高等数学解题指导

gaodeng shuxue jieti zhidao

林正国 主编

华东理工大学出版社

高等数学解题指导

主编　林正国

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指导/林正国主编.—上海:华东理工大学出版社,2001.9

ISBN 7-5628-1177-6

Ⅰ.高… Ⅱ.林… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 034238 号

高等数学解题指导

主编 林正国

华东理工大学出版社出版发行	开本 850×1168 1/32
上海市梅陇路130号	印张 18.75
邮编 200237 电话 (021)64250306	字数 484 千字
网址 www.hdlgpress.com.cn	版次 2001年9月第1版
新华书店上海发行所发行经销	印次 2001年12月第2次
上海展望印刷厂印刷	印数 5501-11000册

ISBN 7-5628-1177-6/O·55 定价:25.00元

内容提要

本书内容包括一元微积分、多元微积分、级数、微分方程的典型例题和习题约千余题。对每道题都作了精湛的分析和详尽的解答，内容精炼、论述清晰，读者若能仔细研习、反复体会必大有裨益。

本书可作为硕士研究生入学考试高等数学部分的题典，也可供本科生学习高等数学准备学期、学年考试的参考书。

本书内容丰富，取材广博，可供有关教师作为参考资料。

为纪念关肇直院士逝世20周年而作

前　言

敬爱的关肇直院士——我们的老师，生前曾担任过中国科学院数学研究所副所长，系统科学研究所所长。

40年前，关老师给我们上的第一门课就是高等数学，从此我们开始在数学这片领地上耕耘和收获。

关老师学识渊博、品德高尚，是我们这一代人的楷模。

关老师不仅教我们做学问，更教我们做人。老师对我们的教诲难以忘怀，至今，虽然过去近40年了，但老师的音容笑貌还时时清晰地浮现在我们的脑海中，鼓舞我们前进。

谨以这本基础读物来纪念我们尊敬的老师逝世20周年，寄托我们的哀思之情，告慰老师的在天之灵。

本书的特点是内容详略得当，选题难易适中，分析精辟透彻，解释画龙点睛，是作者多年来教学经验的结晶和升华，读者若能细细体会定能有所收获。

本书在写作过程中得到了华东理工大学朱子彬副校长，出版社郑斯雄先生、王席溱先生的热情支持，在此向他们表示衷心的感谢。

限于编者水平，缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指正。

目　　录

第 1 章　函数　极限　连续

1.1　知识要点

(1) 函数　定义(定义域、对应规则),性质(有界性、单调性、奇偶性、周期性),复合函数,反函数,基本初等函数,初等函数,分段函数。

(2) 极限　数列极限的定义(ε-N),收敛数列的性质,函数极限的定义($\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, ε-X 定义,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, ε-δ 定义),左、右极限($\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$),极限存在的充分必要条件,极限存在的两个基本准则(单调有界必有极限,夹逼定理)两个重要极限($\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$),无穷小与无穷大的定义、性质、比较(高阶、低阶、同阶、等价、k 阶)。

(3) 连续　连续与间断的定义,间断点的分类,闭区间连续函数的性质。

1.2　解题指导

例 1　试求函数 $f(x)=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}+\arccos\dfrac{2x}{1+x}$ 的定义域。

分析　求定义域的规则是　$y=\dfrac{1}{x}$, $x\neq0$; $y=\sqrt{x}$, $x\geqslant0$; $y=\log_a x$, $x>0$; $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$　$|x|\leqslant1$。

解 由$\sqrt{-x}$,可得$-x\geqslant 0$,即$x\leqslant 0$;

由式$\frac{1}{\sqrt{2+x}}$可得$2+x>0$,即$x>-2$;

由$\arccos\frac{2x}{1+x}$得$\left|\frac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1$,解之得$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$。求它们的交可得$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 0$,即$\left[-\frac{1}{3},0\right]$为所求。

例2 判定$f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$的奇偶性。

分析 $f(x)$定义在关于原点的对称区间上,若$f(-x)=f(x)$,则其为偶函数;若$f(-x)=-f(x)$,则其为奇函数;两式都不成立,则其为非奇非偶。

解
$$\begin{aligned}f(-x)&=(2+\sqrt{3})^{-x}+(2-\sqrt{3})^{-x}\\&=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x\\&=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=f(x)\end{aligned}$$

故$f(x)$是偶函数。

例3 设$y=\frac{1}{2x}f(t-x)$,且当$x=1$时,$y=\frac{1}{2}t^2-t+5$,求$f(x)$。

分析 函数是表示一种对应的关系,求$f(x)$即求这种对应的关系。

解 当$x=1$时,$\frac{1}{2}f(t-1)=\frac{1}{2}t^2-t+5$,

即 $f(t-1)=t^2-2t+10$,令$t-1=u$,即$t=1+u$

故$f(u)=(1+u)^2-2(1+u)+10=u^2+9$,

于是 $f(x)=x^2+9$。

例4 设$f(x)$满足$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$ (a,b,c均为常数,且$|a|\neq|b|$),求:$f(x)$

分析 当两个函数定义域相同、对应规则一致时,这两个函数

表示同一函数，这一性质称为函数表示法的“变量无关性”。

解 由 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$，设 $x=\frac{1}{t}$，则 $t=\frac{1}{x}$，有

$$af(\frac{1}{t})+bf(t)=ct$$

即 $$bf(x)+af(\frac{1}{x})=cx$$，联立解之得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)$$

例 5 求双曲正弦函数 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$的反函数。

分析 求反函数分两步走，首先从中解出 x，即让它表达为 y 的函数，然后将 x 记为y，将 y 记为x。

解 由 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，可得 $2y=e^x-e^{-x}$，

即 $$e^{2x}-2ye^x-1=0$$

解得 $$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

因为 $e^x>0$，故负号舍去，得 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$，

取对数 $$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

反函数为 $$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})。$$

例 6 求函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$的最小正周期。

分析 设 $f(x+l)=f(x)$，l 称为周期函数$f(x)$的周期，使这样的关系成立的最小正数 T，称为最小正周期。

解
$$\begin{aligned}f(x+\frac{\pi}{2})&=|\sin(x+\frac{\pi}{2})|+|\cos(x+\frac{\pi}{2})|\\&=|-\cos x|+|-\sin x|=|\sin x|+|\cos x|\\&=f(x)。\end{aligned}$$

故$\frac{\pi}{2}$是最小正周期

例 7 设对一切实数 x，有 $f(\frac{1}{2}+x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，

证明 $f(x)$是周期函数。

分析 在$f(\frac{1}{2}+x)$中的自变量再加$\frac{1}{2}$,重复上述关系试探之。

证 $f\left[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+x)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(\frac{1}{2}+x)-f^2(\frac{1}{2}+x)}$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2}$$

由题设知 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$, 故有

$$f(1+x)=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x)。$$

故 $f(x)$是周期为 1 的周期函数。

例 8 已知$f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$并指出它的定义域。

分析 这是已知复合函数的表达式,反过来求“中间变量”$\varphi(x)$的问题,关键是写出 $f[\varphi(x)]$的一般表达式。

解 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$,即 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,由$\ln(1-x)\geqslant 0$,知 $1-x\geqslant 1$,即 $\varphi(x)$的定义域为 $x\leqslant 0$。

例 9 一正圆锥外切于半径为 a 的球,如图 1-1 所示,试将圆锥的体积表示为圆锥半顶角的度数。

分析 球的大小是不变的,因此它的半径 a 是常量。圆锥的体积是随它的半顶角的大小而定,因此,体

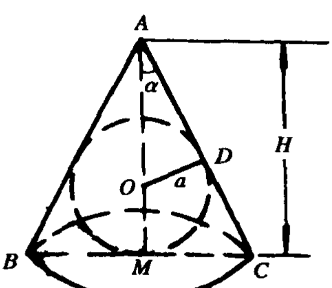

图 1-1

积与顶角是变量，而且它们之间存在着函数关系。设体积为 V，半顶角为 α。由立体几何知，$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$，其中 R 为底半径，H 为高，它们都与 α 有关，将它们表达出来即得解。

解 从直角 $\triangle ADO$，得 $AO=a\csc\alpha$，从而 $H=AO+OM=AM=a(1+\csc\alpha)$。又从直角 $\triangle AMC$，得 $R=MC=AM\tan\alpha=a(1+\csc\alpha)\tan\alpha$，所以

$$V=\frac{1}{3}\pi a^3(1+\csc\alpha)^3\tan^2\alpha, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}。$$

例 10 如图 1－2，$OABC$ 是一个边长为 1 的正方形。O 是坐标原点，另有一直线 $x+y=t$，求正方形与平面区域 $x+y<t$ 公共部分的面积 $S(t)$。

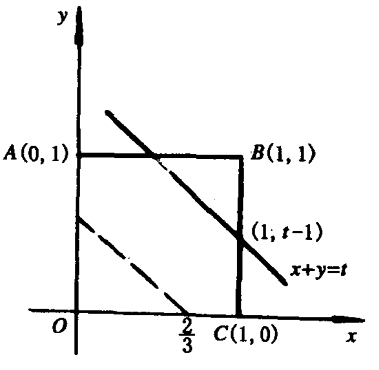

图 1－2

分析 当 $t\leqslant 0$ 时，$x+y<t$ 所表示的平面区域与正方形 $OABC$ 没有公共部分，即 $S(t)=0$；

当 $0<t\leqslant 1$，公共部分面积为 $S(t)=\frac{t^2}{2}$；

当 $1<t\leqslant 2$，公共部分面积为 $S(t)=1-\frac{1}{2}(2-t)^2$；

当 $t>2$，显然 $S(t)=1$。

解

$$S(t)=\begin{cases}0, & 当\ t\leqslant 0\ 时\\ \frac{t^2}{2}, & 当\ 0<t\leqslant 1\ 时\\ 1-\frac{(2-t)^2}{2} & 当\ 1<t\leqslant 2\ 时\\ 1 & 当\ t>2\ 时\end{cases}$$

例 11 当 $x \to 0$ 时,变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是(　)。

A. 无穷小　　　B. 有界的,但不是无穷小量

C. 无穷大　　　D. 无界的,但不是无穷大

分析 要知道无穷大量与无界变量之间是有区别的,无界变量不一定是无穷大量。

若取 $x_{1k}=\frac{1}{k\pi}$,则 $\frac{1}{x_{1k}^2}\sin\frac{1}{x_{1k}}=(k\pi)^2\sin k\pi=0$。

取 $x_{2k}=\frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi}$,则 $\frac{1}{x_{2k}^2}\sin\frac{1}{x_{2k}}=(2k+\frac{1}{2})^2\pi^2, k=1,2,\cdots$,

因此当 $k\to\infty$ 时,有 $x_{1k}\to 0$ 及 $x_{2k}\to 0$,但变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 或等于 0 或趋于 ∞,这表明当 $x\to 0$ 时,它是无界的,但不是无穷大,因而(D)项是正确的。

例 12 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量?

A. x^2　　　B. $1-\cos x$

C. $\sqrt{1-x^2}-1$　　D. $\tan x-\sin x$

分析 无穷小量 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量,是指 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,因此可选定 $\beta(x)=x^2$,把其它三项中的无穷小量作为 $\alpha(x)$,分别求出 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^2}$ 作比较即得。

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^2}=0$$

故选 D。

当 $x\to 0$,记住下列等价无穷小是有意义的。$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^{x}-1 \sim \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1 \sim \frac{1}{2}x^2$。

例 13 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n}$。

分析 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$,要把原题化为上述形式。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+1}\right)^{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-3}\cdot\frac{-3}{n+1}\cdot n}=e^{-3}$

我们把上述指数上的写法概括为"倒、倒、抄"。

例 14 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=9$,求常数 a。

分析 这是 1^{∞} 型可以利用"倒、倒、抄"方法。

解 $9=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2a}{x-a}\cdot x}$

$=e^{2a}$,于是 $a=\ln 3$。

例 15 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots\cdots+(n-1)}]$。

分析 先分别把根号里的和求出来,再利用有理化的方法。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots\cdots+(n-1)}]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 16 设 $x_1=1$，$x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ $(n=2,3,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$有极限,并求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$。

分析 单调有界数列必有极限,是重要的证明路线。

证 因为 $x_1=1$,且 $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,

所以 $0<x_n<2$,显然有$\{x_n\}$有界。以下仅需证$\{x_n\}$单调即可。

考虑 $x_{n+1}-x_n=\left(1+\frac{x_n}{1+x_n}\right)-\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)$

$$=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

所以 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1}同号。

而 $x_2=1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}>1=x_1$ 故 $x_{n+1}-x_n>0$,于是$\{x_n\}$单调增加，$\{x_n\}$有极限。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$， 则 $a=1+\frac{a}{1+a}$

解得 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (不合,舍去)

得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

例 17 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(2^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n+1}})$

分析 $2^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n+1}}=2^{\frac{1}{n+1}}(2^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1)=2^{\frac{1}{n+1}}(2^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)$

$$=2^{\frac{1}{n+1}}(e^{\ln2\cdot\frac{1}{n(n+1)}}-1)$$

注意到当 $x\to0$ 时,$e^x-1\sim x$,即可。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(2^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n+1}})=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot2^{\frac{1}{n+1}}(e^{\ln2\cdot\frac{1}{n(n+1)}}-1)$

$$=\lim_{n\to 0} n^2\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\ln 2$$

例 18 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}$

分析 当 $x\to\infty$ 时 $\sin\frac{2}{x}\sim\frac{2}{x}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\frac{2}{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+10}{5x^2+3x}=\frac{6}{5}$$

例 19 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]$

分析 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=-1$

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right]$

$=0+1=1$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right]=2-1=1$$

故原式 $=1$。

例 20 设 $a_n=\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$，$(x\geqslant 0)$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

分析 若 $0\leqslant x<1$ 结果是显然的；当 $x\geqslant 1$ 时，要分析 $\frac{x^2}{2}$ 与 x 哪一部分为主，即哪一部分为影响最后结果。

解 1. 若 $0\leqslant x<1$，则 $x^n\to 0$，且 $\frac{x^2}{2}<1$，$\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\to 0$，$(n\to+\infty)$，

于是 $1<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{3}\to 1 \quad (n\to+\infty)$,

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$;

2. 若 $x>\frac{x^2}{2}$,且 $x\geqslant 1$,即 $1\leqslant x<2$,则有

$$\sqrt[n]{x^n}\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3x^n},$$

对于常数 x,有

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3x^n}=x,$$

由夹逼性定理,得

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=x,\quad x\in[1,2);$$

3. 若 $\frac{x^2}{2}\geqslant x>1$,即 $x\geqslant 2$,有

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}$

得 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\frac{x^2}{2}, x\geqslant 2$

综上所述,得

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{x^2}{2}, & 2\leqslant x<+\infty。\end{cases}$$

例 21 设 $a>0, a_1>0, a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right), (n=1,2,\cdots)$

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。

(2) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$。

分析 这类题分两步走,其一是证序列单调有界,确准序列有