(x-1)^2+2(x-1)+1]+1\\&=2(x-1)^2+4(x-1)+3,\end{aligned}$$

∴ $f(x)=2x^2+4x+3$．

类似题集

☆1．若函数 $f(x)$满足 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，则 $f(x)=$__________．

☆2．若函数 $f(x)$满足 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{1-x^2}$，则 $f(x)=$__________．

☆☆3．已知 $f(x^2-x)=x^4-2x^3+x^2+1$，则 $f[f(x)]=$__________．

【答】1．x^2-1 $(x\geqslant1)$　2．$\dfrac{x}{x^2-1}$ $(x\neq0)$　3．$x^4+2x^2+2\left(x\geqslant-\dfrac{1}{4}\right)$

☆题7　已知 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $(x>1)$．

(1)求函数的反函数 $f^{-1}(x)$；

(2)判断 $f^{-1}(x+1)$的单调性．

【命题目的】考查反函数的定义，以及反函数的求法；考查函数单调性的定义及判断方法．

【解题点拨】1．根据 $x>1$，求得函数值域．

2．解关于 x 的方程，求得反函数．

3．运用定义判断函数的单调性．

【完全解题】(1)∵ $x>1,y=x+\dfrac{1}{x}>2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，

∴ $y>2$．

将 $y=x+\dfrac{1}{x}$变形为 $x^2-yx+1=0$．

∴ $x=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$(由 $x>1$ 知舍负)．

∴ $f^{-1}(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ $(x>2)$；

(2)由于 $f^{-1}(x+1)=\dfrac{x+1+\sqrt{(x+1)^2-4}}{2}(x>1)$,

设 $1<x_1<x_2<+\infty$,则

$$
\begin{aligned}
&f^{-1}(x_2+1)-f^{-1}(x_1+1)\\
&=\frac{x_2+1+\sqrt{(x_2+1)^2-4}}{2}-\frac{x_1+1+\sqrt{(x_1+1)^2-4}}{2}\\
&=\frac{x_2-x_1}{2}+\frac{\sqrt{x_2^{\,2}+2x_2-3}-\sqrt{x_1^{\,2}+2x_1-3}}{2}\\
&=\frac{x_2-x_1}{2}+\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+2)}{2(\sqrt{x_2^{\,2}+2x_2-3}+\sqrt{x_1^{\,2}+2x_1-3})}.
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad x_2>x_1>1, x_2-x_1>0, x_1+x_2+2>0,$

且 $$\sqrt{x_2^{\,2}+2x_2-3}+\sqrt{x_1^{\,2}+2x_1-3}>0.$$

$\therefore$ $$f^{-1}(x_2+1)>f^{-1}(x_1+1).$$

因此 $f^{-1}(x+1)$ 为增函数.

类似题集

☆1. 已知 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+bx+1}$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数,试判断它的单调性,并证明你的结论.

☆☆2. 已知 $f(x)=\log_2\dfrac{1-x}{1+x}$.

(1)求 $f(x)$ 的定义域;

(2)判断 $f(x)$ 的单调性;

(3)求 $f^{-1}(x)$.

【解】1. 增函数　2. (1)$(-1,1)$;(2)减函数;(3)$f^{-1}(x)=\dfrac{1-2^x}{2^x+1}(x\in\mathbf{R})$

☆☆题 8　设方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$ 的两根分别在区间 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 内,求实数 k 的取值范围.

【命题目的】考查二次函数的图象和性质,二次函数、二次方程、二次不等式之间的关系是考查的重点.

【解题点拨】1. 问题等价于二次函数的图象分别在 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 内通过 x 轴.

2. 将问题转化为不等式组.

【完全解题】设 $f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$,依题意有

$$\begin{cases}f(0)>0,\\ f(1)<0,\\ f(2)>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}k^2-k-2>0,\\ k^2-2k-8<0,\\ k^2-3k>0.\end{cases}$$

解得 $-2<k<-1$ 或 $3<k<4$.

∴ 当 $k\in(-2,-1)\cup(3,4)$ 时,方程两根分别在 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 上.

类似题集

★★1. 若方程 $x^2-5x\log^2 a^2=0$ 有且只有一个较小的根在区间 $(1,2)$ 内,求实数 a 的取值范围.

★★2. 设 $f(x)=4x^2-4(k-1)x+3k+3$(其中 $k\in\mathbf{R}$).

(1)若对任何 $k\in\mathbf{R}$,函数图象都不经过点 (p,p^2),求实数 p 的值;

(2)求 k 的取值,使得方程 $f(x)=0$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2,且满足 $-2<x_1<0,0<x_2<2$.

【解】1. $a\in(2,2\sqrt{2}]$　2. (1) $p=\dfrac{3}{4}$;(2) $k\in\left(-\dfrac{27}{11},-1\right)$

★题9 函数 $f(x)=(x-1)^2+2,g(x)=x^2-1$,求函数 $y=f[g(x)]$ 的单调区间.

【命题目的】考查复合函数的单调性判断方法.

【解题点拨】1. "(单调性)同则增,(单调性)异则减".

2. $f(u)=(u-1)^2+2$ 在 $u\geqslant1$ 时增,在 $u\leqslant1$ 时减.

3. 当 x 在什么范围时,才能使 $u\geqslant1$ 或 $u\leqslant1$ 呢?

4. 在这个范围内 $u=x^2-1$ 是增函数还是减函数?

【完全解题】列表分析如下:

		$f(u)=(u-1)^2+2$	$u=x^2-1$	$y=f[g(x)]$
$u\geqslant1$	$x\geqslant\sqrt{2}$	增	增	增
	$x\leqslant-\sqrt{2}$		减	减

$u\leqslant 1$	$0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$	减	增	减
	$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 0$		减	增

故 $f[g(x)]=(x^2-2)^2+2$ 的单调递增区间是 $[-\sqrt{2},0]$ 及 $[\sqrt{2},+\infty)$，单调递减区间是 $[0,\sqrt{2}]$ 及 $(-\infty,-\sqrt{2}]$.

类似题集

☆ 若 $f(x)=8+2x-x^2$，$g(x)=f(2-x^2)$，则 $g(x)$__________.

A. 在 $(-1,0)$ 上是减函数　　B. 在 $(0,1)$ 上是减函数

C. 在 $(-2,0)$ 上是增函数　　D. 在 $(0,2)$ 上是增函数

【答】A.

☆☆题 10　在函数 $y=\log_a x(0<a<1,x\geqslant 1)$ 的图象上有 A、B、C 三点，它们的横坐标分别是 $t,t+2,t+4$.

(1)若 $\triangle ABC$ 的面积为 S，求 $S=f(t)$；

(2)判断并说明 $S=f(t)$ 的单调性；

(3)求 $S=f(t)$ 的最大值.

【命题目的】考查函数的基本知识及综合解决问题的能力.

【解题点拨】1. 将 $\triangle ABC$ 的面积看成几个直角梯形面积的和差.

2. 判断函数单调性常用的方法是作差比较，但本题不容易，可以利用公式的性质进行研究.

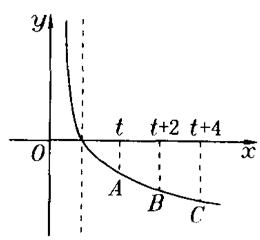

图 1-1-1

【完全解题】(1)$\triangle ABC$ 的面积看成几个直角梯形面积的和差.

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(|\log_a t|+|\log_a(t+2)|+|\log_a(t+2)|+|\log_a(t+4)|)$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(|\log_a t|+|\log_a(t+4)|)$$

$$=2\log_a(t+2)-\log_a t-\log_a(t+4)$$

$$=\log_a\frac{(t+2)^2}{t(t+4)}\ (t\geqslant 1).$$

$\therefore$
$$f(t)=\log_a\frac{(t+2)^2}{t(t+4)}\ (t\geqslant 1);$$

(2)设 $1\leqslant t_1\leqslant t_2$,则 $4\leqslant 4t_1\leqslant 4t_2$ 且 $1\leqslant t_1^2\leqslant t_2^2$.

∴ $$9\leqslant t_1^2+4t_1+4<t_2^2+4t_2+4,$$

$$\frac{1}{9}\geqslant\frac{1}{t_1^2+4t_1+4}>\frac{1}{t_2^2+4t_2+4},$$

$$-\frac{4}{9}\leqslant\frac{-4}{t_1^2+4t_1+4}<\frac{-4}{t_2^2+4t_2+4}.$$

∴ $$\frac{5}{9}\leqslant 1-\frac{4}{t_1^2+4t_1+4}<1-\frac{4}{t_2^2+4t_2+4},$$

即 $$\frac{5}{9}\leqslant\frac{t_1(t_1+4)}{(t_1+2)^2}<\frac{t_2(t_2+4)}{(t_2+2)^2}.$$

∵ $$0<a<1,$$

∴ $$\log_a\frac{9}{5}\leqslant f(t_1)<f(t_2).$$

∴ $S=f(t)$ 在 $t\geqslant 1$ 时是增函数;

(3)由(2)的结果可知,当 $t=1$ 时,$S=f(t)$ 有最小值 $\log_a\frac{8}{5}$.

题 11 $a\in\mathbf{R}, a\neq 0, a\neq 1$,设函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{1}{a}\right)$.

求证:(1)经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于 x 轴;

(2)这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

【命题目的】考查函数的性质,反函数的概念以及综合运用函数知识解决问题的能力.

【解题点拨】1. 证明任意两点的连结不平行于 x 轴,也就是任何两点的纵坐标不等,设 $M_1(x_1,y_1)$,$M_2(x_2,y_2)$ 为图象上任意两点(不同),则 $x_1\neq x_2$,只要证明 $y_1\neq y_2$.

2. 函数图象关于 $y=x$ 对称,可以证明此函数的反函数是它本身.

【完全解题】(1)设 $M_1(x_1,y_1)$,$M_2(x_2,y_2)$ 是函数图象上任意两个不同的点,则 $x_1\neq x_2$.

∵ $$y_2-y_1=\frac{x_2-1}{ax_2-1}-\frac{x_1-1}{ax_1-1}=\frac{(x_2-x_1)(a-1)}{(ax_2-1)(ax_1-1)},$$

∵ $$a\neq 1\text{ 且 }x_1\neq x_2,$$

∴ $$y_2-y_1\neq 0,\text{即 }y_1\neq y_2.$$

∴ M_1M_2 不平行于 x 轴;