高等学校用书

线性代数教程

俞南雁
蔡冠华 编
孙增光 审

东南大学出版社

线性代数教程

俞南雁　蔡冠华　编
孙增光　　　　　审

东南大学出版社

内 容 提 要

本书是根据高等学校工科数学课程指导委员会1987年制订的《教学基本要求》和国家教委研究生司1986年制订的硕士研究生入学考试《数学复习大纲》的要求，在使用多次的讲义的基础上编写而成。内容包括线性方程组和 n 维向量空间，行列式，矩阵运算，矩阵的相似对角化，二次型，线性空间与线性变换，欧氏空间，应用等八章。每节配有问题和习题两种练习，除第八章外每章有小结和综合题，书末并附有答案。

本书可作为高等院校工科、理科和经济管理各专业的教材，也可作为有关专业高等教育自学考试的教材或参考书。

责任编辑　徐步政

线性代数教程

俞南雁　蔡冠华　编

东南大学出版社出版

（南京四牌楼2号）

江苏省新华书店发行　　南京人民印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　印张16　11/16　字数389000

1988年8月第1版　　1988年8月第1次印刷

印数：1—8000册

ISBN 7-81023-108-1

O·22　　定价：~~2.75元~~ 3.35

前　言

本书是编者在东南大学多次讲授工科线性代数的讲义基础上，根据1987年高等学校工科数学课程指导委员会制订的《线性代数教学基本要求》和1986年国家教委研究生司制订的硕士研究生入学考试《数学复习大纲》的要求修订而成的。

全书内容分两大部分：前五章为基本部分，教学时数为32～40；后三章为提高部分，供要求较高、学时较多的院校或专业选用，教学时数为20～24。n维向量空间F^n在前五章中扮演"框架"的角色，使行列式、矩阵的秩、线性方程组解的结构、矩阵的特征值和相似对角化及二次型化简等一系列基本内容井然有序。F^n在第六、七章中则起着"台阶"和"模型"的作用。

为了既能具有适当的理论深度又能便于理解，本书对一些重点和难点的内容作了有特色的处理。例如：对于线性相关性这个线性代数中最重要的概念和难点，采取了一开始就先讲消元法，把s个n维向量线性相关与否的问题，转化为某个线性齐次方程组有无非零解的问题，使它较为具体，以便读者顺利过"关"，并逐步了解线性结构的真谛。再如：对于矩阵的秩这个很关键的内容，先后从行秩、列秩和行列式秩三个侧面进行讨论，严格地得出三秩合一的结论以及求基列或基行的方法。此外，对于可逆线性变换与坐标变换、矩阵的特征值及相似对角化，实二次型的不变量及主轴问题等内容的叙述，也具一定特色。

与现行统编教材相比，本书另一特点是写得比较详尽。这主要是考虑到该课程对理工科大学各专业的重要性及学时偏紧的情况下学生钻研教材的迫切需要；这也符合自学读者的需要。

本书第八章专门介绍线性代数在多方面的初步应用，可以穿插到有关章节去讲解或作为学生的课外阅读材料。此章内容虽不在基本要求之内，但根据我们的体验，对于提高同学们的学习兴趣，拓宽知识面和培养自学能力都是有益的。

本书每节(大约2学时授一节)均配有问题和习题两种练习，除第八章外各章末还配有若干综合性的杂题。打星号的题表示有一定的难度或配合正文中打*号的内容。书末附有习题的答案或提示。为方便读者自学，第1～7章还编写了较为详细的小结。

本书主审人为上海交通大学数学系孙增光教授，他以八六高龄细致地审订了全部书稿，提出了许多宝贵的指导性意见；本书从编写讲义到修订成书的过程中，还得到了东南大学数力系戴昌国教授的指点和张明淳副教授的许多具体帮助；此外，周建华、董梅芳、包锡良等同志也曾给予协助，在此一并致以衷心的感谢。

本书第三章由蔡冠华编写，其余各章由俞南雁编写，全书由俞南雁修改定稿。限于水平，不妥或谬误之处在所难免，敬请广大读者和同仁前辈批评指正。

编　者

一九八八年四月

记号说明

记号	含义说明
$\square$	表示一个定理或命题证明完毕（在上下文区分不明显时使用）
$\forall a$	一切a，或对一切a
$\{X \mid X$具有性质$p\}$	具有性质p的元素X全体之集合
$p \Rightarrow q$	条件p蕴含条件q（由p可推出q）
$p \Longleftrightarrow q$	条件p与条件q互相蕴含（p的充要条件是q）
$p \triangleq q$	用q来定义p
Q，R，C	分别表示：有理数域，实数域，复数域
F	泛指某个数域
$F^n(R^n, C^n)$	数域$F(R, C)$上n维向量空间
$F^{m \times n}$	数域F上$m \times n$矩阵全体之集合（一线性空间）
$r_i \leftrightarrow r_j$，$c_i \leftrightarrow c_j$	第一种初等行变换、列变换
kr_i，kc_i，$(k \neq 0)$	第二种初等行变换、列变换
$r_i + kr_j$，$c_i + kc_j$	第三种初等行变换、列变换
$A \to B$	矩阵A由初等变换化为B
$\mathrm{span}\{a_1, a_2, \cdots a_t\}$	由向量组$a_1, a_2, \cdots, a_t$生成的空间
$\dim W$	（子）空间W的维数
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$	F^n的基本向量组，即自然基
LS	线性方程组
$LS(B)$	以B为增广矩阵的LS
LH	线性齐次方程组
$LH(A)$	以A为系数矩阵的LH
S_A	$LH(A)$的解集（解空间）
（Ⅰ）$\approx$（Ⅱ）	表示（Ⅰ）、（Ⅱ）两个向量组等价

记　号	含　义　说　明
$A\to B$　$A\approx B$	矩阵A与B等价(相抵)，即$A\to B$
$A\sim B$	矩阵A和B相似，即有可逆阵P使 $P^{-1}AP=B$
$A\simeq B$	矩阵A和B相合，即有可逆阵P使 $P'AP=B$
D'或D^T	行列式D的转置行列式
A'或A^T	矩阵A的转置矩阵
$\det A$或$\|A\|$	方阵A的行列式
$\mathrm{tr}A$	方阵$A=[a_{ij}]_{n\times n}$的迹，$\mathrm{tr}A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$
$\mathrm{rank}(\mathrm{I})$或$r(\mathrm{I})$	向量组(Ⅰ)的秩
$\mathrm{rank}A$或$r(A)$	矩阵A的秩
$r(X'AX)$	二次型$X'AX$的秩，$r(X'AX)\triangleq r(A)$
A^{-1}	方阵A的逆矩阵
A^*	方阵A的伴随矩阵
δ_{ij}	Kronecker符号：$\delta_{ij}\triangleq\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$
E_n, E	单位阵$E=[\delta_{ij}]_{n\times n}$
$I_{m\times n}^{(r)}$	秩为r的$m\times n$矩阵的等价标准形
P_{ij}, $P_i(k)$, $P_{ij}(k)$	三种初等方阵

记　号	含　义　说　明
$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	对角阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$
$\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_s)$	分块对角阵 $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$
$\langle X, Y\rangle$ $X\perp Y$	向量X与Y的内积($X,Y,\in R^n$或欧氏空间) 向量X与Y正交($X,Y\in R^n$或欧氏空间)
$\Vert X\Vert$	向量X的长度：$\Vert X\Vert=\sqrt{\langle X,X\rangle}$ ($X\in R^n$或欧氏空间)
$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ $=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$	P是基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$到基$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 的过渡矩阵
$(T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_n)$ $=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$	A是线性变换$T:V\to V$的在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ α_n下的矩阵
$(T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_n)$ $=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A$	A是线性映射$f:\underset{(n维)}{V}\to\underset{(m维)}{W}$在取定基下的矩阵
$F_s^{n\times n}$ $F_A^{n\times n}$ $F_T^{n\times n}$	线性空间$F^{n\times n}$中全体对称阵所成的子空间 线性空间$F^{n\times n}$中全体反对称阵所成的子空间 线性空间$F^{n\times n}$中全体上三角阵所成子空间
$C[a,b]$	区间$[a,b]$上全体实值连续函数所成线性空间(线性运算通常)
$C(a,b)$	区间(a,b)上全体一次连续可微实值函数所成线性空间(线性运算通常)

记　号	含　义　说　明
$F[x]$	数域F上全体多项式所成线性空间(线性运算通常)
$F[x]_n$	数域F上次数小于n的多项式全体所成(n维)线性空间(线性运算通常)
$V_1 \oplus V_2$	子空间V_1与V_2之和：$V_1+V_2=\{r \mid r=\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$
$V_1 \cap V_2$	子空间V_1与V_2之交：$V_1 \cap V_2 \triangleq \{\alpha \mid \alpha \in V_1 且 \alpha \in V_2\}$
$V_1 \oplus V_2$	子空间V_1与V_2的直和($V_1 \cap V_2=\{0\}$)
V_A, $\mathrm{Range}(A)$	线性映射　$Y=AX$的值域，象子空间：$\{Y \mid Y=AX, X \in F^n\}$
N_A, $\mathrm{Ker}(A)$	线性映射　$Y=AX$的核：$\{X \mid AX=0\}$
$f(V)$, $\mathrm{Range}\, f$	线性映射　$f: V \to W$的值域，象子空间：$\{\beta \mid \beta=f(\alpha), \alpha \in V\}$
$\mathrm{Ker}\, f$	线性映射　$f: V \to W$的核：$\{\alpha \mid f(\alpha)=0, \alpha \in V\}$
$\mathrm{rank}\, f$	线性映射　$f: V \to W$的秩，即$\dim f(V)$
$\mathrm{null}\, f$	线性映射　$f: V \to W$的亏，即$\dim \mathrm{Ker} f$

目　　录

第一章 线性方程组与n维向量空间

线性方程组是线性代数最古老、最基本、最重要的问题之一。

本章首先叙述线性方程组的解法，接着讨论 n 维向量空间的基本理论和矩阵的秩，最后阐明线性方程组相容性的判别和解的结构。

§1.1 消 元 法

先介绍一些基本概念，再叙述消元法。

1.1.1 线性方程组 向量和矩阵

定义1 如果数的集合F包含数0和1，并且F中任何两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍在F中，那么就称F是一个**数域**。

容易验证全体有理数之集Q，全体实数之集R，全体复数之集C都是数域，我们分别称之为**有理数域**，**实数域**和**复数域**。这是三个最重要最常用的数域。可以证明任何一个数域都包含有理数域，即Q是“最小的数域”。

同样容易验证全体整数之集，全体正实数之集，全体无理数之集等都不是数域。事实上，第一个数集对除法不封闭，第二个数集中不含0，第三个数集对加法不封闭。

线性代数的一些问题常与数域有关，这时必须交待或弄清

是在什么数域上考虑问题。当不需要强调某个特定数域时，本书常用"数域F"来泛指任一个数域，或者不作交待。

现在转到**线性方程组**上来。线性方程组就是一次方程组。一般的线性方程组形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

其中$x_1, x_2, \cdots, x_n$是**未知量**，a_{ij}代表它是第i个方程中x_j的**系数**，方程右端的数$b_1, b_2, \cdots, b_m$称为**常数项**。当所有系数和常数项都属于数域F时，就称(1)是数域F上的线性方程组。方程的个数m可以等于、小于或大于未知量个数n。

如果$x_1, x_2, \cdots, x_n$分别用数$k_1, k_2, \cdots, k_n$代替后，(1)中的每个方程都变成恒等式，就说有序数组$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$是方程组(1)的一个**解**。解的全体所成的集合称为**解集**，而能代表解集中任一元的表达式称为**通解**。若任一组数代替$x_1, x_2, \cdots, x_n$后都不能使(1)的每一个方程成为恒等式，那么就说(1)**无解**，或**不相容**。

如果两个方程组的解集相同，就称这两个方程组**同解**。

特别，若在(1)中常数项全为零，即方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

称为**线性齐次方程组**。相反，若(1)的常数项不全为零，则称