◎丛书主编：刘 强

北京名师导学

BEIJING MINGSHI DAOXUE

◎北大附中◎人大附中◎清华附中◎北师大附中

特级高级教师联合编写

初三 代数

● 基本目标要求
● 典型例题分析
● 教材内容分析
● 双基能力训练
● 双基知识导学
● 习题答案提示
● 疑难问题解析
● 中考仿真试题

九州出版社

前　言

本套丛书根据教育部颁布的各学科课程标准，依照人教版最新教材（高中部分还备有试验本教材的同步辅导用书），灵活处理教材内容，有的放矢，突出重点，结合学科的教学、实践，拓宽学生的认知背景，既指导学生对知识进行科学梳理，又给学生以“钥匙”，让学生自己打开“重点”、“难点”的大门，帮助学生掌握相应的学习方法。

本套丛书体现“以学生发展为本”的编写思想，书中每节（单元）主要设有【教材内容分析】、【中高考基本要求】、【双基知识导学】、【疑难问题解析】、【典型例题分析】、【双基能力训练】、【习题答案提示】等栏目。这些栏目涉及的主要内容是各章节所应掌握的基础知识、知识灵活运用、思维方法、解题思想、技巧等。理科各册除了每节设有这几个栏目外，在本章知识总结中还设有4个栏目【知识体系】、【注意问题】、【知识扩展】、【中高考真题选讲】。这4个栏目对于学生复习本章所学知识，具有很强的概括性。

本丛书自出版以来一直成为广大师生的良师益友，真正起到开卷有益、初读有趣、复读启迪、教学参考、学习助手的作用。

目 录

初三代数

第十二章　一元二次方程

【本章目标要求】

1. 了解一元二次方程的概念,掌握一元二次方程的解法.灵活运用一元二次方程的各种解法求方程的根;

2. 理解一元二次方程根的判别式,能运用它解决一些简单的问题,会列一元二次方程解应用题;

3. 掌握可化为一元二次方程的分式方程的解法,会验根;

4. 了解一元二次方程、二元二次方程组的概念;会用代入法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组;通过解二元二次方程组掌握"消元"、"降次"的数学方法;

*5. 掌握由一个二元二次方程和一个可分解为两个二元一次方程的方程组成的二元二次方程组的解法;

*6. 掌握一元二次方程根与系数的关系,会用它解决一些简单的问题;

*7. 了解无理方程的概念,掌握可化为一元二次方程的无理方程的解法,会验根.

【本章教材分析】

本章大体分为三部分:第一部分是有关一元二次方程的基础知识;第二部分是可化为一元二次方程的分式方程和无理方程;第三部分是简单的二元二次方程组.其主要内容是:一元二次方程的解法及其应用;一元二次方程的根的判别式;根与系数的关系;可化为一元二次方程的分式方程和无理方程的解法;简单的二元二次方程组的解法;以及由这些内容所反映出来的数学思想方法.

本章的重点是:(1)一元二次方程的解法;(2)可化为一元二次方程的分式方程和无理方程的解法;(3)列方程解应用题.

本章的难点是:(1)配方法;(2)列方程解应用题;(3)分式方程和无理方程的增根及验根问题.

学好本章的关键是熟练掌握一元二次方程的解法,特别是公式法

一元二次方程是中学数学的主要内容,在初中代数中占有重要的地位,本章知识的学习,在整个代数知识的学习中起着承上启下的作用.它既是对已学过的知识——实数、整式、分式、根式和一元一次方程的巩固和加深,又是为今后学习指数、对数、三角方程、不等式、函数等内容奠定基础.

12.1 一元二次方程

【学习目标要求】

1. 理解整式方程和一元二次方程的含义.

2. 知道一元二次方程的一般表达式,会把一元二次方程化成一般形式.

【中考基本要求】

1. 会判定一个方程是不是一元二次方程;

2. 能熟练地将一元二次方程化为一般形式,准确写出其各项系数.

【双基知识导学】

1. 整式方程:两边都是关于未知数的整式的方程叫整式方程

对这个定义的理解,应抓住方程两边"关于未知数的整式"这个特点,如:$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 是两边关于未知数 x 的整式,其中 a、b、c 是已知数,$\frac{b}{a}$ 是 x 的字母系数,$\frac{c}{a}$ 是常数项.

2. 一元二次方程:含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程

对一元二次方程的定义要从以下几个方面作深刻理解和认识:

(1)从未知数的个数看:含有一个未知数.像“关于 x 的方程 $x^2-3mx+(2m^2-mn-n^2)=0$”中未知数也只有一个,m、n 都应看作已知数.

(2)从未知数的次数看:未知数的最高次数是2,它与方程中做系数的字母的次数无关.

(3)从方程的解析式上看:是整式的方程.

(4)判断一个方程是否是一元二次方程,应在化简、整理后看是否符合上面三个特征.

3.一元二次方程的一般形式及项和项的系数的名称

任何关于 x 的一元二次方程均可整理成 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的形式,这种形式叫一元二次方程的一般形式,其中 ax^2 叫做二次项,a 叫做二次项系数;bx 叫做一次项,b 叫做一次项系数;c 叫做常数项,一次项系数 b 和常数项 c 可以是任何实数,二次项系数 a 是不等于0的实数,这是因为 a 等于0,方程就不是一元二次方程了.

【疑难问题解析】

1.关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程的条件是 $a\neq0$.

反过来,“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$”这个说法中则包含 $a\neq0$ 的条件.

2.确定一元二次方程各项及项的系数时,一定要将一元二次方程化为一般形式,这是因为 a、b、c 的值是在一般式的前提下确定的.另外不要丢掉项和项的系数所包括的符号.例如:方程 $5x-4x^2=1$,若化成 $4x^2-5x+1=0$,则二次项为 $4x^2$,二次项系数为4;一次项为 $-5x$,一次项系数为 -5;常数项为1,若化成 $-4x^2+5x-1=0$,则各项的系数的符号就全反了.

【典型例题分析】

例1 判断下列各式中,哪些是一元二次方程(其中 x 是未知数):

(1)$2x^2-x-3$;　　(2)$x^2-\pi=0$

(3)$4x^2-1=(2x+3)^2$;　　(4)$ax^2+bx+c=0$

(5)$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-6=0$；　　(6)$(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}-6=0$

(7)$(a^2+1)x^2-ax+5=0$；　　(8)$\frac{1}{\sqrt{3}}x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}x=2$

分析　根据一元二次方程定义，方程中含有一个未知数，未知数的最高次数是 2 的整式方程才是一元二次方程，而(1)是二次三项式，不是方程；(3)展开整理后是一元一次方程；(4)没有说明 $a\neq0$；(5)、(6)都不是整式方程；(7)中 $a^2+1\neq0$，它是一元二次方程；(2)与(8)是一元二次方程.

讲解　(2)，(7)，(8)是一元二次方程.

说明：解这类题要严格按照一元二次方程的定义来判断.

例 2　关于 x 的方程 $ax^m-bx-15=0$ 是一元二次方程的条件是________，是一元一次方程的条件是________.

分析　在整式方程的前提下，一元二次方程的条件是二次项系数不为 0 且未知数的最高次数是 2；一元一次方程的条件是一次项系数不为零，并且未知数的最高次数为 1.

讲解　原方程是一元二次方程的条件是$\begin{cases}a\neq0,\\m=2\end{cases}$

原方程是一元一次方程的条件是$\begin{cases}a=0,\\b\neq0\end{cases}$，或$\begin{cases}m=1\\a\neq b.\end{cases}$

说明："关于 x 的整式方程"这个说法中，包含一元二次方程和一元一次方程的两种情况，解题时应根据方程的形式对字母的取值加以讨论.

例 3　判断关于 x 的方程 $x^2-mx(2x-m+1)=x$ 是不是一元二次方程.如果是，指出其二次项系数，一次项系数及常数项.

分析　先把方程化为一般形式，再判断.

讲解　去括号，得 $x^2-2mx^2+m^2x-mx=x$

移项，合并同类项，得 $(1-2m)x^2+(m^2-m-1)x=0$

当 $1-2m=0$，即当 $m=\frac{1}{2}$，时，原方程为 $-\frac{4}{5}x=0$ 不是一元二次方程；

当 $1-2m\neq0$，即当 $m\neq\frac{1}{2}$ 时，原方程是一元二次方程，

其中二次项系数为 $1-2m$，一次项系数是 m^2-m-1，常数项

为0.

注意:1)审题时要特别注意题目的说法,例如:"已知关于 x 的方程 $(1-2m)x^2+(m^2-m-1)x=0$."与"已知关于 x 的二次方程 $(1-2m)x^2+(m^2-m-1)x=0$"是不同的,后者已知条件中隐含条件 $1-2m\neq0$.

2)判定一个方程是否是一元二次方程,一定要先把它化成一般形式,然后根据二次项系数是否为0来判定.也只有化成一般形式,才能指出它的二次项系数,一次项系数及常数项.

【双基能力训练】

(一)选择题:

1. 以下各方程中,一定是关于 x 的一元二次方程的是(　　).

(A) $ax^2+bx+c=0$　　(B) $2x^2+3x=2x(x-1)$

(C) $(k^2+1)x^2-2x=6$　　(D) $x^2-\frac{5}{x}+1=0$

2. 关于 x 的方程 $(a^2-3)x^2+(a-3)x+2a-1=0$ 是一元二次方程的条件是(　　)

(A) $a\neq0$　　(B) $a\neq3$

(C) $a\neq\sqrt{3}$　　(D) $a\neq\pm\sqrt{3}$

(二)判断题(对的打"√",错的打"×")

3. 判断下列方程是否关于 x 的一元二次方程

(1) $3x^2=2$(　　)

(2) $x^2=0$(　　)

(3) $ax+a^2x=7(a\neq0)$(　　)

(4) $bx+b^2=8(b\neq0)$(　　)

(5) $\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{2}{3}$(　　)

(6) $(m-2)x^2+6x+\frac{\sqrt{3}}{5}=0$(　　)

(三)填空题

4. 已知关于 x 的方程:① $x^2+5=(x-1)(x+4)$;② $x^2+4xy+4y^2=0$;③ $(m-3)x^2+4x+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$;④ $x^2+\frac{1}{x}-3=0$;⑤ x^2

$+\sqrt{x^2-1}-2=0$

其中是一元二次方程的是________(填序号)

5. 若关于 x 的方程 $ax^2+3x-2=2x^2$ 是一元二次方程,则 a 的取值范围是______________.

6. 关于 x 的方程.

$(k+3)(k-1)x^2+(k-1)x+5=0$ 是一元二次方程,则 k 的取值范围是______.

(四)解答题

7. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式,再写出它的二次项、二次项系数,一次项、一次项系数及常数项.

(1)$2y(y-3)=3(y+7)-4$

(2)$2x(x-3)=\sqrt{3}x^2+\sqrt{2}$.

【答案提示】

(一)1.C　2.D

(二)3.(1)√　(2)√　(3)×　(4)×　(5)×　(6)×

(三)4.②　(提示:②中只把 x 看成未知数,把 y 看成已知数)

5.$a\neq2$　6.$k\neq-3$ 且 $k\neq1$

(四)7. (1)一般形式是 $2y^2-9y-17=0$,二次项是 $2y^2$,二次项系数是 2,一次项是 $-9y$,一次项系数是 -9,常数项是 -17.

(2)一般形式是 $(2-\sqrt{3})x^2-6x-\sqrt{2}=0$,二次项是 $(2-\sqrt{3})x^2$,二次项系数是 $2-\sqrt{3}$,一次项是 $-6x$,一次项系数是 -6,常数项是 $-\sqrt{2}$.

12.2 一元二次方程的解法

【学习目标要求】

1. 初步掌握用直接开平方法解一元二次方程,会用直接开平方法解形如 $(x-a)^2=b\quad(b\geqslant0)$ 的方程;

2. 初步掌握用配方法解一元二次方程,会用配方法解数字系数的一元二次方程;

3. 掌握一元二次方程的求根公式的推导，能够运用求根公式解一元二次方程；

4. 会用因式分解法解某些一元二次方程.

【中考基本要求】

1. 会推导一元二次方程的求根公式；

2. 能灵活运用一元二次方程的四种解法求方程的解.

【双基知识导学】

1. 直接开平方法

(1)方程 $x^2=a(a\geqslant 0)$，则其解为 $\pm\sqrt{a}$，这种解一元二次方程的方法叫直接开平方法.

(2)直接开平方法的理论依据是平方根的意义.

(3)用直接开平方法求解的方程的特征是：方程的一边是一个含有未知数的式的平方，另一边是一个大于或等于零的常数(若为负数，则无实根)，形式如方程 $(ax+b)^2=c(c\geqslant 0)$.

2. 配方法

(1)设法将一元二次方程配成 $(x+m)^2=n$ 的形式，再利用直接开平方法求解，这种解一元二次方程的方法叫配方法.

(2)配方法重在“配”，其理论依据是公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，这里 a^2 相当于 x^2，$2ab$ 相当于一次项，$\pm 2b$ 就相当于一次项系数，因此，b^2 就是一次项系数一半的平方了.

(3)用配方法解一元二次方程的步骤.

①把原方程化为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的形式；

②方程两边同除以二次项系数，使二次项系数为 1，并把常数项移到方程右边；

③方程两边同时加上一次项系数一半的平方；

④方程左边写成完全平方式，右边化简为一个常数；

⑤用直接开平方法解方程.

3. 公式法

(1)用配方法将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 配成

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$后，若 $b^2-4ac\geqslant 0$，则方程的根为 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，这说明一元二次方程的根是由方程的系数 a、b、c 确定的，因此，把 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$叫一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0,b^2-4ac\geqslant 0)$的求根公式．用求根公式解一元二次方程的方法叫做公式法．

用公式法解一元二次方程，实际上就是给出 a、b、c 的数值(或表示式)，然后对代数式$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$进行求值(或化简)运算．

(2)用公式法解一元二次方程的一般步骤为：

①把方程化成一般形式，进而确定 a、b、c 的值(注意符号)；

②求出 b^2-4ac 的值(若 $b^2-4ac<0$，方程无实数根)；

③在 $b^2-4ac\geqslant 0$ 的前提下，把 a、b、c 的值代入公式进行计算，最后写出方程的根．

4．**因式分解法**

因式分解法是先使方程右边等于 0，把左边通过因式分解化为两个因式的积的形式，那么这两个因式中至少有一个等于 0，这样也达到了降次目的，转化为解一元一次方程了．

因式分解法是一元二次方程解法中应用较为广泛，又较简便的方法，它避免了套用公式的复杂计算，提高了解题速度和准确程度．因式分解法适用于能进行十字相乘或运用平方差公式或能提取公因式的一元二次方程．

在解一元二次方程中，最常用的方法是因式分解法和公式法．“配方法”是一种很重要的方法，求根公式就是用配方法推导的，在以后的学习中也经常用到它，但是用这种方法解一元二次方程较为繁琐，除特殊要求外，一般情况下都不用配方法解一元二次方程．

【疑难问题解析】

1．**用直接开平方法解方程要注意如下两点：**

(1)方程的两边应同时开平方，如方程 $(x+2)^2=3$，两边同时开

平方得 $x+2=\pm\sqrt{3}$，而不是 $x+2=\pm3$ 的错误结果.

(2)开方后，方程的一边应有“±”号，即有相等或互为相反数两种情况.

2. 用配方法解一元二次方程应注意两点：

(1)方程两边同时加上一次项系数一半的平方的前提是二次项系数为1.

(2)不要将完全平方公式用错，如 $x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{64}=\left(x+\frac{1}{8}\right)^2$ 而不是 $\left(x-\frac{1}{8}\right)^2$，也不是 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

用配方法解一元二次方程比较麻烦，在实际解一元二次方程中，一般不用配方法，但配方法是导出求根公式的关键，在以后学习中会常常用到它，所以应掌握这种方法.

3. 用公式法解一元二次方程时，需注意的几点：

(1)确定 a、b、c 值时，要注意符号，当 a、b、c 值为负数时，应连同负号代入公式进行运算. 如方程 $x^2-2x-4=0$ 的解为

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1}=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{2}=1\pm\sqrt{5}$$

(2)注意表示未知数的字母. 如方程 $t^2+2t=3$ 中“t”为未知数，其解为 $t_1=1$，$t_2=-3$，而不要习惯写成 $x_1=1$，$x_2=-3$.

(3)当 $b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根，而不要误认为只有一个实数根. 如方程 $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$，其解应写成 $x_1=x_2=\sqrt{2}$，而不可写成 $x=\sqrt{2}$.

(4)当方程的字母系数中已含有 a、b、c 字样时，在书写时应注意回避. 如解方程 $x^2-3ax+(2a^2-ab-b^2)=0$ 时，千万不能写成 $a=1$，$b=-3a$，$c=2a^2-ab-b^2$，否则就将一元二次方程一般式中的系数 a、b、c 与题中的字母系数相混淆. 正确的做法是：二次项系数为1，一次项系数为 $-3a$，常数项为 $2a^2-ab-b^2$，然后直接代入公式.

4. 使用因式分解法解一元二次方程要注意的几个问题：

(1)解方程时不能两边同时约去含未知数的代数式. 例如：解 $3x$

$(x+1)=x+1$ 时，两边不能约去 $x+1$，原因是：若 $x+1=0$ 时，方程两边约去 $x+1$，实际上就丢掉了 $x=-1$ 这个根. 正确的做法是，先移项，再提取公因式 $x+1$.

(2)因式分解法的前提是方程一边等于0. 当方程一边不为0时，常导出错误的答案. 如有的同学解 $t^2+2t=8$ 时，分解左边得 $t(t+2)=8$，于是得到 $t_1=2$，$t+2=4$，即 $t_1=2$，$t_2=2$ 的错误答案. 正确的做法是，先移项，再分解为 $(t+4)(t-2)=0$，从而得 $t_1=2$，$t_2=-4$.

【典型例题分析】

例1 用直接开平方法解方程 $(x-3)^2-144=0$.

讲解 (1)移项，得

$(x-3)^2=144$.

因为 $x-3$ 是144的平方根，所以

$x-3=\pm 12$,

即 $x-3=12$，或 $x-3=-12$.

$\therefore \quad x_1=15, x_2=-9$.

例2 用配方法解方程 $4x^2-8x=-3$.

讲解 移项，得

$$4x^2-8x+3=0.$$

把方程的两边都除以4，得

$$x^2-2x+\frac{3}{4}=0.$$

把常数项移到等号右边去，得

$$x^2-2x=-\frac{3}{4}.$$

方程左右两边都加上一次项系数一半的平方，得

$$x^2-2x+1=-\frac{3}{4}+1,$$

$$(x-1)^2=\frac{1}{4}.$$

用直接开平方法解这个方程，得

$$x-1=\pm\frac{1}{2},$$

即 $x_1=\frac{3}{2}, x_2=\frac{1}{2}$.

例 3 用公式法解方程 $\sqrt{2}x^2-2\sqrt{3}x+\sqrt{2}=0$.

讲解

$\because \quad a=\sqrt{2}, b=-2\sqrt{3}, c=\sqrt{2}$,

$b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=12-8=4$,

$\therefore \quad x=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{4}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \quad x_1=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, x_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

例 4 用因式分解法解方程 $(2-x)(x+3)=-6$.

讲解 原方程可化为

$x^2+x-12=0$,

$(x+4)(x-3)=0$,

$x+4=0$,或 $x-3=0$,

$\therefore \quad x_1=-4, x_2=3$.

例 5 用适当的方法解下列一元二次方程

(1) $16(x-5)^2-9=0$

(2) $x^2-4x-3596=0$

(3) $2(x-\sqrt{5})^2-3(\sqrt{5}-x)-14=0$

(4) $(y+2)(2y+3)=8$

分析 (1)本题宜用直接开平方法.

移项,得 $16(x-5)^2=9$

讲解 两边平方,得 $4(x-5)=\pm 3 \quad x-5=\pm\frac{3}{4}$

$\therefore x_1=5\frac{3}{4} \qquad x_2=4\frac{1}{4}$

【注意】 在利用直接开平方法时,要特别注意两边开平方后,右边应加上"±"号.

(2)本题显然用公式法和因式分解法时,计算量较大,不易求解,可采用配方法.