科學圖書大庫

大氣與海洋交互作用

譯者 曲克恭

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

大氣與海洋交互作用

譯者 曲克恭

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧鍙　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十七年三月二十八日初版

大氣與海洋交互作用

基本定價　2.60

譯者　曲克恭　美國天主教大學大氣科學碩士

(63)局版臺業字第0116號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第１５７９５號
承印者　大興圖書印製有限公司三重市三和路四段一五一號　電話9719739

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尙有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鋰氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，擧凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

玆特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛擧是禱！

徐氏基金會、敬啓

中華民國六十四年九月

前　言

本書乃因邁阿密大學之海洋與大氣科學院爲攻讀氣象學、物理海洋學以及偶然爲物理或工程之研究生所開「大氣與海洋交互作用」課程而編成。由於教學相長，本人從多方面獲得協助，特別感謝吾友 Claes Rooth 對偶然不能爲本人立刻理解之論題所做之鼓勵性討論以及 Dr. R. W. Burling 對原稿之詳盡推究。同時感激 Dr. J. Pedlosky，Dr. H. Gordon and Dr. R. Long 等三位對各章之批評建議，尤其是 Professor P. Sheppard 對全書細心的編輯。

自抵美國以後，本人之研究工作由國家科學基金會支助已歷十餘年，本人不但感謝其支助，而且感謝基金會官員 Dr. F. White，Dr. E. Bierly and Dr. F. Eden 處理有關本人業務時之愉快，簡便而鼓舞之方式。

本書所引用之原始圖表由以下數位惠予提供：Dr. D. C. Blanchard（圖 2.4 及 2.5），E. L. Deacon（圖 3.1），Dr. P. Saunders（圖 3.2），Dr. M. Migake（圖 5.1），Dr. L. Hasse（圖 5.2），Dr. K. Brocks（圖 5.3 及 5.5），Dr. B. Miller（圖 5.4），Dr. R. A. Brown（圖 6.3），Dr. Ooyama（圖 7.3），Dr. Leipper（圖 7.6）及 Dr. Geisler（圖 7.7 及 7.8）。

因不欲使此前言過長，本人不能將各方面協助者之大名一一列舉，但是極願提及 Mrs. Judith，她極有耐心的將原稿分開再三的重複打字。

E.B.K.

緒　言

「上帝就造出空氣，將空氣以下的水、空氣以上的水分開了，事就這樣成了。」（創世紀第一章）。最初的條件並未曾制止隨時間的發展，因而熱力學定律迫使水通過分開此二領域的交界面。但並非僅水是如此，海面區域似一層薄膜，使許多物質在我們地球上這一個系統中循環時有一定的速率。海面亦可輸送能量，除潮汐以外，幾乎海洋中的各種運行皆由大氣影響直接或間接的推動。相反的，海洋中之潛熱却又成爲大氣環流大部份中之燃料。事實上，如果沒有對其共同邊界所扮演之角色有所認識，很不可能解釋此三種介質之狀況。

Sverdrup （1945）在其「氣象人員海洋學」一書之前言中曾述及一本書之必要，從這一本書中「一位氣象人員即可獲得涉及大氣問題之各有關物理海洋學所發現之資料。」Sverdrup 之書在二十五年前即已滿足此種需求。從此風產生海面波與海面上下之擾動輸送等新的觀念皆由實驗室之試驗以及由有系統的應用波譜分析所模擬。電子計算機之發展可以經常用數值積分非綫性之運動方程式，此爲計量有限振幅之擾動與增進瞭解諸如風生成海洋環流之非對稱性，大範圍成層海洋對風暴之感應或海洋之熱量供應對維持颱風之作用等等的先決條件。另一方面之發展，如海洋觀測資料之不斷累積與探測新工具之發明（例如遙感衛星 remote-sensing satellites），業已發現新的而未預料之特殊形態。

對讀者言，關於海面及其鄰近區域之物理學亦有所改變。Sverdrup 當時僅對許多二次世界大戰期間及大戰以前接受過訓練的氣象人員講述他的書，他不必爲當時極少數的海洋學家寫一本書，可能他本人都認識他們，而這些海洋學家最初也是接受氣象訓練的。之後，物理海洋學家之數量日增，但是通常爲海洋學家所寫之書雖亦增加，但皆未包括對海洋上方空氣行爲有系統的資料。因爲海洋環流有賴於大氣程序適當的資料，是故在內容方面不但對氣象人員應有海洋問題，同時對海洋人員亦須有某些氣象的問題。

物理學之極普遍性可由分離程序（process of abstraction）而推演

，理論家在其黑板上或實驗者在其實驗室中可分離程序，至少他們可以去除「不相干的」(irrelevant)現象 ，將交互作用簡化。當處理自然環境時却不可能，自然界乃是許多不同之物理程序同時相互作用之活動領域。研究實際自然界任何特殊部份(海面即爲一例)可提供一種觀點，此觀點可將許多概括性聚積爲一共同之焦點，此種見解由其本身之原故即值得重視；同時對任何合理的控制環境亦有幫助，此環境若在多方面改變，我們不可只是看着它而防止其改變。

閱讀本書需具有流體力學之知識，基本觀念之定義與物理意義可由第一章中獲知，雖然對從未接觸過此問題者幾乎不能滿足其需要，但扼要重述亦有其利益。第一章中列出常用的公式亦可相互參考，以免在本書其他各節中再予重述。讀者如已熟知氣象學或物理海洋學，爲方便起見可免讀第一章。

本書之主要部份包括：兩種介質及其交界面之物質狀態；輻射加熱及冷却；海面波；擾動輸送及其對海面上下邊界層結構之影響；以及端賴空氣與海洋輸送程序之有限振幅擾動之秉性。當然以上所述部份主題曾在其他著名的書籍中涉及，如Roll 的「海洋大氣物理學」(Physics of the marine atmospere, 1965)；Owen Phillips 的「海洋上層動力學」(Dynamics of the upper ocean, 1966)；以及最近Kitaigorodskii的「大氣與海洋間小尺度交互作用」(Small scale interaction between the atmosphere and the ocean, 1970)。但是Roll 所著書中大多數爲編輯研究人員在海洋邊界層中所獲之特殊結果，Kitaigorodskii 之研究主題與Roll者相同，且目前只有俄文本。Phillips 主要考慮應用數學，特別是對波動問題之研究。爲使本書包羅較廣而深度較小起見，本人試盡量以公式表示，並解釋有關理論或觀念之物理意義，而不再詳細討論推演之數學方法或試驗證實時應用儀器的方法。

本人未曾討論時間特性尺度(characteristic time scale)長於數月之交互作用，亦未曾討論海洋對全球氣候之影響以及其世紀的或地質上的變化。以上之省略並非表示對其不感興趣，而是感覺研討此主題之時機並不恰當。預期更有效能的新一代電子計算機可能將激起對大氣與海洋環流關係之最新數值研究。也許今日對過去氣候改變理論之解釋會在不久的將來仍被廢棄。

爲實際工作之應用起見，本人曾提出若干特殊的經驗公式，甚至另外的公式(可能基於同樣良好的觀測)。亦可能在文獻中發現。本人希望我的同事們原諒我的主觀而將其納入書中。評價不同試驗結果之優點很不容易，因此

本人覺得在此種情形下，本書之內容如被選擇的應用較完全理解要有益處。此外，並盡可能的予以引證，或者至少指出其出處。

參考書目中原始論文之大部份皆發表於1963年以後，本人亦將此時期以前綜合各文獻之特殊書籍與專論列入，但是並不需要一定說明所引用之較早期論文，除非在寫此書時直接引用過。此並非表示缺乏辨識，只是像我們應用運動方程時並沒有每次都提及牛頓的原理。

目　錄

第一章　基本觀念

1-1 數學符號(Notation)

本章中張量（ tensor ）及向量（ vector ）符號同時使用，前者對一般性之討論及近似於各向同性程序（ isotropic processes ）（例如小尺度擾動）之處理上較爲方便。此符號爲具有正交軸之座標系統，如x_i（i = 1，2，3），通常x_3 沿當地垂直方向指向上方。在此系統中之向量則常用角註符號（ subsript ）i，j 或k 表示之。當此三個方位角註符號中之任一個符號在某項中出現兩次，則需要將各方位之分量應用總和法（ summation convention ）予以相加，當某項爲平方時亦同，如（$v_i^2 = v_i v_i = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$）。任一符號之後有二個或二個以上之角註符號卽表示爲張量。特例，單位張量δ_{ik} 之定義爲「當$i = k$ 時，$\delta_{ik} = 1$；當$i \neq k$ 時，$\delta_{ik} = 0$」。轉換張量ε_{ijk} 之定義爲「當角註符號循序排列，如1，2，3或2，3，1或3，1，2時，$\varepsilon_{ijk} = 1$；反序排列時，$\varepsilon_{ijk} = -1$；若任一符號重複出現時$\varepsilon_{ijk} = 0$」。旋率向量之定義如下：

$$\eta_i \equiv \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$$

符號≡在本書中皆表示定義。

接近海面之狀況極非各向同性，故常將平面及垂直方向有所區別，應用x，y，z 座標系統，將原點置於平均海平面，使z 軸指向上方。除特別指明以外，通常使x 指向東，y 指向北。垂直速度以w 表示，平面速度用向量 $\mathbf{v}$ 表示，其分速度爲u 及v。在x，y，z 方位之單位向量分別爲 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$。通用之向量運算符號僅只表示於水平平面內之運算，例如：

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \nabla \times \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \eta_z$$

在流體中必須區別局地變化（ local change ）與個別流體分子因移動時所承受之變化。前者可由固定之感應器（ sensor ）記錄之，用時間之偏

微分表示。個別變化（ individual change ）僅能在感應器隨流體分子飄流而記錄之，用時間之全微分式表示之，其關係為：

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z} \qquad (1.1)$$

在一本包羅許多論題之書中，應用同一符號而代表不同的性質是不可避免的，本人曾試將極明顯不相同的，而且不易混淆之性質應用同一符號表示，附錄中列有常用符號。

1-2 物質不滅（ The conservation of matter ）

比密度（ specific density ）ρ 為「單位體積內之質量總數」。連續方程為：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \qquad (1.2)$$

其意義為質量之局地變率等於（ ρv_i ）之輻散，（ ρv_i ）為單位面積之質量通量（ mass flux ），通常稱為流體之動量，若 ϕ 代表個別流體分子之任意性質，則由（ 1.1 ）及（ 1.2 ）推演而為：

$$\rho \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho\phi v_i) \qquad (1.3)$$

以上之關係將經常應用。

方程（ 1.2 ）可以寫為下式：

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = - (\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial w}{\partial z}) \qquad (1.2')$$

除聲波及包含有深厚垂直位移之擾動外，方程（ 1.2′ ）中之第一項較其他二項極小。證明時，我們可考慮一相當大的水平範圍內之擾動（ 參見 1.4 ），必能滿足流體靜力之關係：

$$dp = -\rho g \ dz$$

則方程（ 1.2′ ）之左方可以垂直速度 $w = dz/dt$ 及聲速之平方 $c_s^2 = dp/d\rho$ 即：

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dt} = -g\left(\frac{dp}{d\rho}\right)^{-1}\frac{dz}{dt} = -\frac{gw}{c_s^2} \equiv -\frac{w}{D_s} \qquad (1.4)$$

D_s 為介質之「厚度尺度」（ scale depth ）。在大氣中 D_s 約為 8 公里，在海洋中 D_s 可能較最大的海洋深度大很多。

方程（1.2′）右方，$\partial w/\partial z$ 項之階（order）爲 w/h，h 爲最大之垂直位移，因之：

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \div \frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{h}{D_s}$$

若此比值甚小，則方程左方之項與右方之各項相比較，左方之項可以省略，亦即 $\partial w/\partial z$ 與水平輻散項必近平衡，即：

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial w}{\partial z} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \approx 0 \qquad (1.5)$$

方程（1.5）之近似關係可普遍應用於海洋中，假定垂直位移可保持極小於「厚度尺度」，則亦可適用於空氣中。在本書中所考慮之海洋邊界層之垂直位移當然亦適合以上之條件。

若在有限深度D之不可壓縮流體中 $\hat{\mathbf{v}}$ 爲其水平速度在垂直方向之平均，則在垂直方向對（1.5）積分，並除以D，則可得以下之方程：

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{D}\frac{dD}{dt} = 0 \qquad (1.6)$$

流體中許多個別分子之速度僅由其平均速度影響質量流（mass flow），而此平均速度等於流體集合（fluid continuum）之速度。若大多數分子向某一方向移動，則質量通量可被觀測到；相反的，在流體所佔之空間中，任何個別成分皆可擴散，如果有另一部份之成分向相反的方向移動，則此流體可無淨質量流（net flow of mass）。質量流可產生，亦可消失，例如在海洋大氣中浪花可被蒸發；降落（fall-out）爲另一使濃度改變之可能原因。

令 q_n 爲比濃度（specific concentration）或爲在 n 個成分之混合物中，每一成份之質量所佔之比值，則對此特定物質，其單位體積之質量爲：$\rho_n = q_n\rho$

因而

$$\sum_n q_n = 1 \qquad (1.7)$$

如無沉澱發生，則對 q_n 之連續方程爲以下之形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho q_n) = -\frac{\partial}{\partial x_i}[\rho q_n v_i + d_{ni}] + \rho\frac{\partial^0 q_n}{\partial t} \qquad (1.8)$$

上式方括號中之 q_n 通量有兩部份：由集體速度（continuum velocity）v_i 所攜之大部份輸送；由分子不規則運動所攜之通量 d_{ni}。如無強烈溫度或氣壓梯度，則分子擴散通量全由 q_n 在空間中之分佈決定。

$$d_{ni} \approx -\rho v_n \frac{\partial q_n}{\partial x_i} \qquad (1.9)$$

其中 v_n 爲運動分子擴散係數（ kinematic molecular diffusivity）。

方程（ 1.8 ）中最後一項表示由內在的位相變化（ internal phase change ） 而使 n 個成分有局部的產生。當無位相改變時，將（ 1.9 ）代入（ 1.8 ），並應用（ 1.3 ）之關係，再除以 ρ ，最後將角註符號省略，則得下

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho v \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) \approx v \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2} \qquad (1.10)$$

上式爲運行流體中擴散方程之常用形式，包括隱性假定（ implicit assumption ） ，即「擴散過程並不改變密度，而一種成分之濃度改變，並不影響另一種成分之濃度。」此假定被認爲對海洋中塩分之擴散或在無雲的空氣中水汽之擴散甚爲接近事實。但是當我們處理含有成分約略相等之混合物或者發生任何位相變化時，則一種成分之濃度必受其他成分改變之影響。故適當的連續方程應包括混合物中所有物質之總和。

$$\sum_n \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho q_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho q_n v_i) \right\} = \sum_n v_n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\rho q_n) = 0 \qquad (1.11)$$

由方程（ 1.2 ）及（ 1.7 ）可知方程（ 1.11）之左邊必等於零。

1-3 動量不滅（ The conservation of momentum ）

因爲係三維之向量，故動量需要三個方程詳細說明 ，流體動力學教課書中有此三方程之推演，下面爲此方程之向量形式：

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - 2 \varepsilon_{ijk} \Omega_j \rho v_k - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij}) \qquad (1.12)$$

方程（ 1.12 ）之左方爲動量向量之局地變率，右方第一項爲重力，當地之垂直方向以重力位（ gravitational potential ）Φ 之梯度決定之，在本節中，其量爲 $\partial\Phi / \partial x_i = g = 981\,cm\ s^{-2}$ ，可認爲係一常數。第二項爲科氏力（Coriolis force ），乃一座標系統相對於轉動地球爲固定者所發生之視慣性加速度（ apparent inertial acceleration ），等於地球轉動向量 2 Ω_j 與動量向量 ρv_k 之向量積，向量 Ω_j 平行於極軸，其量等於地轉角速度

$$\Omega = 2\pi / 24\text{hr} = 0.76 \times 10^{-4}\ s^{-1} \qquad (1.13)$$

（ 1.12 ）最後一項爲動量通量之輻合，此通量爲張量，因爲三個動量分量中任一動量場皆可由速度扭曲或轉移，而此速度亦有三個分量。（ 1.12 ）

最後一項括號中所示爲動量通量之張量（momentum flux tensor），有三部份：第一部份指示由集體速度向量 v_j 所輸送之動量 ρv_i；第二部份含有壓力 p，可解釋爲由不規則分子速度輸送之分子動量，若分子運動均勻，無一定的盛行方向，則此項對動量輸送之貢獻必然不因座標系統之轉動而改變，此種關係只有用一純量與單位向量 δ_{ij} 相乘而表示之情況下始爲可能。第三部份爲由不規則分子運動所產生之主要動量通量，此部份有使集體速度梯度與差值相等之趁勢。若 ν 表黏度（viscosity），則

$$\sigma_{ij} = \rho\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \sigma_{ji} \tag{1.14}$$

就黏性之影響而論，在自然界中的空氣和海水之行爲很似不可壓縮的流體。因此我們可用最佳的近似方式推演以下的關係：

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} = \rho\nu\left\{\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)\right\} = \rho\nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \tag{1.15}$$

通過二種不可混合之眞流體如空氣與水之交界面的速度向量及動量通量之張量，必須二者均有連續性；在自由表面上，以上之向量及張量垂直於此面之分量必須爲零。上述之必要條件即爲所知之運動及動力邊界條件。

若 L 表示一特定運動形態上特性尺度長（scale length），U 爲其特性速度，則集體速度對動量通量之貢獻爲 ρU^2，而分子速度之貢獻爲 $\rho\nu U/L$。二者之比值即爲瑞洛數（Reynolds number）：

$$Re = \frac{UL}{\nu} \tag{1.16}$$

上式亦可解釋爲慣性力與摩擦力之比值，瑞洛數大（$Re \gg 1$）表示黏性之影響若與慣性加速度相比，其值甚小，可以省略，則不論實際之黏度如何，此流體系統可相似於無黏性之流體。但是並不表示黏度做爲動能之主要消減原因已不重要，而是表示僅在長度尺度及速度尺度皆很小而足以使局部的瑞洛數爲一個或小於一個階之附屬形態（subsidiary pattern）或副區（subregion）中，黏度可以作用。

應用（1.3）將（1.12）中有關密度之微分消除，可得古典的Navier-Stokes 動量方程：

$$\frac{dv_i}{dt} + 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j v_k = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \tag{1.17}$$

（1.17）亦可用以下之向量等式略作改變，

$$v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}v_j^2\right)+\varepsilon_{ijk}\eta_j v_k \tag{1.18}$$

上式右方第一項爲單位質量動能之梯度，第二項之向量乘積有時稱之爲渦旋力（ vortex force ），指明正交於速度與旋率向量之一種加速度，在均勻密度之流體中，應用方程（ 1.18 ），可使（ 1.17 ）成爲以下之形式：

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}v_j^2+\frac{p}{\rho}+\Phi\right)+\varepsilon_{ijk}(\eta_j+2\Omega_j)v_k-\nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}=0 \tag{1.19}$$

（ $\eta_j+2\Omega_j$ ）稱之爲絕對旋率，計算不隨地軸轉動座標系統中之旋轉。

在無摩擦及非旋轉（ irrotational ）之運轉中，（ 1.19 ）之最後二項皆爲零。令 ϕ 表速度位（ velocity potential ），而使

$$v_i=\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \tag{1.20}$$

將（ 1.20 ）代入最後二項爲零之（ 1.19 ）式中，再積分，其結果則爲著名的伯羅尼（ Bernoulli ）方程：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}v_j^2+\frac{p}{\rho}+\Phi=\text{const} \tag{1.21}$$

若運動爲旋轉但穩定者（ $\partial/\partial t=0$ ），則可沿氣流綫積分而得類似的方程，（ 1.19 ）之第三項正交於速度，因之亦正交於氣流綫，則沿氣流綫積分時無貢獻。下面一項

$$\frac{1}{2}\rho v_j^2+p \tag{1.22}$$

稱之爲總壓（ total pressure ），因爲是動力與靜力分量之總和，故在氣流綫之滯點（ stagnation point ）置一測波器（ transducer ）可測得此壓力。

地球之轉動及重力影響常在大氣運動形態中介入方向之偏斜，當然小範圍運動例外。在此種情形下，較爲方便之方式是用如 1.1 節所述之（ x ，y ，z ）座標系統中的向量符號以代張量。若 φ 代表地理緯度，在此系統中的轉動向量 $2\Omega_j$ 之分量爲：

$$0\ ;\quad f_c\doteq 2\Omega\cos\varphi\quad ;\quad f=2\Omega\sin\varphi$$

時間 $4\pi/f$ 等於Foucault 擺之週期，亦稱之爲擺日（ pendulum day ）。

在新的座標系統中，方程（ 1.17 ）並參用（ 1.15 ）可有以下之形式：