★ 工程数学丛书

线性代数

Linear Algebra

华中理工大学数学系

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

工程数学丛书

线性代数

华中理工大学数学系

林升旭　杨　明

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

（京）112 号

图书在版编目(CIP)数据

线性代数／华中理工大学数学系 编著．— 北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，1999.8

（工程数学丛书）

ISBN 7-04-007601-2

Ⅰ．线… Ⅱ．华… Ⅲ．线性代数-高等学校-教材 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17639 号

书　名	线性代数		
作　者	华中理工大学数学系		
出版发行	高等教育出版社　施普林格出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　话	010－64054588	传　真	010－64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	北京民族印刷厂		
开　本	880×1270　1/32	版　次	1999 年 8 月第 1 版
印　张	8.125	印　次	1999 年 8 月第 1 次印刷
字　数	230 000	定　价	15.00 元

前　　言

线性代数是理工科本专科生的一门重要基础课. 它既是学习计算数学、微分方程、离散数学等后续课程的必备基础,也是在自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具.在计算机日益普及的今天,线性代数在理论和应用上的重要性愈显突出,这使得高等院校计算机、电信、自控等专业对线性代数内容从深度和广度上都相应提出了更高的要求.本教材根据教育部高等学校线性代数教学基本要求,结合编者长期从事线性代数和矩阵课程的教学与研究,并在近几年我校实行两个层次线性代数教学实践基础上,为适应不同层次线性代数教学要求而编写的.

本书第一章至第五章不含"*"标志部分的内容及A组习题适用于理工科本科生36学时左右的教学.其内容符合教育部线性代数教学基本要求,属第一层次;全书内容和A、B组习题,适用于理工科本科生50学时左右的教学,属于对线性代数有更高要求的第二层次.

根据教学改革的需要和本科各专业对线性代数内容的不同要求,我们在内容、结构等方面做了精心选择和编排.第一章至第三章介绍行列式、矩阵运算和求解线性方程组. 这是线性代数的基本内容,学生应理解、掌握其基本概念、方法和理论. 对第四章介绍的矩阵相似和第五章介绍的二次型,注意把它们作为前面内容的应用来处理,对Jordan标准形,我们避开它的理论问题,主要从实用的角度介绍化矩阵为Jordan标准形的方法.第六章线性空间与线性变换和打"*"标志部分是拓宽和加深的内容. 将它们置于相应的章、节之末,以保持基本问题的连贯性,方便教学按不同的要求取舍.

本教材以线性方程组为主线,以行列式和矩阵为工具阐明线性代数的基本概念、理论和方法,强调矩阵基本方法的应用,适当加强了矩阵分块运算,特别是简单实用的矩阵列分块在证明问题中的应用,显示

了矩阵方法的简洁与精巧性. 考虑到线性代数课程概念多、结论多、内容抽象、逻辑性强的特点,尽量以提出问题或简单实例引入概念, 力求处理上深入浅出、通俗简单、难点分散. 对重点定理和方法,提供较多的典型例题加以剖析,引导、帮助学生较好地理解、掌握和运用. 本书配有形式多样的习题,并附有答案,便于练习检验.

在本书编写过程中,得到华中理工大学数学系及教研室领导和老师们的极大关心与支持. 余鄂西教授详细审阅全稿,提出了许多宝贵的建议,在此一并表示衷心的感谢.

由于水平所限,疏漏错误难免,敬请读者批评指正.

编者

1999 年 4 月于武汉

第一章　行列式

行列式是由研究线性方程组产生的,它是一个重要的数学工具,在讨论很多问题时都要用到它.本章先介绍二、三阶行列式,并把它推广到 n 阶行列式上,然后讨论行列式的基本性质和计算方法,最后利用 Cramer 法则求解线性方程组.

§1.1　二、三阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中,x_1, x_2 代表未知量,$a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2)$ 代表未知量的系数,b_1,b_2 代表常数项.用消元法从(1.1)式中消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同样地,从(1.1)式中消去 x_1,得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为便于叙述和记忆,引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.2}$$

称 D 为**二阶行列式**,记 $D = \det(a_{ij})$, $i,j = 1,2$.

二阶行列式是两项的代数和,第一项是从左上角到右下角的对角

线上两元素的乘积，并带正号；第二项是从右上角到左下角的对角线上两元素的乘积，并带负号. 由此规则，解 x_1、x_2 中分式的分子也记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

其中 D_i 表示把 D 中第 i 列换成(1.1)式右边的常数列所得到的行列式.

于是，当 $D \neq 0$ 时，二元线性方程组(1.1)的解就唯一地表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{1.3}$$

例 1 用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1, \\ 5x_1 + 3x_2 = 3. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 11,$$

由(1.3)得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -6, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 11.$$

解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

求解此方程组，可由前两方程消去 x_3，得到一个只含 x_1，x_2 的二元方程；再由后两方程消去 x_3 得到另一个只含 x_1，x_2 的二元方程，这样得到一个含两个未知量的二元线性方程组. 按照上述解二元线性方程组的方法，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$

$$= b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{22}a_{13} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32},$$

把 x_1 的系数记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.5}$$

称 D **为三阶行列式**，这是由 3 行 3 列共 9 个元素并由(1.5)计算得到的一个数.(1.5)式右边有 6 个项，每项是位于 D 中既不同行又不同列的三个元素的乘积，并按照一定的规则，带有正号或负号.它可用所谓**对角线法**(图 1.1)来表示.

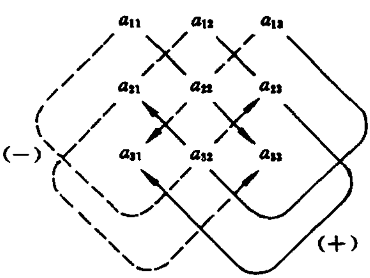

图 1.1

从左上角到右下角的对角线叫**主对角线**，从右上角到左下角的对角线叫**副对角线**.在对角线计算法中，主对角线上三个元素之积及平行于主对角线的三元素之积的项取正号(图 1.1 中用实线连接).副对角线上三个元素之积及平行于副对角线的三个元素之积的项取负号(图 1.1 中用虚线连接).

我们称(1.5)式中的 D 为三元线性方程(1.4)的系数行列式.根据上面的算法，有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{13}a_{22} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}.$$

则 x_1 可表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},$$

同理可得

$$x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

D_i 是把系数行列式 D 中的第 i 列删去，换上线性方程组(1.4)的右边的常数列所得到的行列式.

例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

解 用对角线法计算行列式，得

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 16, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 24.$$

故解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3.$$

§1.2 n 阶行列式的概念

用对角线法计算二、三阶行列式，虽然简便直观，但对高于三阶的

行列式，该方法就不适用了．为了求解 $n>3$ 的线性方程组，有必要把二、三阶行列式进一步推广，为此我们先分析(1.5)式所示的三阶行列式的展开项的结构，从中找出其一般规律．

(1) 三阶行列式的每一项都是不同行不同列的三个元素的乘积．

(2) 每一项的三个元素的行下标按自然顺序排列时，其列下标都是 1,2,3 的某一个排列．三元排列的每一排列都对应着三阶行列式的一项，故三阶行列式共有 $3!=6$ 项．

(3) 关于项的符号．在(1.5)式中，加正号的三项列下标排列为

$$123,\qquad 231,\qquad 312,$$

它们是自然排列 123 经零次或二次(偶数次)对换得到的．例如排列 231 是将 123 中的 1 和 2 对换，然后再将 1 和 3 对换得到的．而加负号的三项的列下标排列为

$$321,\qquad 132,\qquad 213.$$

它们是 123 经一次(奇数次)对换得到的．例如排列 132 是自然排列 123 中 2 和 3 对换得到的．这就是说，行列式每项所带的符号与排列对换次数(奇数次或偶数次)有关．

为了阐明 n 阶行列式展开项的符号规律，我们引入 n 元排列的逆序与奇偶性的概念．

1.2.1 排列的逆序与奇偶性

自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 按一定次序排成一排，称为一个 n 元排列，记为 $i_1i_2\cdots i_n$．$1\ 2\cdots n$ 称为**自然排列**．n 元排列总共有 $n!$ 个．例如自然数 $1,2,3$ 共有 $3!=6$ 个排列，我们用 $i_1i_2i_3$ 表示这 6 个排列中的一个．

定义 1 在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若一个大的数排在一个小的数的前面，则称这两个数构成一个逆序．一个排列逆序个数的总和就称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$．

例 3 求下列排列的逆序数

$$(1)\ 3241,\quad (2)\ 13524,\quad (3)\ n\ n-1\cdots 2\ 1.$$

解 (1) 在排列 3241 中，数 1 前面有 3 个数与 1 构成逆序；数 4 前面没有数与 4 构成逆序；数 2 前面有 1 个数与 2 构成逆序；数 3 排在最

前面,逆序为零.故

$$\tau[3241]=3+0+1+0=4.$$

(2) 同理

$$\tau[13524]=1+2+0+0+0=3.$$

(3) 同理

$$\begin{aligned}\tau[n\ n-1\cdots 2\ 1]&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

定义 2 若排列的逆序数为奇(偶)数,则称此排列为奇(偶)排列.

例 1 中排列 3241 是偶排列,13524 是奇排列. 而对排列 $n\ n-1\cdots 2\ 1$,当 $n=4k, n=4k+1$ 时,该排列为偶排列;当 $n=4k+2, 4k+3$ 时,该排列为奇排列. 自然排列 $1\ 2\cdots n$ 是一个偶排列,其逆序数为零.

定义 3 一个排列中的某两个数的位置互换,其余的数不动,就得到一个新的排列,称这样的变换为一次对换. 而相邻两个数的对换称为邻换.

对换有如下性质:

定理 1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 首先证明:一次邻换改变排列的奇偶性. 设 n 元排列为

$$\cdots ij\cdots,$$

将相邻两个数 i,j 对换得到新排列

$$\cdots j\,i\cdots,$$

由于除 i,j 两数外其余的数不动,所以其余的数之间的逆序没有改变. 若 $i>j$,则新排列的逆序比原排列的逆序减少 1;若 $i<j$,则新排列的逆序比原排列的逆序增加 1,故一次邻换改变排列的奇偶性.

其次,设 n 元排列为

$$\cdots i\ a_1\ a_2\cdots a_s\ j\cdots,$$

数 i 和 j 之间相隔 s 个数. 要实现 i 与 j 的对换,可先把 i 与 a_1 邻换,再把 i 与 a_2 邻换,照此继续下去,经 $s+1$ 次邻换就可把 i 调换到数 j 之后,

即
$$\cdots a_1\, a_2 \cdots a_s\, j\, i \cdots,$$
然后再把 j 依次邻换到 a_1 之前，这样要经过 s 次邻换才能做到. 从而共经 $2s+1$ 次邻换就完成了 i 与 j 的对换，得到
$$\cdots j\, a_1\, a_2 \cdots a_s\, i \cdots,$$
利用一次邻换改变排列奇偶性即可证明定理.

定理 1 有如下推论：

推论 1 任意一个 n 元排列都可以经过一定次数的对换变成自然排列，并且所作对换的次数与该排列有相同的奇偶性.

这是因为 $1\ 2 \cdots n$ 是偶排列，而一次对换改变排列奇偶性，当排列 $i_1\, i_2 \cdots i_n$ 是奇(偶)排列时，必须作奇(偶)次对换才能变成自然排列 $1\ 2 \cdots n$. 故所作的对换次数与排列具有相同的奇偶性.

推论 2 全体 n 元排列的集合中，奇排列与偶排列各一半.

1.2.2 n 阶行列式的定义

有了逆序和奇偶性概念，我们就可以把(1.5)式表成如下形式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{[i_1 i_2 i_3]}(-1)^{\tau[i_1 i_2 i_3]} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}.$$

定义 4 把 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，按照下式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\sum_{[i_1 i_2 \cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1 i_2 \cdots i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \qquad (1.6)$$
计算得到的一个数，称为 **n 阶行列式**，简记为 $D=\det(a_{ij})$ 或 $D=|a_{ij}|$，其中 $\sum\limits_{[i_1 i_2 \cdots i_n]}$ 表示对所有 n 元排列求和.

(1.6)式的右边的每一项乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 中的每一个元取自 D 中不同行不同列. 当行下标按自然顺序排列时,相应的列下标是 $12\cdots n$ 的一个 n 元排列 $i_1 i_2\cdots i_n$, 若是偶排列,则该排列对应的项取正号;若是奇排列,则取负号,用 $(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}$ 表示. 行列式 D 中共有 $n!$ 个乘积项.

例 4　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式主对角线上方的元素都为零,我们称它为**下三角行列式**(主对角线下方的元素都为零的行列式,称为**上三角行列式**).

解　我们关心的是 D 的展开式中不为零的那些项. 由于第一行除 a_{11} 外其余元素都为零,所以行列式的通项中第一个元 a_{1i_1} 只能取 a_{11};而第二个元素 a_{2i_2} 不能选取 a_{21},这是因为展开式的每一项中不能存在两个同列的元素,故只能选取 a_{22}; 同理 a_{3i_3} 只能选取 a_{33};…; 末行只能选取 a_{nn}. 从而

$$D=(-1)^{\tau[1\ 2\ \cdots\ n]}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理,对上三角行列式有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,有

$$\Lambda=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上面行列式中未写出的元素都表示零元(以后均如此表示). 称主对角线外的元素皆为零的行列式 Λ 为**对角行列式**.

应当指出，n 阶行列式可以有若干种定义. 例如，若把 n 阶行列式每项的列下标按自然顺序排列，则行下标是 n 元排列的某一个排列，这样便得到行列式的另一个定义式

$$D=\sum_{[j_1j_2\cdots j_n]}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}. \tag{1.7}$$

因为把 n 阶行列式 D 的通项

$$(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

的列下标的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经 N 次对换变成自然排列 $1\ 2\cdots n$ 的同时，相应的行下标排列 $12\cdots n$ 经 N 次对换就变成了排列 $j_1j_2\cdots j_n$. 即

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

根据定理 1 的推论 1，对换次数 N 与 $\tau[i_1\,i_2\cdots i_n]$ 有相同的奇偶性，而 N 与 $\tau[j_1j_2\cdots j_n]$ 也有相同的奇偶性，从而 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$ 与 $\tau[j_1j_2\cdots j_n]$ 有相同的奇偶性. 所以

$$(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

因此可得(1.7) 是行列式的等价定义.

§1.3 行列式的性质

用行列式的定义计算 n 阶行列式，一般要计算 $n!$ 个乘积项，每一项是 n 个元素的乘积，需要作 $n-1$ 次乘法运算，所以一共需作 $(n-1)n!$ 次乘法运算. 当 n 较大时，例如 $n=25$，乘法次数达到 $24\times 25!$，约等于 3.2227×10^{26} 次，这是一个惊人的数字. 为此，下面将介绍行列式的基本性质，利用这些性质可简化行列式的计算. 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行与列互换，得到新的行列式，记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**. 显然

$$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D.$$

性质 1　行列式与转置行列式相等，即

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

证　设 D^{T} 的第 i 行第 j 列元素为 a'_{ij}，由转置定义 $a'_{ij}=a_{ji}$ 及(1.7)式有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{[j_1\cdots j_n]}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a'_{j_11}a'_{j_22}\cdots a'_{j_nn} \\ &= \sum_{[j_1\cdots j_n]}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=D. \end{aligned}$$

性质 1 说明行列式的行和列具有同等地位. 因而凡是对行具有的性质，对列也一样具有，反之亦然. 故以下所讨论的行列式性质中，只对行加以证明.

性质 2　用一个数 k 乘行列式，等于将行列式的某一行(列) 元素都乘以 k. 即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

也可以说，若行列式某行(列) 有公因子 k，则可以把它提到行列式外面(证明略).

性质 3　若对换行列式的任意两行(列)，则行列式变号.

证　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

要证性质 3,即要证 $D=D_1$. 因为 D 中的任一项为

$$(-1)^{\tau[i_1\cdots p\cdots q\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots a_{ip}\cdots a_{jq}\cdots a_{ni_n},$$

与之相对的 D_1 中的一项为

$$(-1)^{\tau[i_1\cdots q\cdots p\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots a_{jq}\cdots a_{ip}\cdots a_{ni_n},$$

由定理 **1**,有

$$(-1)^{\tau[i_1\cdots p\cdots q\cdots i_n]}=(-1)(-1)^{\tau[i_1\cdots q\cdots p\cdots i_n]},$$

即 D 与 D_1 对应项的符号相反,亦即 $D=-D_1$.

推论 1　若行列式的任意两行(列)相同,则行列式为零.

证　设 D 是 i 行与 j 行相同的行列式,把 D 的 i 行与 j 行对换. 由性质 3,有 $D=-D$,即 $D=0$.

推论 2　若行列式的任意两行(列)元素成比例,则行列式为零.

性质 4　若行列式的第 i 行(列)的每一个元素都可表示为两数之和,则该行列式可表示为两行列式之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

或者说,若两个行列式中除第 i 行之外,其余 $n-1$ 行对应相同.则两个行列式之和只对第 i 行对应元素相加,其余行保持不变.

证　左边 $=\sum\limits_{[i_1\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots(a_{ip}+b_{ip})\cdots a_{ni_n}$

$$=\sum_{[i_1\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots a_{ip}\cdots a_{ni_n}+\sum_{[i_1\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots b_{ip}\cdots a_{ni_n}.$$

这正好是右边两行列式之和.

性质 5　把行列式的第 j 行(列)元素的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上,行列式的值不变,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{j1}+a_{i1} & ka_{j2}+a_{i2} & \cdots & ka_{jn}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中,D 如性质 3 之假设.

证　由性质 4,上式右边的行列式可拆为两个行列式之和,再利用性质 3 的推论 2,得证.

例 5　计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

解　利用性质 5,第 1 行乘以 -2 和 -5 分别加到第 2、3 行

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0.$$