

高等学校用书

线性代数教程

俞南雁 编
蔡冠华 审
孙增光 审

东南大学出版社

线性代数教程

俞南雁 蔡冠华 编
孙增光 审

东南大学出版社

内 容 提 要

本书是根据高等学校工科数学课程指导委员会1987年制订的《教学基本要求》和国家教委研究生司1986年制订的硕士研究生入学考试《数学复习大纲》的要求，在使用多次的讲义的基础上编写而成。内容包括线性方程组和 n 维向量空间，行列式，矩阵运算，矩阵的相似对角化，二次型，线性空间与线性变换，欧氏空间，应用等八章。每节配有问题和习题两种练习，除第八章外每章有小结和综合题，书末并附有答案。

本书可作为高等院校工科、理科和经济管理各专业的教材，也可作为有关专业高等教育自学考试教材或参考书。

责任编辑 徐步政

线 性 代 数 教 程

俞南雁 蔡冠华 编

东南大学出版社出版

(南京四牌楼2号)

江苏省新华书店发行 南京人民印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张16 11/16 字数389000

1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

印数：1—8000册

ISBN 7-81023-108-1

0·22

定价：2.75元
3.35

前 言

本书是编者在东南大学多次讲授工科线性代数的讲义基础上,根据1987年高等学校工科数学课程指导委员会制订的《线性代数教学基本要求》和1986年国家教委研究生司制订的硕士研究生入学考试《数学复习大纲》的要求修订而成的。

全书内容分两大部分,前五章为基本部分,教学时数为32~40;后三章为提高部分,供要求较高、学时较多的院校或专业选用,教学时数为20~24。 n 维向量空间 F^n 在前五章中扮演“框架”的角色,使行列式、矩阵的秩、线性方程组解的结构、矩阵的特征值和相似对角化及二次型化简等一系列基本内容井然有序。 F^n 在第六、七章中则起着“台阶”和“模型”的作用。

为了既能具有适当的理论深度又能便于理解,本书对一些重点和难点的内容作了有特色的处理。例如:对于线性相关性这个线性代数中最重要的概念和难点,采取了一开始就先讲消元法,把 s 个 n 维向量线性相关与否的问题,转化为某个线性齐次方程组有无非零解的问题,使它较为具体,以便读者顺利过“关”,并逐步了解线性结构的真谛。再如:对于矩阵的秩这个很关键的内容,先后从行秩、列秩和行列式秩三个侧面进行讨论,严格地得出三秩合一的结论以及求基列或基行的方法。此外,对于可逆线性变换与坐标变换、矩阵的特征值及相似对角化,实二次型的不变量及主轴问题等内容的叙述,也具有一定特色。

与现行统编教材相比,本书另一特点是写得比较详尽。这主要是考虑到该课程对理工科大学各专业的重要性及学时偏紧的情况下学生钻研教材的迫切需要;这也符合自学读者的需要。

本书第八章专门介绍线性代数在多方面的初步应用,可以穿插到有关章节去讲解或作为学生的课外阅读材料。此章内容虽不在基本要求之内,但根据我们的体验,对于提高同学们的学习兴趣,拓宽知识面和培养自学能力都是有益的。

本书每节(大约2学时授一节)均配有问题和习题两种练习,除第八章外各章末还配有若干综合性的杂题。打星号的题表示有一定的难度或配合正文中打*号的内容。书末附有习题的答案或提示。为方便读者自学,第1~7章还编写了较为详细的小结。

本书主审人为上海交通大学数学系孙增光教授,他以八六高龄细致地审订了全部书稿,提出了许多宝贵的指导性意见;本书从编写讲义到修订成书的过程中,还得到了东南大学数力系戴昌国教授的指点和张明淳副教授的许多具体帮助;此外,周建华、董梅芳、包锡良等同志也曾给予协助,在此一并致以衷心的感谢。

本书第三章由蔡冠华编写,其余各章由俞南雁编写,全书由俞南雁修改定稿。限于水平,不妥或谬误之处在所难免,敬请广大读者和同仁前辈批评指正。

编者

一九八八年四月

记号说明

记号	含 义 说 明
\square	表示一个定理或命题证明完毕(在上下文区分不明显时使用)
$\forall a$	一切 a , 或对一切 a
$\{X X \text{ 具有性质 } p\}$	具有性质 p 的元素 X 全体之集合
$p \Rightarrow q$	条件 p 蕴含条件 q (由 p 可推出 q)
$p \Leftrightarrow q$	条件 p 与条件 q 互相蕴含(p 的充要条件是 q)
$p \triangleq q$	用 q 来定义 p
Q, R, C	分别表示: 有理数域, 实数域, 复数域
F	泛指某个数域
$F^n (R^n, C^n)$	数域 F 上 n 维向量空间
$F^{m \times n}$	数域 F 上 $m \times n$ 矩阵全体之集合(一线性空间)
$r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$	第一种初等行变换、列变换
$kr_i, kc_i, (k \neq 0)$	第二种初等行变换、列变换
$r_i + kr_j, c_i + kc_j$	第三种初等行变换、列变换
$A \rightarrow B$	矩阵 A 由初等变换化为 B
$\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$	由向量组 a_1, a_2, \dots, a_n 生成的空间
$\dim W$	(子)空间 W 的维数
e_1, e_2, \dots, e_n	F^n 的基本向量组, 即自然基
LS	线性方程组
$LS(B)$	以 B 为增广矩阵的 LS
LH	线性齐次方程组
$LH(A)$	以 A 为系数矩阵的 LH
S_A	$LH(A)$ 的解集(解空间)
$(I) \approx (II)$	表示(I)、(II)两个向量组等价

记号	含 义 说 明
$A \rightarrow B \quad A \approx B$	矩阵 A 与 B 等价 (相抵), 即 $A \rightarrow B$
$A \sim B$	矩阵 A 和 B 相似, 即有可逆阵 P 使 $P^{-1}AP = B$
$A \approx B$	矩阵 A 和 B 相合, 即有可逆阵 P 使 $P'AP = B$
D' 或 D^T	行列式 D 的转置行列式
A' 或 A^T	矩阵 A 的转置矩阵
$\det A$ 或 $ A $	方阵 A 的行列式
$\text{tr} A$	方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 的迹, $\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$
$\text{rank}(\mathbf{I})$ 或 $r(\mathbf{I})$	向量组 (\mathbf{I}) 的秩
$\text{rank} A$ 或 $r(A)$	矩阵 A 的秩
$r(X'AX)$	二次型 $X'AX$ 的秩, $r(X'AX) \triangleq r(A)$
A^{-1}	方阵 A 的逆矩阵
A^*	方阵 A 的伴随矩阵
δ_{ij}	Kronecker 符号: $\delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
E_n, E	单位阵 $E = [\delta_{ij}]_{n \times n}$
$I_{m \times n}^{(r)}$	秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵的等价标准形
$P_{ij}, P_i(k), P_{ij}(k)$	三种初等方阵

记号	含 义 说 明
$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$	对角阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$
$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_r)$	分块对角阵 $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$
$\langle X, Y \rangle$	向量 X 与 Y 的内积 ($X, Y \in R^n$ 或欧氏空间)
$X \perp Y$	向量 X 与 Y 正交 ($X, Y \in R^n$ 或欧氏空间)
$\ X\ $	向量 X 的长度: $\ X\ = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ ($X \in R^n$ 或欧氏空间)
$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ $= (a_1, a_2, \dots, a_n)P$	P 是基 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 到基 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 的过渡矩阵
$(T\alpha_1, T\alpha_2, \dots, T\alpha_n)$ $= (a_1, a_2, \dots, a_n)A$	A 是线性变换 $T: V \rightarrow V$ 的在基 a_1, a_2, \dots, a_n 下的矩阵
$(T\alpha_1, T\alpha_2, \dots, T\alpha_n)$ $= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)A$	A 是线性映射 $f: V \rightarrow W$ 在取定基下的矩阵 (n 维) (m 维)
$F_1^{n \times n}$	线性空间 $F^{n \times n}$ 中全体对称阵所成的子空间
$F_A^{n \times n}$	线性空间 $F^{n \times n}$ 中全体反对称阵所成的子空间
$F_T^{n \times n}$	线性空间 $F^{n \times n}$ 中全体上三角阵所成子空间
$C[a, b]$	区间 $[a, b]$ 上全体实值连续函数所成线性空间 (线性运算通常)
$C(a, b)$	区间 (a, b) 上全体一次连续可微实值函数所成线性空间 (线性运算通常)

记号	含 义 说 明
$F[x]$	数域 F 上全体多项式所成线性空间(线性运算通常)
$F[x]_n$	数域 F 上次数小于 n 的多项式全体所成(n 维)线性空间(线性运算通常)
$V_1 \oplus V_2$	子空间 V_1 与 V_2 之和: $V_1 + V_2 = \{r \mid r = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$
$V_1 \cap V_2$	子空间 V_1 与 V_2 之交: $V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1 \text{ 且 } \alpha \in V_2\}$
$V_1 \oplus V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的直和($V_1 \cap V_2 = \{0\}$)
$V_A, \text{Range}(A)$	线性映射 $Y = AX$ 的值域, 象子空间: $\{Y \mid Y = AX, X \in F^n\}$
$N_A, \text{Ker}(A)$	线性映射 $Y = AX$ 的核: $\{X \mid AX = 0\}$
$f(V), \text{Range } f$	线性映射 $f: V \rightarrow W$ 的值域, 象子空间: $\{\beta \mid \beta = f(\alpha), \alpha \in V\}$
$\text{Ker } f$	线性映射 $f: V \rightarrow W$ 的核: $\{\alpha \mid f(\alpha) = 0, \alpha \in V\}$
$\text{rank } f$	线性映射 $f: V \rightarrow W$ 的秩, 即 $\dim f(V)$
$\text{null } f$	线性映射 $f: V \rightarrow W$ 的亏, 即 $\dim \text{Ker } f$

目 录

第一章 线性方程组与n维向量空间	(1)
§ 1.1 消元法	(1)
1.1.1 线性方程组 向量和矩阵	
1.1.2 消元法	
问题1.1 习题1.1	
§ 1.2 n 维向量空间 F^n	(27)
1.2.1 线性运算与 n 维向量空间 F^n	
1.2.2 线性组合和线性表示	
1.2.3 向量组的线性相关性	
问题1.2 习题1.2	
§ 1.3 F^n 的子空间 维数和基	(45)
1.3.1 向量组的秩	
1.3.2 子空间与生成元	
1.3.3 维数 基和坐标	
问题1.3 习题1.3	
§ 1.4 矩阵的秩	(62)
1.4.1 行秩和列秩	
1.4.2 等价标准形 矩阵的秩	
1.4.3 线性方程组的相容性判别定理	
问题1.4 习题1.4	
§ 1.5 线性方程组解的结构	(80)

- 1.5.1 LH 解的结构 基础解系
- 1.5.2 LS 解的结构 求通解的步骤
- 习题1.5 习题1.5

本章小结 杂题一

第二章 行列式..... (102)

§ 2.1 n 阶行列式的定义和性质.....(102)

- 2.1.1 排列的逆序数
- 2.1.2 n 阶行列式的定义
- 2.1.3 n 阶行列式的性质
- 问题2.1 习题2.1

§ 2.2 按行(列)展开与计算技巧.....(125)

- 2.2.1 按一行或一列展开
- 2.2.2 按 k 行或 k 列展开
- 2.2.3 计算技巧
- 问题2.2 习题2.2

§ 2.3 克莱姆法则和矩阵的行列式秩.....(148)

- 2.3.1 克莱姆法则
- 2.3.2 矩阵的秩与行列式的关系
- 问题2.3 习题2.3

本章小结 杂题二

第三章 矩阵运算..... (170)

§ 3.1 加法、数乘及乘法 (170)

- 3.1.1 矩阵的加法及数与矩阵的乘法
- 3.1.2 矩阵的乘法
- 3.1.3 转置矩阵 几种特殊矩阵
- 问题3.1 习题3.1

§ 3.2 逆阵 (187)

3.2.1 方阵乘积的行列式

3.2.2 逆阵

3.2.3 逆阵的运算性质

问题3.2 习题3.2

§ 3.3 分块阵与初等阵 (201)

3.3.1 分块阵

3.3.2 分块阵用于研究矩阵的秩

3.3.3 初等阵 用初等变换求逆阵

问题3.3 习题3.3

§ 3.4 F^n 的线性变换与坐标变换 (221)

3.4.1 F^n 的线性变换

3.4.2 过渡矩阵与坐标变换

问题3.4 习题3.4

本章小结 杂题三

第四章 矩阵的相似对角化 (238)

§ 4.1 矩阵的特征值和特征向量 (238)

4.1.1 基本概念

4.1.2 特征值的性质

4.1.3 特征向量的性质及计算

问题4.1 习题4.1

§ 4.2 R^n 中的内积与正交性 (257)

4.2.1 R^n 中的内积、长度和交角

4.2.2 正交向量组及施密特过程

4.2.3 正交矩阵及 R^n 的正交变换

问题4.2 习题4.2

§ 4.3 实对称矩阵正交相似于实对角阵 (275)

4.3.1 实对称矩阵的特征值与特征向量

4.3.2 实对称矩阵正交相似于实对角阵

问题4.3 习题4.3

本章小结 杂题四

第五章 二次型 (295)

§ 5.1 二次型及其化简 (295)

5.1.1 二次型及其矩阵

5.1.2 相合与标准形

5.1.3 用可逆线性变换化简二次型

问题5.1 习题5.1

§ 5.2 实二次型 (314)

5.2.1 用正交变换化简实二次型(主轴问题)

5.2.2 惯性定理

5.2.3 正定性及其判别法

问题5.2 习题5.2

本章小结 杂题五

第六章 线性空间与线性变换 (338)

§ 6.1 线性空间 维数和基 (338)

6.1.1 线性空间的定义和例子

6.1.2 线性相关性 有限维与无限维

6.1.3 坐标随基的改变

问题6.1 习题6.1

§ 6.2 子空间 (353)

6.2.1 概念和例子

6.2.2 子空间的交与和

6.2.3 子空间的直和

问题6.2 习题6.2

§ 6.3 线性映射与线性变换 (368)

6.3.1 线性映射与线性变换

6.3.2 值域与核

6.3.3 线性空间的同构

问题6.3 习题6.3

§ 6.4 线性变换的矩阵 (382)

6.4.1 线性映射的矩阵

6.4.2 线性变换的矩阵随基的改变

6.4.3 线性变换的特征值与特征向量

问题6.4 习题6.4

本章小结 杂题六

第七章 欧氏空间 (399)

§ 7.1 欧氏空间的基本概念 (399)

7.1.1 内积、长度、交角与正交性

7.1.2 度量矩阵

问题7.1 习题7.1

§ 7.2 欧氏空间中的几个基本问题 (412)

7.2.1 正交规范基

7.2.2 欧氏空间的同构

7.2.3 正交补

7.2.4 正交变换

问题7.2 习题7.2

本章小结 杂题七

第八章 线性代数的一些应用 (436)

§ 8.1 矩阵和线性方程组的应用..... (436)

8.1.1 通讯和交通网络

8.1.2 关联矩阵及电网络方程式

8.1.3 经济学中的数学模型

问题8.1 习题8.1

§ 8.2 矩阵相似对角化的应用..... (450)

8.2.1 常系数线性齐次差分方程组的解

8.2.2 常系数线性齐次微分方程组的解

8.2.3 线性系统的稳定性

问题8.2 习题8.2

§ 8.3 实二次型理论的应用..... (461)

8.3.1 多元函数极值的充分条件

8.3.2 二次曲面方程的化简

问题8.3 习题8.3

§ 8.4 内积与正交性理论的应用..... (471)

8.4.1 不相容线性方程组的最小二乘解

8.4.2 曲线拟合

问题8.4 习题8.4

习题及杂题答案..... (481)

第一章 线性方程组与 n 维向量空间

线性方程组是线性代数最古老、最基本、最重要的问题之一。

本章首先叙述线性方程组的解法，接着讨论 n 维向量空间的基本理论和矩阵的秩，最后阐明线性方程组相容性的判别和解的结构。

§1.1 消元法

先介绍一些基本概念，再叙述消元法。

1.1.1 线性方程组 向量和矩阵

定义1 如果数的集合 F 包含数0和1，并且 F 中任何两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍在 F 中，那么就称 F 是一个数域。

容易验证全体有理数之集 Q ，全体实数之集 R ，全体复数之集 C 都是数域，我们分别称之为有理数域，实数域和复数域。这是三个最重要最常用的数域。可以证明任何一个数域都包含有理数域，即 Q 是“最小的数域”。

同样容易验证全体整数之集，全体正实数之集，全体无理数之集等都不是数域。事实上，第一个数集对除法不封闭，第二个数集中不含0，第三个数集对加法不封闭。

线性代数的一些问题常与数域有关，这时必须交待或弄清

是在什么数域上考虑问题。当不需要强调某个特定数域时，本书常用“数域 F ”来泛指任一个数域，或者不作交待。

现在转到线性方程组上来。线性方程组就是一次方程组。一般的线性方程组形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

其中 x_1, x_2, \dots, x_n 是未知量， a_i 代表它是第 i 个方程中 x_j 的系数，方程右端的数 b_1, b_2, \dots, b_m 称为常数项。当所有系数和常数项都属于数域 F 时，就称(1)是数域 F 上的线性方程组。方程的个数 m 可以等于、小于或大于未知量个数 n 。

如果 x_1, x_2, \dots, x_n 分别用数 k_1, k_2, \dots, k_n 代替后，(1)中的每个方程都变成恒等式，就说有序数组 (k_1, k_2, \dots, k_n) 是方程组(1)的一个解。解的全体所成的集合称为解集，而能代表解集中任一元的表达式称为通解。若任一组数代替 x_1, x_2, \dots, x_n 后都不能使(1)的每一个方程成为恒等式，那么就说(1)无解，或不相容。

如果两个方程组的解集相同，就称这两个方程组同解。

特别，若在(1)中常数项全为零，即方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

称为线性齐次方程组。相反，若(1)的常数项不全为零，则称