新编考研辅导丛书

高等数学辅导

刘三阳　王世儒
毛用才　刘玉璞　李广民　编著

西安电子科技大学出版社
2000

内 容 简 介

本书根据教育部2000年制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，首先简明扼要地给出了“高等数学”、“线性代数”、“概率论与数理统计初步”等各部分内容的考试要求、要点提示和常见题型，然后重点分析讲解了大量的典型例题。讲题示法，以题释理，注重解题思路和规律的揭示与方法技巧的归纳，突出知识的综合运用和解题能力的训练，以求举一反三、知微见著、融会贯通之效。精选的习题和模拟试题(附有参考答案)可供读者自练自测。全书题源广泛，题型多样，综合性强。

本书既可作为报考硕士研究生的考生的复习辅导书，也可用作理工科大学生课程学习或复习的指导书，还可作为有关教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/刘三阳，王世儒等编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2000.8

(新编考研辅导丛书)

ISBN 7-5606-0901-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①刘…②刘… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第36202号

责任编辑 李惠萍

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话 (029)8227828　　邮　　编 710071

http://www.xduph.com　　E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经　　销 新华书店

印　　刷 西安兰翔印刷厂

版　　次 2000年8月第1版　2000年8月第1次印刷

开　　本 787毫米×960毫米 1/16 印张 30.25

字　　数 613千字

印　　数 1～4000册

定　　价 35.00元

ISBN 7-5606-0901-5/O·0043

《新编考研辅导丛书》编审委员会

序

人类走过了又一个千年之交。世界正在发生深刻变化。这一变化是20世纪以来科学技术革命不断深入的必然结果，她已经成为推动社会发展与文明进步的革命性力量。人类走过了农业经济时代、工业经济时代，正在进入知识经济时代。

自1978年国家恢复招收研究生和1980年建立学位制度至今，研究生教育已经走过了20多年的历程，她是我国教育结构中最高层次的教育，肩负着为国家现代化培养高素质、高层次创造性人才的重任，是我国增强综合国力、增强国际竞争力的重要支撑力量。研究生教育的改革和发展，直接关系到21世纪我国第三步战略目标的实现。

西安电子科技大学是一所有70年历史的教育部直属的重点高等学校，也是国家“211”重点建设高校，同时又是国家首批具有硕士、博士授予权的单位之一。现有在校生15 000多人，其中研究生2000余人。学校建有研究生院等10个学院，有3个国家重点学科和27个省部级重点学科；同时建有3个国家重点实验室和16个省部级重点实验室，在“通信与信息系统”、“信号与信息处理”、“电路与系统”和“微电子与固体电子学”设有“长江计划”特聘教授岗位。近年来，西安电子科技大学研究生教育得到了迅速的发展，年招生已超过1000人，招生质量和培养质量在省内名列前茅。毕业生遍布国内外，受到了广泛赞誉。

当前，研究生教育面临新的挑战，同时给研究生教育的发展带来了新的机遇。如何选拔优秀人才是一项长期的研究课题。西安电子科技大学出版社组织我校长期在教学科研第一线、在国内有一定知名度的教授编写了这套考研辅导丛书，并从重点、难点、考点、典型例题分析及自测题等方面进行有剖析、对比总结性的阐述，有助于考生在有限的时间内复习所学内容，并有新的提高和启发。

我们相信此套丛书的出版对我国工科电子信息类研究生教育的发展会起到积极的促进作用。

西安电子科技大学研究生院

博士生导师　焦李成

2000年7月

前 言

本书是以国家教育部制订的最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》为依据，针对近年考研数学命题趋势，在结合编者们多年来从事考研辅导所积累的经验和资料并参考多种有关书籍的基础上编写而成的。此书旨在帮助考生在较短时间内复习和掌握考试大纲所规定的数学考试内容，熟悉各种题型，了解命题动态，掌握答题技巧，快速提高解题能力。

解题是一种运用知识的过程，也是一种能力的训练。著名数学家、教育家波利亚认为，解题是一种实践性活动，是智力的特殊成就，数学技能就是解题能力。数学解题能力是衡量一个人数学知识掌握程度和数学水平高低的重要标志，当然也是数学应试能力强弱的关键因素。因此，本书把重心放在典型例题的分析讲解上，讲题示法，以题释理，注重解题思路的分析、解题规律的总结和方法技巧的提练，突出知识的综合运用和重点、难点、考点的解析。许多例题一题多解(证)，也有不少多题一解(证)的范例，还有不少例题之后带有附注，或指出注意事项，或作出引申归纳，或加以补充注释，这一切旨在起到解难释疑、开阔思路、触类旁通之效。

全书分为三大部分：高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步。每一部分由若干章组成，每章由三个模块组成，其中第一模块由考研要求(将考试大纲中的“考试要求”原文列出)、要点提示和常见题型构成，这一部分简明扼要；第二模块是典型例题解析，也是全书的主要内容，这一部分选题广泛，题型多样，覆盖面广，信息量大，综合性强，重点突出；第三模块是习题选编及参考答案。此外还附有几套模拟试题。

本书由刘三阳主编，参加编写的有刘三阳(第一部分第1、2、6章)，刘玉璞(第一部分第3、4、7、8章)，李广民(第一部分第5、9、10章)，王世儒(第二部分)，毛用才(第三部分)。

本书既可作为报考硕士研究生的考生的数学辅导书，也可用作理工科大学

生和从事同类课程教学的教师的参考书。

尽管编者们有过长期从事数学教学的经验和多年举办考研辅导班的实践，但由于工作繁忙和水平所限，书中可能还存在疏忽和错误之处，恳请读者和同行批评指正。

编　者

2000 年 4 月

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

附录　考研模拟试题及解答

第一篇

高 等 数 学

第 1 章

函数、极限、连续

一、重点、难点、考点

1. 考研要求

（1）理解函数的概念，掌握函数的表示方法。

（2）了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。

（3）理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。

（4）掌握基本初等函数的性质及其图形。

（5）会建立简单的应用问题中的函数关系式。

（6）理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系。

（7）掌握极限的性质及四则运算法则。

(8) 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。

(9) 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限。

(10) 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型。

(11) 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理)，并会应用这些性质。

2. 要点提示

极限是本章的重点和难点，既要准确理解极限的概念(包括数列极限、函数极限、左右极限、无穷小量、无穷大量)和极限存在的充要条件，又要能正确熟练地求出各种极限。

求极限的方法灵活多样，例如：

(1) 利用两个重要极限；

(2) 利用洛必达法则；

(3) 利用夹逼定理；

(4) 利用泰勒公式；

(5) 先证明数列的极限存在(常用单调有界准则)，再利用关系式求出极限；

(6) 利用等价无穷小替换；

(7) 利用定积分定义；

(8) 利用级数收敛的必要条件；

(9) 利用拉格朗日中值定理等。

有时一个题目要联合使用多种方法才能求解。

判断函数的连续性和间断点的类型。复合函数和分段函数及函数符号的运算。闭区间上连续函数的介值定理和最大值、最小值存在定理的应用。

3. 常见题型

(1) 直接求极限或给定极限值反过来确定式子中的常数；

(2) 讨论函数的连续性，判断间断点的类型；

(3) 无穷小的比较；

(4) 讨论连续函数在给定区间上的零点或方程在给定区间上实根的存在性；

(5) 求分段函数的复合函数。

注意极限和闭区间上连续函数的性质常与其它部分的内容结合在一起，出现在综合题中。

二、典型例题解析

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 2, & |x|>2\end{cases}$$

求 $f[g(x)]$、$g[f(x)]$、$g[g(x)]$。

解 (1)

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}$$

现需求出使 $|g(x)|\leqslant 1$ (或 $|g(x)|>1$)的 x 范围。

由于 $|x|>2$ 时，$g(x)=2>1$，故仅当 $|x|\leqslant 2$ 时，才可能有 $|g(x)|\leqslant 1$。而欲使 $|g(x)|\leqslant 1$，必须且只需

$$|x|\leqslant 2,\ |2-x^2|\leqslant 1$$

由此可得 $1\leqslant |x|\leqslant \sqrt{3}$。于是有

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant |x|\leqslant \sqrt{3}\\ 0, & |x|<1 \text{ 或 } |x|>\sqrt{3}\end{cases}$$

(2)

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 2\\ 2, & |f(x)|>2\end{cases}$$

由 $f(x)$的定义知，对任意的 x 有 $|f(x)|\leqslant 1<2$，故有

$$g[f(x)]=2-[f(x)]^2=\begin{cases}2-1^2, & |x|\leqslant 1\\ 2-0, & |x|>1\end{cases}$$

即

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$$

(3) 由于对任意的 x 有 $|g(x)|\leqslant 2$，故有

$$g[g(x)]=2-[g(x)]^2=\begin{cases}2-(2-x^2)^2, & |x|\leqslant 2\\ 2-2^2, & |x|>2\end{cases}$$

即

$$g[g(x)]=\begin{cases}-x^4+4x^2-2, & |x|\leqslant 2\\ -2, & |x|>2\end{cases}$$

注意 也可借助 $f(x)$和 $g(x)$的几何图像，求出各复合函数。

例 2 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)=f(f\cdots(f(x)))$，并讨论 $f_n(x)$的奇偶性、单调性

和有界性。

解 设 $f_1(x)=f(x)$，则

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+[f_2(x)]^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

设 $f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+[f_k(x)]^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

由数学归纳法知

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},\ n=1,2,3,\cdots$$

显然 $f_n(-x)=-f_n(x)$，即 $f_n(x)$为奇函数。又不难求出

$$f_n'(x)=\frac{1}{(1+nx^2)^{3/2}}>0$$

故 $f_n(x)$严格单调增加。由于显然有

$$|f_n(x)|=\frac{|x|}{\sqrt{1+nx^2}}<1$$

故 $f_n(x)$有界。

例 3 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$$

则下式中正确的是____。

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0 \\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0 \\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

[答案]　(D)正确。

解 1　当 $x\geqslant 0$ 时，$-x\leqslant 0$，由 $f(x)$的定义，$f(-x)=(-x)^2=x^2$；

当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$，即(D)正确。

解 2　令 $y=-x$，则当 $x\leqslant 0$ 时，$y\geqslant 0$；$x>0$ 时，$y<0$，代入 $f(x)$的表达式得

$$f(-y)=\begin{cases}(-y)^2, & y\geqslant 0 \\ (-y)^2+(-y), & y<0\end{cases}$$

即有

$$f(-y)=\begin{cases}y^2-y, & y<0 \\ y^2, & y\geqslant 0\end{cases}$$

这与(D)中的函数是相同的。

本题也可利用 $f(x)$与 $f(-x)$的图像关于 y 轴对称的道理，直接从图形上判断出(D)是正确的。

例 4　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$并写出它的定义域。

解　由于 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，可得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，再根据 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 知 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$，这就是 $\varphi(x)$的定义域。

例 5　求

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}\quad(a\geqslant 0)$$

解　需根据 a 的取值范围分别讨论如下：

(1) 当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}=1$$

(2) 当 $1<a\leqslant 2$ 时，

$$a<\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}\,a$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}a=a$$

(3) 当 $a>2$ 时，

$$\frac{a^2}{2}<\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}\,\frac{a^2}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}\,\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$$

综上可知

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}=\begin{cases}1, & 0\leqslant a\leqslant 1\\ a, & 1<a\leqslant 2\\ \dfrac{a^2}{2}, & a>2\end{cases}$$

注意 本题答案实际就是 1，a 和 $a^2/2$ 中的最大者，类似可得到更一般的结论：

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{a_i\},\ a_i\geqslant 0$$

例 6 求 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$

解 因为

$$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}$$

所以

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right)=\frac{2}{\pi}$$

于是由夹逼定理可知原式为 $2/\pi$。

注意 解这类题常用夹逼定理或化为积分和式的方法，本题则联合使用这两种方法。

例 7 求

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

解 令 $x_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$，取对数得

$$\begin{aligned}\ln x_n &= \frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n)]-\ln n \\ &= \frac{1}{n}[\ln(n+1)-\ln n+\ln(n+2)-\ln n+\cdots+\ln(2n)-\ln n] \\ &= \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\end{aligned}$$

于是有

$$\lim_{n\to+\infty}\ln x_n=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=2\ln2-1$$

所以

$$\text{原极限}=\mathrm{e}^{2\ln2-1}=\frac{4}{\mathrm{e}}$$

例 8 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$。

解 1 考虑级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$，令 $x_n=\frac{n^n}{3^n n!}$，因为

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{3^n n!}{n^n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{\mathrm{e}}{3}<1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，由级数收敛的必要条件可知

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{3^n n!}=0$$

解 2 由解法 1 知 $x_{n+1}<x_n$，即$\{x_n\}$单调下降，又有下界 0，从而收敛。设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=l$，则对 $x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 两边取极限可得 $l=\frac{1}{3}l\cdot\mathrm{e}$，因此 $l=0$ 。

例 9 设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)$，$n=1,2,\cdots$，证明$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

证 因为

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(x_n+x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)\geqslant\sqrt[3]{x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^2}}=\sqrt[3]{a},\ n=1,2,\cdots$$

所以$\{x_n\}$有下界。又因为

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{x_n^2})-x_n=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x_n^2}-x_n\right)=\frac{a-x_n^3}{3x_n^2}\leqslant0$$

所以$\{x_n\}$单调下降有下界，从而存在极限，设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=l$。

对
$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)$$
两端取极限得
$$l=\frac{1}{3}\left(2l+\frac{a}{l^2}\right)$$
解之得
$$l=\sqrt[3]{a}$$

注意 本题提供了求正数立方根的迭代公式，而且收敛很快。

例 10 设 $x_1>0$ 且 $x_{n+1}=\dfrac{5(1+x_n)}{5+x_n}$，$n=1, 2, \cdots$。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在并求此极限。

证 容易看出
$$1<x_{n+1}=\frac{5(1+x_n)}{5+x_n}<5,\ n=1,\ 2,\ \cdots$$
即$\{x_n\}$有上下界。又因为
$$x_{n+1}-x_n=\frac{5(1+x_n)}{5+x_n}-\frac{5(1+x_{n-1})}{5+x_{n-1}}=\frac{20(x_n-x_{n-1})}{(5+x_n)(5+x_{n-1})}$$
所以
$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}>0,\ n=2,\ 3,\ \cdots$$
而
$$x_2-x_1=\frac{5-x_1^2}{5+x_1}$$
因此，当 $x_1<\sqrt{5}$ 时，$\{x_n\}$单调上升；当 $x_1>\sqrt{5}$ 时，$\{x_n\}$单调下降；当 $x_1=\sqrt{5}$ 时，$x_n\equiv\sqrt{5}$，$n=1, 2,\cdots$。总之，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在且容易求出此极限值为 $\sqrt{5}$。

例 11 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$（$n$ 为正整数）。

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(1+\dfrac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}}\right]^{\frac{\tan x-x}{x^3}}$

而
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}$$
故有
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$$
取 $x=\dfrac{1}{n}$，则有
$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}$$

例 12 求$\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$。

解 1 原式$=\lim\limits_{x\to 0}[(\sin x+\cos x)^2]^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{2x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{\frac{\sin 2x}{2x}}=\mathrm{e}$$

解 2 令 $y=(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$，则有

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln(\sin x+\cos x)$$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}=1$$
所以原式=e。

例 13 求$\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$。

解 1 令 $x=\frac{1}{t}$，则有

$$原式=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2t(1+t)}=\frac{1}{2}$$

解 2 由泰勒公式有

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

于是

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}-x^2o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

例 14 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^5}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{3x^2}\right)$。

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x^5}\int_0^x\left(1-t^2+\frac{t^4}{2}+o(t^4)\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{3x^2}\right]$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x^5}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5)\right)-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{3x^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{10}+\frac{o(x^5)}{x^5}\right]=\frac{1}{10}$$

例 15 设 $f(x)$在 x_0 处二阶可导，求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}$$

解 1 由泰勒公式有