博奕論与綫性規划

S. 梵 达 著

人民教育出版社

博奕論与綫性規划

S. 梵达 著

南开大学数学系綫性規划小組譯

人民教育出版社

本书系根据倫敦 Methuen 有限公司 1956 年出版 S. 梵达 (Vajda) 所著"The Theory of Games and Linear Programming"一书譯出，在很小的篇幅中，介紹了相当丰富的材料。对于計算方面，讲得較多，同时較多地利用图示法，帮助讀者理解。主要內容有博奕論大意，博奕論的图示法和最小的最大定理，綫性规划大意和图示法，单純形法，逆矩陣法，退化及其它复杂情形，对偶性，博奕的解法，優先变量法等。

本书可供高等学校数学专业学生参考，具有解析几何和綫性代数初步知識的其它专业讀者也可参考。

博奕論与綫性规划

S. 梵 达 著

南开大学数学系綫性规划小組譯

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門內太服寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

京华印书局印装 新华书店发行

統一书号 13010·781 开本 850×1168 1/32 印张 3 4/16

字数 78,000 印数 0001—10000 定价(8)¥0.44

1960年5月第1版 1960年5月北京第1次印刷

譯者序

1958年的时候，在党的总路綫的光輝照耀下，和党的新教育方針指导下，我系綫性規划小組老师和同学，同全国兄弟学校一起，在数学直接为祖国的生产建設服务方面做了一些探索和工作，在这个过程中，我們覺得綫性規划这个新的数学部門对生产上的用处很大。但当时有关綫性規划的中文书刊、資料很少，我們感到，介紹一本这方面比較淺近实用的书籍給我国广大的数学工作者和实际工作者可能是有益的。

S. 梵达的"博奕論与綫性規划"篇幅虽小，而内容还是相当丰富的，例如关于綫性規划的解法，就講得較多，叙述比較淺近生动，并且較多地应用几何表示，使讀者容易获得直观印象，都不无可取之处。但有时講得比較簡略，或交待得不够清楚，对一部分讀者說来，可能比較費力。

本书主要是講数学方法。但其所举实际例如第一章的配錢博奕，带花招的博奕，第四章的卖貴买賤，和广告竞爭等，或者說明了資本主义国家生活方式的腐朽无聊，或則表現了資本家的追求最大利潤，你傾我軋。这些例子，与我国的現实生活毫无共通之点，同时，从这里也可看到資本主义国家学术文化如何淪落成替資本家謀利和供他們消遣的工具。此外，著者也偶尔談出对数学科学的資产阶級观点，象第一章第7頁就有这样的情形，我們已加上一点按語。这些地方，希望讀者批判地对待。

还必須指出，資本主义国家的学者們常常企图把綫性規划与博奕論和一些为資本主义制度辯护的观点联系起来，作为这些观点的理論基础。如第一章第1頁中提到的約翰·馮·諾伊曼与O. 摩根斯特恩的"博奕論与經济行为"就是一个典型的例子。但在

实質上綫性規划与博奕論和諸如此类的观点沒有任何联系。对于上述謬論的批判，讀者可参看高等教育出版社出版的 J. 麦克金賽著"博奕論导引"中譯本序言，和 1959 年 8 月"經济譯丛"所載"数学在經济計算中的应用"一文。

我們开始学习运筹学的时間很短，对于有关綫性規划和博奕論的理論，掌握得很少，因此譯稿的缺点一定不少，希望讀者多加指正。

目　录

第一章　博奕論概要

1. 我們現在所了解的博奕論的萌芽，包含在 E. 波叶尔（参考文献 5）的短文里。他臆断了所謂基本定理的一个特款，但是因为未能証明而擱置起来。1928 年，約翰·馮·諾伊曼在哥廷根（Göttingen）数学学会上作了一个报告，給出这个定理的証明（文献 22）。但是一直到 1944 年約翰·馮·諾伊曼与 O. 摩根斯特恩的名著（文献 24）問世以前，还是很少有人提到这个理論。这本书的数学内容包含一些进一步的发展，而其中第二作者又以杰出經济学家的身份提示了关于这个理論的一个特殊应用。此后不久，人們发現——并不是意外——一个竞爭性的博奕理論不仅可以帮助解釋比較和平的經济竞爭的現象①，也可以帮助解釋戰役与战爭的現象。自此以后，博奕論的实用与理論并肩发展，并且已引起很广泛的活动面，其范圍甚至包括了象点集論与拓扑学等抽象領域中的研究。

在本书里，我們仅仅用到一些代数与綫性解析几何中（相当淺易）的知識。

綫性規划的理論也从經济問題中得到启发，但是它本身已获得独立的地位。它从事于微积分所不能解决的最大（或最小）問題。有趣的是，博奕論可以作为綫性規划理論的一个特款。

在博奕論或綫性規划的应用里，所需要的計算往往是这样的龐杂，想解决这些应用問題的人，几乎終身也不能把答案計算出来。因此大量的研究就集中到計算方法上去，而自动計算机的出

① 譯者注：本书在数学理論上是有价值的，但著者企图用博奕論为資本主义制度辯护，在观点上是反动的。請参看譯者序中所介紹的"博奕論导引"中譯本序言和"数学在經济計算中的应用"两篇文章。

現就使得在一个合理的时間内求得解答成为可能。本书将比較透徹地討論計算方面，但对于自动計算方面提出的問題并未特別注意。对于图示法感覺兴趣的讀者，我們将采用几何表示法帮助他們更好地了解。但比較喜欢形式运算的讀者，也将发現我們的处理是清晰的。

2. 我們現在介紹一个簡单的，但又是典型的例子：配錢博奕[①]。它的規則是这样的：两个局中人 A 与 B 各掩着一个錢，正面或反面朝上，但不让对手知道。然后把錢亮开，如果两个錢朝上的那面相同，則两錢归 A，否則两錢归 B。

这个很平凡的博奕，可以很方便地用来引进一些在文献中已經通用的术語。此間有两个局中人，因此称它为二人博奕。一个局中人所贏得的就是另一个所輸掉的，换言之，他們所得的和为零。于是有个拙劣的，但常被采用的名詞：零和博奕。一个博奕其实是一些規則的集体，这些規則决定局中人該作些什么，并且按照局中人如何选擇他們的做法，而决定誰最終得胜，所得若干。一个博奕包含若干着，在配錢的例中，每一局中人仅有一着。一个博奕的每一个特定实現称为一局。

这个理論所考慮的博奕的基本特点是每一个局中人的得失不仅取决于自己的举动，还取决于对手的举动。显然，这特点也出現于一些經济問題中，例如在拍卖或股票交易中，并且也出現于战爭中。

有一种从战爭的形式化了的情况所导出的博奕，常称为 Blotto 博奕，下面是文献 26 中的一个很淺的例：A 将軍指揮四个連队，B 上校指揮五个連队，A 将軍可以沿两条不同的路到一个鎮，并能派遣每一个連队到他所認为适宜的路上。B 上校則可以

---

① 譯者注：这里所举的联系实际的例子和以后的例子如第 4 頁的“带花招的博奕”，第四章第 42—43 頁的卖貴买賤，广告竞爭追求最大利潤等丑态，在資本主义国家是当然的事，和我国的实际毫无共通之点，請讀者批判地閱讀。

命令他的任何一个連队去防御任何一条路。如果在某一条路上，A 的連队的数目多于B的連队数目，則A胜。有些比較复杂的說法，建議讀者参考文献 20，文献 3 以及引人入胜的文献 28。

我們継續給出些博奕的例，并討論它們的形式的方面。

在多于一着的博奕中，自然可以設想，局中人随着一局的进行而决定每一着的选擇。但是，常常为了方便而設想他們預先决定了在将来的一切可能情况下怎样地作。能够应付各种情况的一組选擇称为一个策略。只有一着的博奕中，一个策略就是一着。

作为一个例子我們考慮一个很簡单的“带花招”的博奕[①]，这个名詞指的是局中人拿得坏牌而叫得高，以便使对方相信他有一手好牌，因而放弃了可以获胜的計划。这并不是花招的专門定义，这种定义至少是很难作出的。如果讀者想到熟悉的扑克或桥牌一类的博奕，他就会了解这个名詞的意义。

这种博奕是这样的：A 拿到两个可能的牌中的一張，‘高’牌或‘低’牌，其概率是相等的。如果他拿到高牌，他必叫价 2 元錢。如果他拿到低牌，他可以付出 1 元錢或者叫 2 元錢。B 可以(也可以不必)挑战。如果他不挑战，他就必須付出 1 元錢。如果他挑战，当A拿的是低牌时則他赢 2 元錢；当A拿的是高牌时，則他輸 2 元錢。

这种博奕也說明什么叫作随机着，即是这种着的結果要看机会。在这个例子中，結果要看分发給A的第一張牌而定。我們現在造出这个博奕的策略，并分析其效果。

A的策略：

如果是高牌，叫价是必然的，但如果是低牌，則他可以付出 1 元(策略 A_1)，或叫 2 元(他要花招，策略 A_2)。

B的策略：

---

① 这是包含文献 27 的那本书中第 91 頁里提到的博奕的一个簡化情形。文献 12，中有一个更复杂的博奕。

如果A付錢，B只能收1元。但若A叫价，則B可以挑战（策略B_1），或不挑战（策略B_2）。

推算結果如下：

(A_1,B_2)。如果是低牌，A付出1元。若是高牌，A叫2元，而在被挑战后赢2元。这些事件的每一件的概率是$\frac{1}{2}$，因此平均付給A的錢是半元。

(A_1,B_2)。如果是低牌，A付出1元。若是高牌，A叫2元，而B只付出1元。平均付給A的錢为0。

(A_2,B_1)。如果是低牌，A叫2元，而在被挑战后輸2元。若是高牌，A叫2元，而在被挑战后赢2元。平均付錢仍是0。

(A_2,B_2)。如果是低牌，A叫2元而B只付出1元。若是高牌，A叫两元而B仍只付出1元。因此付給A的錢是1元。

将博奕的結构化为一些策略称为标准化。博奕在其广义的形式上有很詳尽的理論，这里广义形式是指考虑到每个局中人可以有不只一着，特别是考虑到信息的型样，即是每个局中人对自己及对手的过去各着知道些什么。在这里我們不进入这个問题而介紹讀者参考文献24和20。

并不是所有博奕都是零和博奕。在很多买卖中这样設想是合理的：买主对他所要的貨物的估値高于付出的价錢，而这个价錢至少是卖主对貨物的估値。又如，某一船只的損失对于战爭的成功的意义可能远較敌人所感到的为多。不过形式地来說，包含两个局中人的非零和博奕能看作零和的三人博奕，假定前二人之間的支付的任何不平衡，都由第三人来补足或拿走，而第三人对于博奕的进行毫无影响，他的唯一目的是支出或收入。

进一步推广，我們能考虑n人博奕，在这个博奕里有n个局中人。这样的博奕又可能是零和的或非零和的，看一局結束时收付的平衡而定。就目前說来，当我們所作的推广越复杂，这个理論中已

得的結果越少。在本书里我們只討論二人博奕，不过我們提及一下，n 人博奕有两种类型，区别为合作的与无合作的。前者在文献 24 中涉及，它們的特点是許可局中人在博奕本身之外形成联合，协調他們在进行博奕时的策略。有人曾想起这种安排当为博奕本身的部分，而用規則排斥局外的联合，但这样尝試未能完全成功。局中人完全自己照顧自己的一种博奕称为无合作的(文献 21)，二人零和博奕自然永远属于这一类。

3. 我們现在必須弄清楚，博奕論探討这样的問題，即在一个明确規定的“哲学”下找出局中人应遵循的最好步驟。这一观点，你可以接受也可以拒絕。不論如何，对数学家来說，巨大的吸引力在于它引出数学上有兴趣的結果①。随着我們講下去，这个趋向将逐渐显露出来；它不同于賭棍的为刺激而賭博。我們的局中人用完全不动感情的态度分析情况。

让我們用下列規則考虑一个較配錢更为复杂的博奕：

A 与 B 独立地各选 -1、0 或 1 中任一数。以 s 表示 A 选的数，以 t 表示 B 选的数。于是 B 付給 A 一笔数目为 $s(t-s)+t(t+s)$ 的錢。

显然，不論 A 选那个数，他都不能預知結果，因为它还依賴于 B 的选择。为了获得包括一切可能性的全貌，我們把均等的可能結果列为一个表，叫作支付表或支付矩陣。关于目前的例，这种表如下：

---

① 譯者注：和著者的意見相反，我們认为，任何一种观点和理論的形成和确立，归根到底，是决定于实踐，特別是阶級斗爭和生产的实踐的。数学理論的产生和成长也沒有例外。它过去是被着、今后也将継續証实：实踐——理論——实踐的公式。綫性规划和博奕論之所以获得迅速发展，以及这新的数学部門对我們有“吸引力”就因为它在生产、自动控制、軍事等等方面有密切的联系。而这里所提到的建立“最好的步驟”的“观点”以及下面要講的“最优策略”的涵义之可以被接受是因为它們在一定条件下能够符合实踐的要求，并不是（或主要不是）由于它們能引出数学上有兴趣的結果。

		B选 $t=$ -1	0	1
A 选 $s=$	-1	2	-1	-2
	0	1	0	1
	1	-2	-1	2

我們把A应贏多少，即B应輸多少，塡在二人的相应选擇所組成的格子里。我們將約定只写出局中人A的所得。我們并將称他为第一人或最大追求者，他的对手为第二人或最小追求者。后者要設法使表中尽可能小的数实現，因为他的所得是表中各項的异号值。对于負項来說，則第一人輸掉而第二人贏得这項数的絕对值。有了这些規定，我們可以認为一个博奕为支付表所确定。

我們一望即知，A所贏的多少如何同时依賴于B的选擇。当然，任何局中人都不知道（若无詐騙的話）对方將作什么。博奕論假定双方的推理如下：

对于我的每一个选擇，我必怕对方的选擇会使我的所得（或平均所得，如果有一个随机着的話）为这种情况下的最小。因此如果我作的选擇使这个最小所得尽可能地大，那末我得到的安全保障就是我所能合理地期望的一样。

如果双方都用这个謹愼的（也許是失敗主义的）方法来分析，那末在目前的博奕中A观察到：对应于 $s=-1$、0或1的选擇，他可能得到的最小数为 -2、0或 -2。他于是就选 $s=0$，因为这給他最大的安全期望。用同样的方法来分析，B也决定选 $t=0$。于是两个局中人的收入就都是零。

对于我們的分析方法，这样的推理是基本的。我們現在要問：A和B將如何去作，如果他們已知对方决定的作法，或者更确切些，如果他們假定对方要按上述的推理分析和行事。

如果A假定B按照这种推理（或因任何其他理由）已經选了0，那末他自己也必須选0，因为在对应于B选0的第二列中这样給

他最大的項。因此，他必須作的正是按照以前的推理所决定的作法。同样，在表中能看出，即使B已預知A选了0，他的决定也不受影响。我們看到，"第二阶"的探討，即假定了对手按照博奕論的哲学行事，不会引起任一局中人改变他在这个哲学基础上所作出的"第一阶"的决定。

博奕的上述特点基于下列事实：支付表中有这样一項，它是所在行中的最小的而同时又是所在列中的最大的。由于几何上的类似这个項的位置常常被称为鞍点，虽然这个名詞忽略了位置的缺乏連續性而不太恰当，我們仍采用它，因为它已被用慣了。但是，我們将避免諾伊曼和摩根斯特恩的名詞"特別严格规定的博奕"(文献24第150頁)，它就指具有鞍点的博奕。

当然，不是每个零和二人博奕都有鞍点：配錢是个显然的反例。作为进一步的說明，考虑以下的博奕：

两个局中人独立地各从1、2或3中选一个数。如果二人选同一个数，則A付与B一笔等于这个选出数的錢。否則的話，A从B收到一笔等于A自己选出数的錢。这个"閃避"博奕的支付表如下：

		B 1	B 2	B 3
A	1	−1	1	1
A	2	2	−2	2
A	3	3	3	−3

列里的三个最大値中的最小的（即是2）和行里的三个最小値中的最大的（即是−1）是不同的。这显然表示了这个表中沒有鞍点，这个事实将在第三章中再用分析法来証明。我們必須寻求方法来'解'这类博奕，不过，首先还必須明确什么叫作'解'。

在配錢这样簡单的例子中很容易看出我們应該作什么。若这个博奕只进行一局，那就沒有一个选擇可以比另一个好。但如果

这个博奕重复进行，则一个局中人对于錢的正面或反面的偏爱必定是他的一个錯誤，因为他的对手能够容易地利用这种傾向。因此如果長期地进行，我們应以同样的頻数使用正面与反面，并采用这样一种方式使对手无法猜出下一次是哪一面。这样的長期頻数相等的随机选擇，是可以获得的，用捻轉錢的方法就是一例。

这个推理同样适用于局中的二人，并且我們設想二人都按这个推理行事。于是，如果長期进行，二人都将在一半的局数中贏得1而在另一半的局数中輸掉1。故平均起来他們都将贏得0。

对于这个結果我們进行一种分析，和具有鞍点的博奕的情形类似。試我們假定A知道或認为他知道：B将以同样的頻数来用自己的两个可能策略。那末A沒有理由变更自己的第一阶的选擇（相等頻数）。事实上，他可以选擇任何他願意的頻数而不致改变平均支付。但是，对他来說改变选擇并不是聪明的办法，因为这样作时B就能懲罰他。同一推理适用于B。

我們曾举例說明，具有鞍点的博奕有穩定性特点，現在又說明了这个特点也存在于其他博奕里，倘若我們也考慮具有已給頻数的策略的組合的話。这种組合称为混合策略，而出現在支付表上的单独策略則称为純策略。純策略自然是混合策略的特殊情况，其中除去一个永远用的純策略以外其余的純策略的頻率都是零。因此，除非特别指出，当我們談到策略时我們永远指的是混合策略。

具有上述那样的穩定性特点的一对策略称为一个解（严格定义参看第三章第3节）。出現在解里的策略称为最优的。

为了另举一个博奕来說明这些概念，讓我們取先前介紹过的一个带花招的博奕。它的支付表是：

		B: B_1	B: B_2
A	A_1	1/2	0
	A_2	0	1

这个博奕的解是：A应取第一純策略的次数二倍于第二純策略的次数，B应同样的作。我們簡便地引用相对频率把这个解写出来：A与B同样取$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$。这实在是个解，因为：沒有局中人能作得更好，如果他的对手坚持这个策略；但他可能贏的少于或輸的多于$\frac{1}{3}$（这是A目前贏得的数），如果他放弃最优解而他的对手利用了这一机会的話。附带地說一下，值得指出的是：作为A的第二純策略的特点的花招，在他的最优策略中实际上只是三回中运用一回。

有的博奕可能不止有一个解。例如具有下列支付表的博奕：

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

的一个解是：A取$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$与B取$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$，又一个解是：A取$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$与B仍取$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$。由此可見，当$t$取介于0与1之間的任何值时，A的策略$\left[\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}(1-t), \frac{2}{3}t+\frac{1}{3}(1-t)\right]$与B的策略$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$也組成一个解。注意，如果一个最优策略只能与对手的某特殊最优策略組成一个解，那末不加任何限制而称它为最优策略，这种称謂法是不足令人首肯的。但是我們将在Ⅲ.3里証明：如果s_A、s_B依次是組成一个解的A与B的策略，并且如果t_A与t_B也是这样的策略，則(s_A, t_B)和(t_A, s_B)也都是解，并且所有这些配合都产生同样的支付。从一个解得出的支付称为这个博奕的**值**。

我們曾經看到不是每一个博奕都有个鞍点。但是，博奕論中的一个基本事实是：每一个具有有限多个策略的零和二人博奕都有一个解，可能其中一个或两个局中人的策略是混合的。它的証明将在第三章里給出。

一个博奕,在其最优解中两个局中人都用到一切策略,称为完全混合的(文献13)。配錢和前边带花招的博奕都是这样的博奕,但下面的不是:

$$\begin{array}{c} \text{B} \\ \text{A}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

讀者很容易驗証它的解是:A取$\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$与B取$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$。这个博奕也可用以說明超过概念。我們說,同一局中人的一个純策略超过另一个純策略,如果对于对手的任何选擇,第一个策略至少是象另一个一样有利,而对于对手的某一个选擇則它是肯定較好的。上边的支付矩陣显示,B要用到第三策略就太愚蠢了,它是被第二个超过的。因此,第三策略不出現于B的最优策略中,是不足为奇的,而它是一开始就可以被忽略的。

虽然如此,我們必須了解,一个被超过的策略也可能是最优的。例如在博奕

$$\begin{array}{c} \text{B} \\ \text{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

中有两个解:A取(1,0)与B取(1,0),和A取(0,1)与B取(1,0)。这样A的两个純策略都是最优的,即使第二个超过了第一个。

我們还沒有讲到过如何求一个博奕的解,只不过是如何驗算一对策略是否是个解而已。現在我們添上个注:若支付表是斜对称的,因此它在二局中人对調时保持不变,則这个博奕的值显然为零。以后,特别在第九章,將給出博奕的一般解法,但是等不及的讀者將乐于知道,已往提到的博奕的解都已登載在书末的博奕汇录里。

第二章 图示法

1. 如果我們把博奕論的概念用图示法来表示，那对于喜欢用几何語言来想問題的讀者是有帮助的。为了获得二維平面上的表示法，我們考虑那些博奕，其中有一个局中人仅具有两个純策略。仍举

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

为例。我們要用几何模型把 A，同时也把 B，展示出来，其中 A 为具有两个純策略的局中人。这些結果不难改为适合于这种情况：仅有两个純策略的人是最小追求者。

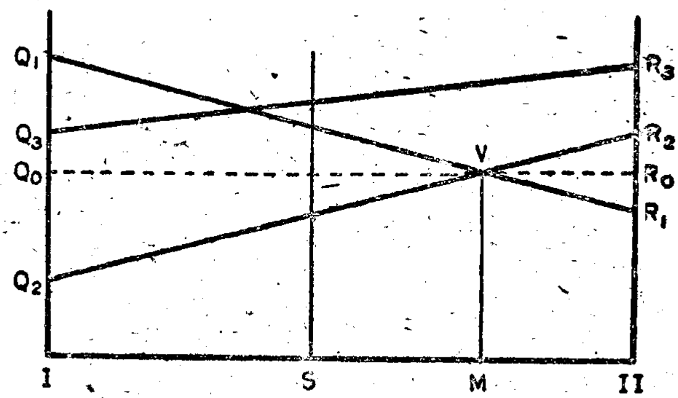

图 II.1

A 能够选擇他的两个純策略中的任一个，或两者的一个混合。他的选擇可以記在长度为 1 的直綫上，如图 II.1 所示。点 I 和 II 分别表示这两个策略。任一中間的点，表示一个混合策略，例如策略$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$将由一个离 II 和 I 成 1:3 之比的点所給出。在綫段 I-II 以外的点不需要我們关心，因为它們不可能由两个非負頻率得到。