解析函数论初步

[法] 亨利·嘉当 著　　余家荣 译

高等教育出版社

解析函数论初步

[法] 亨利·嘉当 著
余家荣 译

高等教育出版社

本书是根据［法］Henri Cartan 著 Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes 一书译出。原书是著者根据他于五十年代后期到六十年代初期在巴黎大学理学院所授复变解析函数课程编写的．该书先讲收敛幂级数，后讲可导函数及积分，精确地引进了解析空间及黎曼面等概念，讲述了多复变解析函数的概念，在使用工具方面，引用了拓扑及抽象代数中的一些概念．

原书已被译成英、日、俄等国文字，现在仍为法国各大学复变解析函数课程的主要参考书。

解析函数论初步

［法］亨利·嘉当 著

余家荣 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.625 字数 181,000

1983年3月第1版 1984年9月第1次印刷

印数 00,001—14,850

书号 13010·0801 定价 1.50 元

序

我于1957—1958，1958—1959及1959—1960学年度在巴黎大学理学院按照对学士学位的教学要求讲课；本书是根据讲课内容并作了若干补充后写出的．本书主要讲单复变量解析函数论．然而在第四章中接触到多实变量或多复变量解析函数；这只是为了使得能够把两个变量的调和函数看作解析函数，并且为了使得在第七章中，当微分方程组中已知函数是解析函数时，能够讨论方程组的解的存在定理．

本书内容包括“数学二”课程考试大纲中关于解析函数的部分．这些内容包括在过去取得学士学位应修课程《微积分》中．

学士学位考试大纲的细节是不确定的；在原则上，教授对所授课程取材有相当大的自由．这种自由只受到传统的约束；关于单复变解析函数，在法国，传统确实是相当明确的．也许现在以指出我在多大的程度上偏离了这个传统为好．首先，我不愿从讲述柯西的观点（可导函数及柯西积分）开始，而是从讲述维尔斯特拉斯的观点开始，亦即从讲述收敛幂级数开始（第一章）．在此以前简要讲述了幂级数的形式运算，亦即现在所谓形式级数论．我还对传统作了这样的改革：在第六章中，用两节初步系统地讲述了（复一维）抽象“解析空间”论．这里所谓“解析空间”，就是过去所谓“黎曼面”，并且现在人们还常常采用后一名称．我们宁愿把黎曼面这一名称保留给一个解析空间以及这空间在复平面（或更一般地在另一解析空间）的全纯映射．这样，两种概念之间的区别完全具有所需要的明确性，而采用古典术语是不可能表明这一区别的．

关于单复变解析函数论这一经典课题，各国已经出版了并且

还在继续出版许多专著．对于这样的课题，谈不上首创性的问题．如果本书与法国过去的书不同，这也许是因为本书符合近来日益流传的这种习惯：一本数学教材应包含命题或定理的准确叙述，即包含本身完备且可供随时参阅的叙述．除了少数几个明白指出的例外，本书中所有定理都有完整的证明．

在第二章中讲到了与柯西积分及“多值”函数的讨论有关的较细致的平面拓扑问题．在这里，我们仍然认为准确的叙述比模糊的直观和不清楚的概念好．关于平面拓扑的这些问题，我受到了L. 阿尔福斯的极好的书（复分析①）的启发，但是没有完全按照那本书中展开的观点进行讲述．我们假定读者已知一般拓扑的基本概念，并且在本书中多次用到这些概念．事实上，本课程是对学习《数学二》的大学生讲的，他们应已学过《数学一》这门课程的内容．

我深深感谢雷日·塔卡阿希先生，他在领导学生的习题课中取得了丰富经验，承他好意，在本书各章中加上了练习题与问题．我们希望这样读者就可核实他懂得和掌握了书中所讲的理论概念．

亨利·嘉当

1960 年 8 月 4 日于德龙省迪耶

① L. Ahlfors, Complex Analysis, 2d ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1966（有第一版中译本：L. 阿尔福斯著，张立译，复分析，上海科技出版社，1962 年版）．

目　录

第一章　单变量幂级数

§1. 形式幂级数

1. 多项式代数　设 K 为一交换域. 考虑一个字母(或"未知量") X 的形式多项式, 其系数在 K 中(暂时还谈不上给出 X 的值). 考虑两多项式相加及一多项式乘以一个"纯量"(即乘以 K 中一元素)这两种运算,可使多项式集 $K[X]$ 成为一个 K 上的向量空间,其无穷基为

$$1,\ X,\ \cdots,\ X^n,\ \cdots.$$

每个多项式是 X^n 的一个有限线性组合, 其系数在 K 中, 并且可写作 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, 这里约定系数 a_n 的无穷序列中除去有限个外全为零. 由乘法表

$$X^p \cdot X^q = X^{p+q}$$

可定义在 $K[X]$ 中的乘法; 乘积

$$\left(\sum_p a_p X^p\right) \cdot \left(\sum_q b_q X^q\right)$$

为 $\sum\limits_n c_n X^n$, 其中

(1.1)
$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

这种乘法满足交换律和结合律. 它还是双线性的, 亦即无论怎样的多项式 P, P_1, P_2, Q 及纯量 λ,

(1.2)
$$\begin{cases} (P_1+P_2)\cdot Q = P_1 Q + P_2 Q, \\ (\lambda P)\cdot Q = \lambda\cdot(PQ). \end{cases}$$

这种乘法以多项式 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 作为单位元素(记作 1), 其中 $a_0 = 1$, 并且对于 $n>0$, $a_n = 0$. 为了表述所有这些性质,我们说 $K[X]$ 加上其向量空间结构及其乘法,就是在域 K 上具有单位元素的一个

交换代数；特别，这是一个有单位元素的交换环。

2．形式级数代数 X 的形式幂级数是形式表达式 $\sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$，在这里我们不必再设系数 a_n 除去其中有限个外都为零. 我们定义两个形式级数的和为

$$(\sum_{n\geq 0} a_n X^n) + (\sum_{n\geq 0} b_n X^n) = \sum_{n\geq 0} c_n X^n,\ \text{其中}\ c_n = a_n + b_n,$$

还定义形式级数与纯量的积为

$$\lambda(\sum_{n\geq 0} a_n X^n) = \sum_{n\geq 0} (\lambda a_n) X^n.$$

这样，形式级数的集 $K[[X]]$ 形成在 K 上的一个向量空间. 我们用 0 记加法的零元素；它就是系数全为零的形式级数.

两个形式级数的积仍由公式(1.1)定义；这公式还有意义是由于其右边只有有限项相加. 乘法还是满足交换律及结合律，并且对于向量空间的结构是双线性的. 这样，$K[[X]]$ 是在域 K 上的代数，其单位元素(记作 1)为级数 $\sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$，其中 $a_0=1$，而对 $n>0$，$a_n=0$.

代数 $K[X]$ 是 $K[[X]]$ 的一个子代数，即只有有限个系数不为零的形式级数的代数。

3．形式级数的阶 设 $S(X)=\sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$；为了简单起见，把它记作 S. 这级数的阶 $\omega(S)$ 是一整数，并且只有在 $S\neq 0$ 时有定义：它是使 $a_n\neq 0$ 的最小的 n. 如果一个形式幂级数 S 是 0，或者如果 $\omega(S)\geq k$，那么我们说它的阶 $\geq k$. 虽然当 $S=0$ 时，$\omega(S)$ 没有定义，可是为了方便起见，我们仍然写 $\omega(S)\geq k$.

注意 我们可约定 $\omega(0)=+\infty$. 满足 $\omega(S)\geq k$(k 是已给整数)的 S 就是这样的级数 $\sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$，当 $n<k$ 时，$a_n=0$. 它们组成 $K[[X]]$ 的一个子向量空间.

定义 已给形式幂级数族 $(S_i(X))_{i\in I}$，其中 I 表示一个附标集. 如果对于任何整数 k，除了对于有限个附标 i 外，我们有

$\omega(S_i)\geqslant k$，那么$(S_i(X))_{i\in I}$称为可和的．一族形式幂级数

$$S_i(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_{n,i}X^n$$

的和定义为级数

$$S(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n,$$

其中对于每个n，$a_n=\sum_i a_{n,i}$．因为根据假设，对于给定的n，除了对于i的有限个值外，$a_{n,i}$为零，所以上列和式有意义．形成可和族的形式幂级数的加法运算，推广了由$K[[X]]$的向量结构所确定的有限个形式幂级数的加法．这种广义加法满足交换律及结合律，其意义请读者精确叙述．

由可和族概念可以回过头来说明形式记号$\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nX^n$是合适的．事实上，我们约定把对于$n\neq p$，满足$a_n=0$的形式级数$\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nX^n$称为$p$次单项式，并把它记作$a_pX^p$．单项式族

$$\{a_nX^n\}_{n\in N}$$

（N表示大于或等于零的整数集）显然是可和的，它的和就是形式级数$\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nX^n$．

注意　两形式幂级数的积（乘积）

$$(\sum_p a_pX^p)\cdot(\sum_q b_qX^q)$$

就是一可和族的和，这族是由所有下列形状的积组成的：

$$(a_pX^p)\cdot(b_qX^q)=(a_pb_q)X^{p+q},$$

其中第一个及第二个乘式分别是第一个及第二个级数中的单项式．

命题 3.1　环$K[[X]]$是一整环（这就是说，从$S\neq 0$及$T\neq 0$可推出$ST\neq 0$）．

证　设$S(X)=\sum\limits_p a_pX^p$及$T(X)=\sum\limits_q b_qX^q$不为零．设$p_0=\omega(S)$，$q_0=\omega(T)$；设

$$S(X)\cdot T(X)=\sum_{n} c_n X^n.$$

我们显然有：对于 $n<p_0+q_0$, $c_n=0$, $c_{p_0+q_0}=a_{p_0}b_{q_0}$. 因为 K 是一个域，并且 $a_{p_0}\neq 0$, $b_{q_0}\neq 0$, 所以我们有 $c_{p_0+q_0}\neq 0$, 从而 $S\cdot T$ 不为零. 我们还证明了：对于 $S\neq 0$, $T\neq 0$, 有

(3.1) $$\omega(ST)=\omega(S)+\omega(T).$$

注意 我们可以考虑形式级数，其系数在具有单位元素的交换环 A 内，而不必在域 K 内. 用上述方法也可证明：如果 A 是整环，那么 $A[[X]]$ 也是整环.

4. 一个形式级数代入另一形式级数

考虑两个形式级数

$$S(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n,\quad T(Y)=\sum_{p\geqslant 0} b_p Y^p.$$

假定（这是主要的）$b_0=0$, 换句话说，$\omega(T)\geqslant 1$. 相应于每一单项式，作形式级数 $a_n(T(Y))^n$；这个式子之所以有意义，是由于 Y 的形式级数形成一个代数. 因为 $b_0=0$, 所以 $a_n(T(Y))^n$ 的阶 $\geqslant n$; 从而 $a_n(T(Y))^n$ 的族（当 n 取值 0, 1, $\cdots$ 时）是可和的，并且我们可以考虑形式级数

(4.1) $$\sum_{n\geqslant 0} a_n(T(Y))^n,$$

其中含 Y 的各项要重新组合. 这个 Y 的形式级数称为在 $S(X)$ 中用 $T(Y)$ 代换 X 而得；把它记作 $S(T(Y))$；如果不指定未知量的名称 Y, 也可把它记作 $S\circ T$. 请读者证明下列关系式：

(4.2) $$\begin{cases}(S_1+S_2)\circ T=S_1\circ T+S_2\circ T,\\ (S_1S_2)\circ T=(S_1\circ T)(S_2\circ T),\ 1\circ T=1.\end{cases}$$

但要注意 $S\circ(T_1+T_2)$ 一般不等于 $S\circ T_1+S\circ T_2$.

关系式(4.2)表明，对于给定的 T（其阶 $\geqslant 1$），映射 $S\to S\circ T$ 是从环 $K[[X]]$ 到环 $K[[Y]]$ 的一个同态，它把单位元素 1 变成 1.

注意 如果在 $S(X)=\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 中代入零，我们就得到只含"常数项"的形式级数 a_0.

如果有形式级数 S_i 的可和族，并且如果 $\omega(T)\geqslant 1$，那么 $S_i \circ T$ 的族也是可和的，并且有

$$(4.3)\qquad (\sum_i S_i)\circ T=\sum_i (S_i\circ T);$$

这推广了(4,2)中第一个关系式. 实际上，设

$$S_i(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_{n,i}X^n;$$

我们有

$$\sum_i S_i(X)=\sum_{n\geqslant 0}(\sum_i a_{n,i})X^n,$$

由此得

$$(4.4)\qquad (\sum_i S_i)\circ T=\sum_{n\geqslant 0}(\sum_i a_{n,i})(T(Y))^n,$$

而

$$(4.5)\qquad \sum_i S_i\circ T=\sum_i(\sum_{n\geqslant 0} a_{n,i}(T(Y))^n).$$

要证明(4.4)及(4.5)的右边相等，我们注意，在两式中，Y 的任一乘幂的系数只含有限个 $a_{n,i}$，然后只须应用域 K 中(有限)加法的结合律.

命题 4.1 只要 $\omega(T)\geqslant 1$，$\omega(U)\geqslant 1$，我们有关系式

$$(4.6)\qquad (S\circ T)\circ U=S\circ(T\circ U)$$

(代换的结合律).

证 (4.6)的两边有意义. 由(4.2)中第二个关系式，对 n 递推可得

$$(4.7)\qquad T^n\circ U=(T\circ U)^n.$$

因此当 S 是单项式时，(4.6)的两边相等.

由此，并且把级数 S 看作(无穷个)单项式的和 $\sum\limits_n a_n X^n$，可推出(4.6)在一般情况下成立：由定义，我们有

$$S\circ T=\sum_{n\geqslant 0} a_n T^n,$$

又由(4.3),有

$$(S\circ T)\circ U=\sum_{n\geqslant 0} a_n(T^n\circ U);$$

而由(4.7),上式右边等于

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(T\circ U)^n=S\circ(T\circ U).$$

证完.

5. 形式级数的倒级数

在环 $K[[Y]]$ 中,我们有恒等式

(5.1) $$(1-Y)(1+Y+\cdots+Y^n+\cdots)=1,$$

其证明不难作出. 因此级数 $1-Y$ 在 $K[[Y]]$ 中有逆元素, 称为它的倒级数.

命题 5.1 要使 $S(X)=\sum_n a_nX^n$ 对于 $K[[X]]$ 的乘法有逆元素,必须而且只须 $a_0\neq 0$, 亦即 $S(0)\neq 0$.

证 条件是必要的,因为如果

$$T(X)=\sum_n b_nX^n \quad 并且 \quad S(X)T(X)=1,$$

我们有 $a_0b_0=1$, 从而 $a_0\neq 0$. 相反地, 假定 $a_0\neq 0$; 我们要证明 $(a_0)^{-1}S(X)=S_1(X)$ 有一逆元素 $T_1(X)$, 从而可推出 $S(X)$ 有逆元素 $(a_0)^{-1}T_1(x)$. 可是

$$S_1(X)=1-U(X),\quad \omega(U)\geqslant 1;$$

因此我们可在关系式(5.1)中用 $U(X)$ 代替 Y, 从而 $1-U(X)$ 有一逆元素. 证完.

注意 我们已经把多项式代数 $K[X]$ 开拓成形式级数代数 $K[[X]]$. 可以看出, 任何满足 $Q(0)\neq 0$ 的多项式 $Q(X)$ 在环 $K[[X]]$ 中有逆元素; 因此这环包含所有商式 $P(X)/Q(X)$, 其中 P 及 Q 是多项式,而且 $Q(0)\neq 0$.

6. 形式级数的导数

设 $S(X)=\sum_n a_nX^n$; 作为定义, 导级数 $S'(X)$ 由下列公式给

出：

(6.1) $$S'(X)=\sum_{n\geq 0} na_nX^{n-1}.$$

我们也可把导数 S' 写作 $\frac{dS}{dX}$ 或 $\frac{d}{dX}S$.（有限或无穷）和的导数等于导数的和．映射 $S\to S'$ 是从 $K[[X]]$ 到其本身的线性映射．此外，两形式级数的积的导数由下列公式给出：

(6.2) $$\frac{d}{dX}(ST)=\frac{dS}{dX}T+S\frac{dT}{dX}.$$

实际上，只须在 S 及 T 为单项式的特殊情形下证明这一公式，而这是可以立即证明的。

如果 $S(0)\neq 0$，设 T 是 S 的倒级数(参看第 5 段)．由公式 (6.2)得

(6.3) $$\frac{d}{dX}\left(\frac{1}{S}\right)=-\frac{1}{S^2}\frac{dS}{dX}.$$

我们可递推定义形式级数的逐次导数．如果 $S(X)=\sum a_nX^n$，n 阶导数是

$$S^{(n)}(X)=n!a_n+\text{次数}\geq 1\text{ 的各项}.$$

因此有

(6.4) $$S^{(n)}(0)=n!a_n,$$

这里 $S^{(n)}(0)$ 表示在 $S^{(n)}(X)$ 中，用级数 0 代换 X 而得的结果．

7．反转级数

由 $I(X)=X$ 所定义的级数 $I(X)$ 对形式级数的复合是中性元素：

$$S\circ I=S=I\circ S.$$

命题 7.1 设已给形式级数 S；要使得存在着形式级数 T，满足

(7.1) $$T(0)=0,\quad S\circ T=I,$$

必须而且只须

(7.2) $$S(0)=0,\quad S'(0)\neq 0.$$

如果是这样，T 是唯一的，并且我们有 $T\circ S=I$；换句话说，T 是 S 对复合法则 $\circ$ 的逆.

证 设 $S(X)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nX^n$，$T(Y)=\sum\limits_{n\geqslant 1}b_nY^n$. 如果我们有

(7.3) $$S(T(Y))=Y,$$

由两边相应项系数相等即得

(7.4) $$a_0=0,\quad a_1b_1=1.$$

因此条件(7.2)是必要的.

假定条件(7.2)成立；令(7.3)左边中 Y^n 的系数为 0；这一系数等于

$$a_1T(Y)+a_2(T(Y))^2+\cdots+a_n(T(Y))^n$$

中 Y^n 的系数，由此得关系式

(7.5) $$a_1b_n+P_n(a_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ \cdots,\ b_{n-1})=0,$$

其中 P_n 是已知的整系数($\geqslant 0$)多项式，并且对 a_2, $\cdots$, a_n 是线性的. 既然 $a_1\neq 0$，由(7.4)中第二个关系式可算出 b_1；其次，对于 $n\geqslant 2$，由关系式(7.5)对 n 递推可算出 b_n. 这样就证明了形式级数 $T(Y)$ 的存在与唯一性.

上面求得的级数满足 $T(0)=0$, $T'(0)\neq 0$；因此对 T 应用刚刚对 S 已证明的结果，可见存在着一个形式级数 S_1，满足

$$S_1(0)=0,\quad T\circ S_1=I.$$

我们有

$$S_1=I\circ S_1=(S\circ T)\circ S_1=S\circ(T\circ S_1)=S\circ I=S.$$

因此 S_1 就是 S，并且恰好有 $T\circ S=I$，证完.

注释 既然 $S(T(Y))=Y$, $T(S(X))=X$，我们可以说"形式变换"

$$Y=S(X),\quad X=T(Y)$$

互为反变换；也可把 T 称为级数 S 的"反转形式级数"。

命题 7.1 是一种"形式隐函数定理"。

§2. 收敛幂级数

1. 复数域

以下域 K 是域 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 二者中之一：$\mathbf{R}$ 表示实数域，$\mathbf{C}$ 表示复数域。

我们记得，复数 $z=x+iy$（x 及 y 是实数）可用 $\mathbf{R}^2$ 平面上坐标为 x 及 y 的点表示。如果对每个 $z=x+iy$，取"共轭"数 $\bar{z}=x-iy$，我们就确定了域 $\mathbf{C}$ 的一个自同构 $z\to\bar{z}$；这是因为有关系式

$$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}', \qquad \overline{zz'}=\bar{z}\bar{z}'.$$

$\bar{z}$ 的共轭复数是 z。换句话说，变换 $z\to\bar{z}$ 是对合的，亦即等于其逆变换。

我们确定复数 z 的范数，绝对值，或模如下：

$$|z|=(z\bar{z})^{1/2}.$$

它具有下列性质：

$$|z+z'|\leqslant|z|+|z'|, \qquad |zz'|=|z||z'|, \qquad |1|=1.$$

范数 $|z|$ 总是 $\geqslant 0$，并且只有在 $z=0$ 时为零。由范数可定义域 $\mathbf{C}$ 中的一个距离：从 z 到 z' 的距离是 $|z-z'|$；这就是 $\mathbf{R}^2$ 平面上的欧氏距离。对于这种距离，$\mathbf{C}$ 是完备空间，亦即柯西判别准则成立：要使点列 $z_n(\in\mathbf{C})$ 有极限，必须而且只须我们有

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}|z_m-z_n|=0.$$

从这一柯西判别准则可推出著名的定理：如果复数项级数 $\sum\limits_n u_n$ 满足 $\sum\limits_n |u_n|<+\infty$，那么这级数收敛（我们说级数绝对收敛）。此外，

$$\left|\sum_n u_n\right|\leqslant\sum_n|u_n|.$$

我们总把 $\mathbf{R}$ 看作 $\mathbf{C}$ 的一个子域，亦即满足 $\bar{z}=z$ 的 z 所形成

的子域．从 $\mathbf{C}$ 上的范数导出 $\mathbf{R}$ 上的范数，它就是实数的绝对值．$\mathbf{R}$ 是完备的．在后面，域 $\mathbf{C}$(或 $\mathbf{R}$)的范数起着主要的作用．

我们把 $z(\in\mathbf{C})$的“实部”及“虚系数”记作

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})\quad 及\quad \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}).$$

2. 有关函数项级数收敛概念之回顾

(关于这里讲到的概念，读者可参考 J. 狄克兹米埃的数学一教程：J. Dixmier, Cours de l'A. C. E. S., Topologie, chapitre VI, § 9.)①

考虑在集 E 上定义的取实值或复值的函数(更一般地，可考虑在一完备赋范向量空间内取值的函数；参看上引书)．对于每个函数 u，我们记

$$\|u\|=\sup_{x\in E}|u(x)|;$$

这是一个 $\geqslant 0$ 的数，有时可为无穷大．当 $\|u\|<+\infty$ 时，对于每个数量 λ，我们显然有

$$\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|,\qquad \|\lambda u\|=|\lambda|\cdot\|u\|;$$

换句话说，在满足 $\|u\|<+\infty$ 的函数 u 的向量空间上，$\|u\|$ 是一个范数．

已给函数项 u_n 的级数；如果范数的级数 $\sum\limits_n\|u_n\|$ 是一正项收敛级数，亦即如果 $\sum\limits_n\|u_n\|<+\infty$，那么我们说级数 $\sum\limits_n u_n$ 正规收敛．由此可推出：对于每个 $x\in E$，级数 $\sum\limits_n|u_n(x)|$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_n u_n(x)$ 绝对收敛；不但如此，如果 $v(x)$ 表示后一级数的和，我们有

$$\|v\|\leqslant\sum_n\|u_n\|,\quad \lim_{p\to\infty}\|v-\sum_{n=0}^{p}u_n\|=0.$$

上列第二个关系式表明：当 p 趋近于无穷大时，部分和 $\sum\limits_{n=0}^{p}u_n$ 一致

① 也可参考 J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Acad. Press, Inc., New York, 1960.