科學圖書大庫

級數 微分方程式
與複變數函數

譯者　陳弘毅

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧鎣　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十四年二月二十日初版

級數、微分方程式與複變數函數

基本定價　1.80

譯者　陳弘毅　國立師範大學理學士

(63)局版臺業字第0116號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 7815250
發行所　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739號

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同把人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之成就，已超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人有無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的基本任務。培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如物理、數學、生物、化學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學。旨趣崇高，至足欽佩！

科學圖書是學人們研究、實驗、教學的精華，明確提供科學知識與技術經驗，本具互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的收穫。我國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年所可苛求者。因此，本部編譯出版科學圖書，引進世界科技新知，加速國家建設，實深具積極意義。

本基金會由徐銘信氏捐資創辦，旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利。民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，返國服務者十不得一。另贈國內大學儀器設備，輔助教學頗收成效；然審度衡量，仍嫌未能普及，乃再邀承國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏘氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱。「科學圖書大庫」首期擬定二千册，凡四億言，叢書百種，門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。從事翻譯之學者五百位，於英、德、法、日文中精選最新基本或實

用科技名著，譯成中文，編譯校訂，不憚三復。嚴求深入淺出，務期文圖並茂，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，有教無類，效果宏大。賢明學人同鑑及此，毅然自公私兩忙中，撥冗贊助，譯校圖書，心誠言善，悉付履行，感人至深。其旅居國外者，亦有感於為國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬菲薄，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，報國熱忱，思源固本，僑居特切，至足欽慰！

今科學圖書大庫已出版七百餘册，都一億八千餘萬言；排印中者，二百餘册，四千餘萬字。依循編譯、校訂、印刷、發行一貫作業方式進行。就全部複雜過程，精密分析，設計進階，各有工時標準。排版印製之衞星工廠十餘家，直接督導，逐月考評。以專業負責，切求進步。校對人員既重素質，審愼從事，復經譯者最後反覆精校，力求正確無訛。封面設計，納入規範，裝訂注意技術改善。藉技術與分工合作，建立高效率系統，縮短印製期限。節節緊扣，擴大譯校複核機會，不斷改進，日新又新。在翻譯中，亦三百餘册，七千餘萬字。譯校方式分為：(1)個別者：譯者具有豐富專門知識，外文能力強，國文造詣深厚，所譯圖書，以較具專門性而可從容出書者屬之。(2)集體分工者：再分為譯、校二階次，或譯、編、校三階次，譯者各具該科豐富專門之知識，編者除有外文及專門知識外，尙需編輯學驗與我國文字高度修養，校訂者當為該學門權威學者，因人、時、地諸因素而定。所譯圖書，較大部頭、叢書、或較有時間性者，人事譯務，適切配合，各得其宜。除重質量外，並爭取速度，凡美、德科學名著初版發行半年內，本會譯印之中文本，賡即出書，欲實現此目標，端賴譯校者之大力贊助也。

謹特掬誠呼籲：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者，與從事科學建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者。

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或聯袂而來譯校叢書，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。祈學人們，共襄盛舉是禱！

原　序

本書（共三册）是從Videregaende　Matematik 改訂增補的，其第一版發行於 1960 年，本書著作原是爲化學家，生物化學家和醫師的基本研究而寫的。

原先本書特別的目的是爲將在物理化學及生物物理學方面，作更深一層的研究與探討者，提供必要的數學知識。事實上，因本書也可以用於其他方面，因此現在增加一些資料後，相信其用途將更爲廣泛。

爲科學家在數學方面編寫一本書，一方面要在嚴密與基本知識之間找出一相當的均衡，另一方面要立即闡述其可用性。爲達此目的，我們計劃採取下列的步驟：全書中將十分正確地以公式表示已獲得的結果——即使其證明省略。然而，此方法有些改變：即在本書開始時，吾人使用較嚴密的數學公式，在後半部裡，若在許多物理和化學的教科書中已十分普遍的公式，則以較不嚴謹的公式表示之。

第一册包含向量、張量和群，若沒有微積分的知識亦可讀之。由我們的經驗知：若每週授課兩小時，則第一册能在一學期內授畢，第二册爲多（實）變量函數論，在此册中時常用到向量的概念，而且在第四章的後半部用到矩陣及張量的概念。若每週上四小時，則一學期即可上完第一册及第三册的一部分，這樣即可奠定微積分的基本知識。第三册包含高等微積分方面的教材：級數、微分方程、複數函數和數值計算法，本册與其他兩册所述的特殊公式無多大關係，但需要有關矩陣的特徵値及多變量函數的知識。若每週講授四小時，則一學年可研讀第 1.3.4.5 章及第 6.8 章的一部分。

對於附有星號（*）之習題則給予解答。本書也包含許多實例，這些例子構成本書一重要部分，記號□表示例題做完而主要課文又開始，在每一册後面，列舉一些參考書，讀者在研讀該部分時可同時讀那些書或讀完該册後再讀之，將有莫大的助益。

感謝 Brian　Phillips 和 Peeter　Kruus 兩位博士翻譯此書的一大部分，及 H. Rosenberg　教授對原稿的許多指正與勸告，本書若有錯誤或費

解處，不應該責難他們，又 Barbara Zeiders 對原稿有價值的建議及無限的辛勞，Lise Seifert女士打首稿，及Emmy Christiansen 小姐打最後的抄本，在此一一誌謝！

Thor A. Bak
Jonas Lichtenberg
於丹麥哥本哈根

目　録

第五章　無窮級數

第六章　微分方程式

第七章 複數函數

第八章 數值分析

第五章　無窮級數

5—1　常數項之級數

無窮級數的概念

在以前(第134頁)吾人已定義一實數之無窮數列爲：從所有正整數所成之集合映至所有實數所成之集合的一個函數。今考察如此之一數列 u。依以前之規定，在其 n 之函數值(其第 n 個元素)記爲 u_n，此時數列本身可記爲 $u_1, u_2, \cdots, u_n \cdots\cdots$。

對應於數列 u，吾人可定義出一個新數列 S，且稱此一新數列爲屬於 u 之**無窮級數**；但 S 在 n 之値定爲

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

S_n 通常稱爲此無窮級數之第 n 個部分和，而 u_k 則稱爲此級數之第 k 項。

S 可能收斂，亦可能發散。若爲前者之情形，則其有一極限値 σ，且亦稱此 σ 爲此無窮級數之和，而記之爲

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots$$

由於 $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 對所有 n 皆成立，於是立可得知無窮級數收斂之一必要條件爲原數列 u 收斂且極限爲零。然而，以後吾人將可得知這條件並非充分的(例5－3)。

依上面之規定，無窮級數之和(若存在)記爲

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad 或 \quad u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots.$$

這兩記號常被用來表示無窮級數本身——不論其收斂與否。在實用上，此類記號所含之兩種意義並不會導至混淆不清，因此吾人亦將常使用之。

例 5－1 幾何級數 $a+aq+aq^2+\cdots\cdots+aq^{k-1}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$ $(\neq 0)$ 在 $|q|<1$ 時收斂且和為 $a/(1-q)$；蓋因此級數之第 n 個部分和

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=a\frac{1-q^n}{1-q}$$

在 n 趨近無窮大時收斂於 $a/(1-q)$。若 $|q|\geq 1$．則由上述之必要條件可知此級數此時為發散。

例 5－2 級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\cdots$$

收斂且和為 1，蓋因其第 n 個部分和為

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

由此可知 $n\to\infty$ 時 $S_n\to 1$。

例 5－3 稱為**調和級數**之 $\sum_{k=1}^{\infty}1/k$ 並非收斂，雖然其在 $k\to\infty$ 時 $1/k\to 0$。考察其第 n 個部分和

$$S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

吾人可知其大於積分 $\int_1^{n+1}(1/x)\,dx=\ln(n+1)$，即，$S_n>\ln(n+1)$ 因之 $n\to\infty$ 時 $S_n\to\infty$。

正項級數之收斂

顯而易見地，若級數僅含正項，則其部分和所成之數列將是單調一遞增的（monotone−increasing）。因之，此數列有一上極限即爲級數收斂之充要條件。

下列對收斂之簡易檢驗法稱爲**比較檢驗法**，但僅適用於正項級數：設有兩級數$\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n$及$\Sigma_{n=1}^{\infty} v_n$，若對大於某一固定數$N$之所有$n$皆$v_n \geq u_n$；則$v$－級數收斂時$u$－級數亦必收斂，且$u$－級數發散時$v$－級數亦必發散。只須考察此級數之第$n$個部分和即可知其正確性。

由比較檢驗法立可得出對收斂之另二重要檢驗法。通常皆稱之爲**Cauchy 檢驗法**。其中第一個爲**根式檢驗法**：對一正項級數而言；若存在有一小於1之正數q及一整數N，使對所有大於或等於N之n而言，級數之第n項之n次根皆小於或等於q，則此級數爲收斂。另一個爲**比值檢驗法**：若對所有$n \geq N$皆$u_{n+1}/u_n \leq q$，則此一正項級數爲收斂，其中q爲某一小於1之正數且N爲某一整數。

這兩種情形皆得之於比較u－級數與一正項之幾何級數——即具有形式$\Sigma_{n=1}^{\infty} aq^n$，$a>0$ $q>0$之級數。如前所述，此一級數在$q<1$時收斂。若有某一數N使$n \geq N$時皆$\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1$，則顯然在u－級數所有使$n \geq N$之項u_n將小於或等於q^n，且因有限個項（從u_1至u_{n-1}）不可能導致級數發散，故可確知此u級數爲收斂。同樣，若對所有$n \geq N$時$u_{n+1}/u_n \leq q$，則

$$\begin{aligned} u_{N+1} &\leq u_N q, \\ u_{N+2} &\leq u_{N+1} q \leq u_N q^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

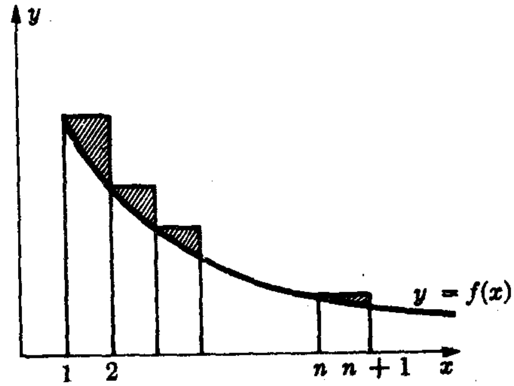
又，在u－級數中$n \geq N$之所有項皆各小於或等於在一收斂之幾何級數：$\Sigma_{n=1}^{\infty} u_N q^{-N} q^n$中之對應項。

同時，很顯然地，一級數若對所有$n \geq N$皆$\sqrt[n]{u_n} \geq 1$或$u_{n-1}/u_n \geq 1$，則此級數必爲發散，蓋因此時甚至上述收斂之必要條件（$n \to \infty$時$u_n \to 0$）亦不滿足。

必須注意的是，上述對$\sqrt[n]{u_n}$與u_{n+1}/u_n之論述並非窮舉的。例如，若$n \to \infty$時$\sqrt[n]{u_n} \to 1-0$，則u－級數可能收斂亦可能發散。亦即表 Cauchy 檢驗法只是收斂的**充分**條件。

吾人所將論述的最後一個正項級數（設其各項之值順次遞減）之收斂檢驗法是所謂的**積分檢驗法**。此時級數與一連續函數 $f(x)$ 之積分相比較；其中 $f(x)$ 在 $x \geq 1$ 時爲正值且遞減，在 $x = n$ 時其值爲 u_n（$n = 1, 2, 3, \cdots$）。

於是可知，若廣義積分 $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ 收斂則 $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂，而若此一積分發散則此級數發散。其證明可由比較第 n 個部分和與積分上限爲 $n+1$ 之 $f(x)$ 之積分而得出（圖 5－1）



$$\int_1^{n+1} f(x)\, dx < S_n < \int_1^{n+1} f(x)\, dx + u_1$$

圖 5－1

上述對於正項級數之考察，可易推廣至僅含非負值項或僅含負值項或僅含非正值項之級數。

例 5－4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 爲收斂} \left(\text{比較檢驗法及例 } 5-2\text{，} u_n < \frac{1}{(n-1)\cdot n} \right).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2} \text{ 爲收斂} \left(\text{比值檢驗法，} n \to \infty \text{ 時 } \frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{3} (<1) \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-n} \text{ 爲收斂} \left(\text{根式檢驗法，} n \to \infty \text{ 時 } \sqrt[n]{u_n} \to \tfrac{1}{2} (<1) \right).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\ (\alpha>1)\text{ 爲收斂}\left(\text{積分檢驗法},\ f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}\right).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\ (0<\alpha\leq 1)\text{ 爲發散}\left(\text{積分檢驗法},\ f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}\right).$$

任意級數之收斂

吾人將處理級數$\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n$，其中之諸項之符號並無事先之假設。就此一級數而言，吾人也將考慮到由其項之絕對值所構成之一級數，即$\Sigma_{n=1}^{\infty}|u_n|$。若$\Sigma|u_n|$收斂，則可證$\Sigma u_n$亦必收斂。然而，其逆敘述並不眞；即，$\Sigma u_n$之收斂並不能使$\Sigma|u_n|$收斂（見例5－5）。

若對一級數Σu_n而言，Σu_n與$\Sigma|u_n|$之收斂皆爲眞，則此級數稱爲**絕對收斂**。於是對級數之絕對收斂的檢驗步驟與僅含正項（或非負值之項）之級數之收斂檢驗法相同。

一級數若爲收斂，但非絕對收斂，則稱爲**條件收斂**。可易知如此之一級數必含無數個正項與無數個負項（項爲負值）。

絕對收斂之級數之和不受其諸項重新排列的影響，即，項的次序是無關緊要的。對於一含無數個正項與無數個負項之絕對收斂級數而言，上列事實可由利用下列事實而加以證明：此種級數之諸正項之和與諸負項之和皆爲收斂。

對於條件收斂之級數而言，Riemann 的一個定理是可以成立的；即，對如此之一級數之項之次序吾人可加以適當改變，使其產生之新級數之和等於一任意指定之數。再者，吾人亦可將其項之次序改變使新級數成爲發散。此時，項之次序甚重要。

俱含正項與負項之特殊一類級數，係由所謂**交錯級數**所形成，即其具有形式$\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(-1)^{n+1}$（或$\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(-1)^n$）者，其中對所有$n$皆$u_n>0$。Leibniz 檢驗法可以檢驗此類級數的收斂。此種檢驗法即：若一交錯級數之第n項之絕對值遞減且在n趨近無窮大時趨近於0，亦即若$u_1>u_2>u_3>u_4$……且$n\to\infty$時$u_n\to 0$，則此級數爲收斂。

這可由考察級數$\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(-1)^{n+1}$之第$n$個部分和而得證：

$$S_n=u_1-u_2+u_3\cdots\cdots\pm u_n$$

於此，數列 S_n（n 偶數）爲單調一遞增（$S_2 < S_4 < S_6 < \cdots$），而數列 S_n（n 奇數）爲單調一遞減（$S_1 > S_3 > S_5 > \cdots$）。這實爲對 u_n 之第一個假設的顯然結果。於是數列 S_n（$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$）可分爲一單調一遞增與一單調一遞減之數列。再者，由 u_n 之第二個假設可知，此兩數列之第 p 個元素之差在 $p \to \infty$ 時趨近於 0。因此，此兩單調數列有一共同之極限 S。由此可知所予之交錯級數爲收斂一其和爲 S（圖 5－2）

同時可知，只考慮級數之最初 n 項時之誤差必小於其後一項之絕對值，即：$|S_n - S| < u_{n+1}$

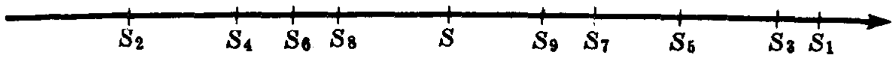


圖 5－2

例 5－5 級數 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(1/n)(-1)^{n+1}$ 爲收斂（由 Leibniz 判定法）。然而，其並非絕對收斂，蓋因其所對應之絕對值級數並非收斂（例 5－3 ）。如前所述可知，可改變項之次序使所得之新級數發散。今吾人舉一例說明之。

依上述所予之諸元素之次序，部分和所成之數列爲

$$1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{6}\ ;\ \frac{7}{12}\ ;\ \frac{47}{60}\ ;\ \frac{37}{60}\ ;\ \cdots\cdots$$

這顯示此級數之和介於（例如）$\frac{47}{60}$ 與 $\frac{37}{60}$ 之間。今項之次項改變爲：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots+\frac{1}{29}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots,$$

其中有 2，4，8， ……個相鄰正項順次分別插入兩負項間。令其部分和所對應之數列爲

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots\cdots,\ S_n,\ \cdots\cdots$$

一發散之部分數列可易由此選出；例如

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ \cdots\cdots,\ T_n,\ \cdots,$$

其中 $T_n = S_{n+2^n-1}$。蓋因，此時下列敍述爲眞：

$$
\begin{aligned}
T_{n+1}-T_n &= S_{n+1+2^{n+1}-1}-S_{n+2^n-1}\\
&= \frac{1}{2\cdot 2^n-1}+\frac{1}{2(2^n+1)-1}+\frac{1}{2(2^n+2)-1}+\cdots\\
&\qquad +\frac{1}{2(2^{n+1}-1)-1}-\frac{1}{2(n+1)}\\
&> 2^n\frac{1}{2(2^{n+1}-1)-1}-\frac{1}{2(n+1)}=\frac{1}{4-3\cdot 2^{-n}}\\
&\qquad -\frac{1}{2(n+1)}>\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)},
\end{aligned}
$$

因此對所有 $n>2$ 亦皆 $T_{n+1}-T_n>\frac{1}{8}$ 。於是部分數列T_n 發散爲∞，故可知數列 S_n 不可能收斂。

收斂級數之運算

設兩級數$\Sigma_{k=0}^{\infty} u_k$ 與 $\Sigma_{k=0}^{\infty} v_k$ 皆爲收斂且其和各爲U與V 。則級數$\Sigma_{k=0}^{\infty} a u_k$，（ a 爲任意常數）收斂且和爲aV 。又$\Sigma_{k=0}^{\infty}$（ u_k+v_k）亦爲收斂且和爲$U+V$ 。這兩樣結果可由考察其適當之部分和而得知，故其皆可適用於任意之收斂級數。

吾人已知，項之次序對於一絕對收斂級數是無關緊要的，但其對於條件收斂級數則不然。若所論及之兩級數皆爲絕對收斂且依下列規則正式相乘：

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\right) &= (u_0+u_1+u_2+\cdots)(v_0+v_1+v_2+\cdots)\\
&= u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)\\
&\qquad +\cdots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} u_n v_{k-n}\right),
\end{aligned}
$$

如此所得出之級數將亦爲絕對收斂，且其和爲UV 。

上列敘述可更大略而簡潔地敘述如下：對於絕對收斂級數之計算可如同對有限和之計算。至於條件收斂級數之情形並不如此。於此，有一應特別注意的是，無限個圓括弧的插入恒產生一具有同一和之（新）級數；但

移去無限個圓括弧時，則甚至其施之於絕對收斂級數，亦可產生一發散級數。舉例而言，下列之級數即有如此之情形

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-1)=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots.$$

在具有形式 $S=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$（其中 x 爲固定數）之絕對收歛級數的這一特殊情形中，有幾個公式可成立；例如，

$$S^2=a_0{}^2+2a_0a_1x+(a_1{}^2+2a_0a_2)x^2+2(a_0a_3+a_1a_2)x^3+\cdots.$$

這實爲上述乘法規律之結果，再者

$$S^{1/2}=a_0{}^{1/2}\left[1+\frac{a_1}{2a_0}x+\left(\frac{1}{2}\frac{a_2}{a_0}-\frac{1}{8}\frac{a_1{}^2}{a_0{}^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{2}\frac{a_3}{a_0}-\frac{1}{4}\frac{a_1a_2}{a_0{}^2}+\frac{1}{16}\frac{a_1{}^3}{a_0{}^3}\right)x^3+\cdots\right]\qquad(a_0\neq 0),$$

$$S^{-1}=a_0{}^{-1}\left[1-\frac{a_1}{a_0}x+\left(\frac{a_1{}^2}{a_0{}^2}-\frac{a_2}{a_0}\right)x^2+\left(\frac{2a_1a_2}{a_0{}^2}-\frac{a_3}{a_0}-\frac{a_1{}^3}{a_0{}^3}\right)x^3+\cdots\right]\qquad(a_0\neq 0).$$

無窮乘積

對於無窮乘積之概念，吾人不擬作詳細之討論。吾人將僅討論無窮乘積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots,$$

其中之因子無一爲零，若由其**部分乘積**

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)=(1+u_1)\cdots(1+u_n),$$

所成之數列

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots\cdots,\ P_n,\ \cdots\cdots,$$

收斂且極限 P 異於 0，則稱此無窮乘積收斂於**值** P。