刀具设计的螺旋面理论

[苏] B·C·柳克辛 著

本书包括螺旋面的一般原理，曲面族包络原理，以及这些原理在工程技术，特别是在刀具造形上的应用。

在螺旋面原理中，对定导程和变导程的一般螺旋面作了数学分析，详细叙述了定导程线性螺旋面和圆螺旋面。

在包络原理中，叙述了矩阵和矩阵在啮合原理上的应用，对经典的包络运动原理，着重在啮合原理方面加以阐明。根据这些原理，对展成刀具的一般造形方法作了精确的分析。

本书可供工程技术人员、研究人员、教师和科学工作者参考。

ТЕОРИЯ ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
В ПРОЕКТИРОВАНИИ РЕЖУЩИХ ИНСТРУМЕНТОВ
В. С. ЛЮКШИН
ИЗДАТЕЛЬСТВО《МАШИНОСТРОЕНИЕ》
1 9 6 8
* * *
刀具设计的螺旋面理论
〔苏〕 B. C. 柳克辛　著
彭祥增　译
田培棠　校
*
机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售
*
开本 787×1092 1/16·印张 16·字数 387 千字
1984 年 3 月北京第一版·1984 年 3 月北京第一次印刷
印数 0,001— 9,200·定价 2.00 元
*
统一书号：15033·5539

前　言

在许多刀具设计中，广泛地应用着螺旋面。

用方便、简洁和明了的方法来研究严密而完整的螺旋面原理，一般来说是研究刀具理论的基础工作，特别是设计刀具以及发明新型刀具和加工方法的基础。

苏联出版了不少刀具著作。И.И.谢明钦柯（И.И.Семенченко）教授的巨著《刀具》Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卷[19]，已充分说明了这个问题。但是，该书中数学的篇幅不多，没有对各种螺旋面的主要性质作系统说明，也未谈及螺旋面的专门造形法。探讨这些内容是需要一定的数学知识的。例如，包络法就要求同其他的研究方法一样，需要运用矩阵，不仅要运用单参数曲面族理论，而且还要运用双参数曲面族理论。没有规定的术语，缺乏这种专门理论，使刀具研究工作者不得不每次根据具体条件来确定螺旋面的某些性质，或碍于数学上的困难而回避使用它们。有时用简化命题而得到的近似公式，也由于没有准确公式而难于估计误差。

另一方面，在现有的微分几何教程[4]、[14]、[15]、[24]中，螺旋线和螺旋面只是作为某些公式的应用实例才被提及。

本书第一篇叙述了定导程常螺旋线和常螺旋面以及变导程螺旋线和变导程螺旋面的原理。

本书与一般参考书的区别，在于采用了圆向量函数 $\bar{e}(v)$ 和 $\bar{g}(v)$。运动构架是近代微分几何最重要的概念之一。在第一章中，说明了运动构架（$\bar{e}$，$\bar{g}$，$\bar{k}$）在研究螺旋线和螺旋面时的系统应用。带来的好处是公式简化了，螺旋线和螺旋面的作图也很直观。这在研究刀具（例如滚刀）原理中最重要的几何形式，即螺旋面法线以及螺旋面的端截形等时尤为突出。

第一章除叙述了螺旋线的性质外，还阐明了其他问题。在刀具理论中，很重要的以螺旋射线概念为基础的螺旋理论[30]，也在第一章中作了介绍。

在第一章内所述的一般螺旋线，是常螺旋线的直接概括。这一概括不仅对于圆锥面上形成螺旋线（即所谓圆锥螺旋线）具有实际意义，而且在研究变导程螺旋面时也具有理论意义。此外，还对以前我们所发表的任意旋转曲面上求一般螺旋线的方法（莫斯科机床工具学院学报，1938年11集）作了简要说明。

在第二章中，推导了任意常螺旋面的所有方程，列举了螺旋面的常用元素。研究曲面时，在各种场合下应注意两个重要情况：第一，在包络理论和按展成法工作的刀具造形中起着很大作用的曲面法线；第二，曲面的曲率和抛物线㊀的位置。主曲率半径值对于求共轭齿轮的单齿压力有影响。而找出由同一类点（椭圆点或双曲点）组成的那部分曲面，对于正确啮合是重要的。曲面上的渐近线之所以重要，是由于曲面的切平面沿每条渐近线方向比沿其他方向与曲面接触更紧密（二阶甚至更高）。渐近线的密切平面是曲面的切平面（或是不定的）。在双曲点的邻域，渐近线切线把曲面分为四个部分，其中两部分在切平面的一方，另外两部分在切平面的另一方。在一些特殊问题中，研究了曲面上的正交投影、螺旋面上的螺旋射线作图（附录内的重要问题）。为了完整螺旋面理论，还提到了螺旋面的弯曲。

㊀ 即曲面上由抛物点组成的曲线，本书简称抛物线——校注。

第三章分别研究了阿基米德、护轴线和渐开线螺旋面，并阐述了它们的重要性质。其中，重要的是阿基米德螺旋面被平行于某一平面的平面，即与螺旋轴夹某一角度的平面所截得的截形性质。这个截形可用来设计加工阿基米德螺纹的刀具。列入的护轴线函数[10]与通常已知的渐开线函数一样，简化了护轴线蜗杆[5]齿廓的研究和作图。

第五章叙述了有发生圆的圆螺旋面原理。如果说对线性常螺旋面已作了很好的研究的话，那么仅在不久以前，M.Л.诺维科夫（M.Л.Новиков）、Ю.В.茨维斯（Ю.В.Цвис）等的著作[17]、[18]，才对圆螺旋面进行了实质性的研究。目前，这一原理由于出现了诺维科夫（Новиков）新型啮合而具有很大的意义。此外，无论是研究过渡曲面，还是为获得代用近似螺旋面，圆螺旋面都具有很重要的价值。

圆螺旋面的一般原理可应用于各种特殊情况。研究了管道螺旋面。在本章结尾，列出了圆螺旋面蜗杆的方程。

第五章叙述了变导程螺旋运动、螺旋线和螺旋面的原理。文献中只提到过变导程螺旋运动的两种情况（见文献[32]和[33]）。如果刚体绕轴 Oz 作旋转运动，同时又作平行于此轴的直移运动，那么在文献[32]中研究了 $z=h\sin v$ 的运动，而在文献[33]中研究了以规律 $z=h\sin(nv)$ （$n\neq 1$）的运动。后者称为谐和旋转振动运动。

这里作了更广泛的概括。我们将把由绕轴旋转和沿平行于轴 Oz 的直线的移动组成的规律为 $z=f(v)$ 的合成运动，称为对应于给定函数 $r=f(v)$ 的变（轴向）导程螺旋运动。

如果研究变导程螺旋运动能表明任意规律 $z=f(v)$ 所共有的变导程螺旋线和螺旋面的性质，那么在这样的意义上是有价值的。

证明了平面螺旋运动时其包络曲面的脊线是一般螺旋线（斜线）。作出了布拉施克（Blaschke）任意斜线定理[2]、[29]的概括。

利用变导程螺旋面直母线点的对合，可以得到曲面上渐近线的几何作图法。

最后还研究了更一般的运动。

在这种运动中，平面和轴 z 成定角，它具有变导程螺旋运动的性质。这种运动在求螺旋轴和滚刀轴平行的滚刀所涉及的问题中获得应用。变导程螺旋面在生产塑料成型坯件的专用蜗杆、船舶螺旋桨叶和其他方面得到应用。

书末附了两个表：护轴线函数 $\mathrm{con}v(x;\ k)=k\,\mathrm{tg}x-x$ 值表和函数 $y=kx+\sin x$ 值表。后者可以近似解出螺旋射线化成螺旋面的问题。这两个表都是对于 x 和 k 在小范围内变化而作为标准值给出的。

本书第二篇叙述曲面族的包络原理。它在工程技术上用得很广泛，且又是展成刀具最重要的成形方法之一的基础。包络理论也用在机械原理的啮合问题和其他问题中。

第六章叙述了构架作旋转运动和螺旋运动时其方程所应用的矩阵。此构架和某物体固连，相对于固定空间的位置是任意的。

除了众所周知的矩阵性质之外[7]、[20]，还推导了标量积和向量积的矩阵表达式；得出了绕任意轴的旋转矩阵。它可求得运动构架在空间最一般位置的螺旋运动方程，并可研究空间啮合的一般情形；获得了接触线和啮合面的矩阵方程。从所列公式中，作为特殊情形，推出了一些公式，它们在Ф.Л.利特文（Ф.Л.Литвин）的著作里[9]被用来确定在相错轴传动情况下齿面的接触线。

第七章包括没有证明但完全是最新的曲面族包络的经典理论研究成果。不久以前，阐述这

种理论归结为确定必需的条件。由隐式方程给定的单参数族包络存在的充要条件，在 С. П. 菲尼科夫(С. П. Фиников)著的大学微分几何教程[24]和教程[23]中最先提及。但是，并没有以向量方程或参数方程给定的曲面族包络存在的充要条件。本书第七章列出了这些条件[11]。利用包络理论，可得到作为曲面螺旋运动包络的螺旋面。正是形成螺旋面的这种方法，才使我们得到展成刀具的成形基础。得到的一般公式应用于用得最多的曲面，其中也包括砂轮的锥面。

第八章叙述了包络运动原理。近来，包络运动原理由于它在几何和运动方面的优点，愈来愈显示其重要性。在科尔马克（Cormac）的名著[30]和 А. Ф. 尼科拉耶夫（А. Ф. Николаев）的博士论文"空间啮合的运动原理"等著作中，只有 А. Ф. 尼科拉耶夫（А. Ф. Николаев)的论文首次对研究的理论作了数学说明。这里以前章为基础作了严密的理论阐述。应用合成运动的概念，以运动学观点来研究双参数曲面族，可得到在许多具体情况下求特征线的新定理（见第二篇第八章的定理 4 、定理 5 、定理 6 ）。

本章详细研究了物体运动的主要形式，得到了座标轴在最一般位置时的特征线解析方程、运动的合成与分解，从而结合上述理论找到了更简单的求特征线方法。扼要叙述了在这种情况下螺旋共轭轴的性质和螺旋的几何图象（Николаев 螺旋图）。在 А. Ф. 尼科拉耶夫（А. Ф. Николаев）的著作[13]中，有更详细的理论说明。但是，螺旋图并不适合所有情况。分解合成运动时，在分运动之一是直移运动的简单情况下，螺旋图无所裨益。此时以及在其他许多情况下，只能用解析法求特征线。

本书第三篇对前两篇所述理论在刀具设计中的应用作了说明。

设计刀具所遇到的螺旋面可分为三大类：

（1）切削刃作螺旋运动时所形成的螺旋面。这种螺旋面见之于外圆车刀、钻头、扩孔钻、铰刀、丝锥、板牙、切丝头这样一些切削刀具。在螺旋运动中，切削刃的每一点描绘出一条螺旋线。

（2）使刀具前刀面成形的螺旋面。这种螺旋面在螺旋槽铣刀和麻花钻等的结构中均可见到。

（3）使刀具后刀面成形的螺旋面。后刀面的成形，对于刀具的重磨是很重要的，直线切削刃重磨后仍成直线的重要性就是一例。直线螺旋运动形成的线性螺旋面能满足这个要求。

螺旋面作为刀具后刀面应用在下列刀具中：1）按螺旋面铲切后刀面的钻头；2）按线性螺旋面铲齿的齿轮滚刀和花键滚刀；3）按渐开线螺旋面铲齿的插齿刀等等。

在刀具理论方面，有许多重要的著作，首先是 И. И. 谢明钦柯（И. И. Семенченко）[19]、Г. И. 加拉诺夫斯金（Г. И. Грановский）[8]、Н. А. 舍瓦钦科（Н. А. Шевченко）[26]、В. А. 希什科夫（В. А. Шишков）[27]、[28]的著作。其次，较近期的有：А. Ф. 尼科拉耶夫（А. Ф. Николаев）、Ю. В. 茨维斯（Ю. В. Цвис）[25]、П. Р. 罗金（П. Р. Родин）[16] 等的著作。在外国的学者中，应该提到科尔马克(Cormac)[30]、福格利(Vogel)[35]、什丘巴列尔(Штюблер)等的著作。

本书不同于其他许多著作之处：所提出的问题有很大的普遍性，解决这些问题在数学上的严密性、使用的研究方法相当简易。前两部分中所述数学资料，主要应用于按包络法工作的刀具成形，可对现有刀具进行分析、改进设计和制造，以及发明新型刀具。

第九章叙述了展成刀具作图的一般问题，利用不同刀具的作图，提出了解决这些问题的办法。第十章和第十一章列有包络法加工阿基米德、渐开线和护轴线螺旋面刀具的计算。

目　录

第三篇 螺旋面在刀具造形上的应用

第一篇　螺旋线和螺旋面原理

第一章　螺　旋　线

一、常螺旋线的基本概念

由绕定轴V旋转并且同时平行于该轴移动所构成的合成运动，称为螺旋运动。轴V称为螺旋轴。

我们用$\bar{u}$表示在平行于轴V直线上的移动速度向量，用$\bar{\omega}$表示旋转角速度向量。后者在螺旋轴上应这样绘出，使之从向量的终端看，朝逆时针方向旋转。

如果$\bar{\omega}$和$\bar{u}$的方向相同，则称为右螺旋运动；如果$\bar{\omega}$和$\bar{u}$的方向相反，则称为左螺旋运动。

螺旋轴V旋转一转时，动点在其上的投影所移动的距离，称为螺旋运动的导程。如果移动速度向量值u和角速度向量值ω之比为一定值，则称为常螺旋运动，而该比值称为常螺旋运动参数：

$$p=\frac{u}{\omega}$$

所谓螺旋（运动的），就是两个向量$\bar{\omega}$和$\bar{u}$的合成，并记作（V，ω，p）。此处V——螺旋轴；p——螺旋参数。如果给定螺旋，则可知螺旋运动。反之亦然。

当$p=0$（$u=0$）时，仅有绕轴的旋转，并记作（V，ω）；当$p=\infty$（$\omega=0$）时，只沿直线运动，有时也称为直移运动。

一点作常螺旋运动的轨迹称为常（圆柱）螺旋线，它位于以V为轴的圆柱上，半径等于该点到轴V的距离。

如果令速度是时间t的函数：$u=u(t)$，$\omega=\omega(t)$，在直线上的移动量为h，直线绕螺旋轴的转角为φ，则有：

$$\frac{dh}{dt}=u(t);\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\omega(t);\qquad p=\frac{u}{\omega}=\text{常数}$$

于是：

$$dh=p\,d\varphi;\qquad h=p\varphi;\qquad p=\frac{h}{\varphi}$$

式中　积分常数等于零。

当旋转一弧度（即$\varphi=1$）时，点沿直线移动的距离为p，故螺旋参数亦称为螺旋运动或螺旋线的诱导导程。

当转角$\varphi=2\pi$时，相应的移动量为$H=2\pi p$，该值称为螺旋的导程。

如果在螺旋运动中移动量h和对应转角φ之比为一常数C，即：

$$\frac{h}{\varphi}=C$$

则：

$$h=C\varphi;\qquad \frac{dh}{dt}=C\frac{d\varphi}{dt}$$

那么

$$\frac{u}{\omega}=C$$

即螺旋参数为一常数，而在这个螺旋运动中任一点的轨迹是常螺旋线。如果构成螺旋运动的直移和旋转运动是匀速运动，那么，亦可得到同样的轨迹。

如果一点在一直线上移动并绕平行于该直线的轴旋转所构成的合成运动中，螺旋参数$p=\dfrac{u(t)}{\omega(t)}$是与时间有关的变数，那么，该点的轨迹将位于由直线旋转所形成的圆柱上，我们称它为变导程圆柱螺旋线，或轴向变导程圆柱螺旋线。

下面所研究的常（圆柱）螺旋线，系指一般螺旋线和变导程螺旋线。

二、圆向量函数

在空间右手直角座标系$Oxyz$的座标平面Oxy中，二单位向量$\bar{e}(t)$和$\bar{g}(t)$，分别和轴Ox夹角t和$t+\dfrac{\pi}{2}$（图 1.1）。角t是面对轴Oz正向观察按逆时针方向计量的。如果$\bar{i}$、$\bar{j}$㊀、$\bar{k}$为直角座标轴的单位向量，则确定圆向量函数的公式为：

$$\left.\begin{aligned}\bar{e}(t)&=\bar{i}\cos t+\bar{j}\sin t\\ \bar{g}(t)&=-\bar{i}\sin t+\bar{j}\cos t\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

显然，$\bar{e}(0)=\bar{i}$，$\bar{g}(0)=\bar{j}$。改变t时，$\bar{e}$的端点描绘单位半径㊁的圆。半径为a的圆方程为：

$$\bar{r}=a\bar{e}(t)$$

式中　$\bar{r}$——圆周上一点的向径。

向量$\bar{e}(t)$对t求导数，就是向量$\bar{g}(t)$：

$$\frac{d\bar{e}}{dt}=\bar{g}(t)\tag{1.2}$$

即$\bar{g}(t)$——沿角t增大方向的圆之切线向量。

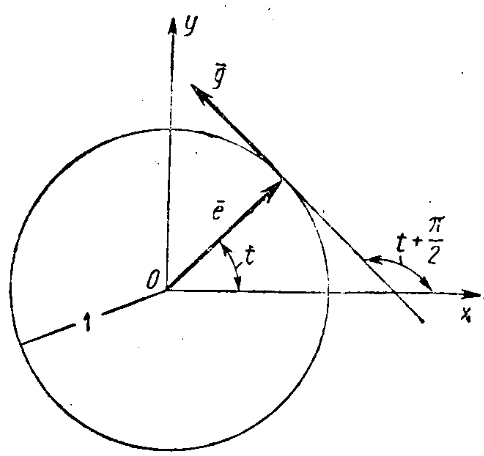

图 1.1

导数

$$\frac{d\bar{g}}{dt}=-\bar{e}(t)\tag{1.3}$$

也是单位向量，但沿半径的方向并过圆心。

这些向量的标量积：

㊀ 原书误为$\bar{f}$——译注。

㊁ 即半径等于1——译注。

$$\bar{e}^2=\bar{g}^2=1;\quad \bar{e}\bar{g}=0;\quad \bar{e}\bar{k}=\bar{g}\bar{k}=0$$

向量积：

$$\bar{e}\times\bar{g}=\bar{k};\quad \bar{g}\times\bar{k}=\bar{e};\quad \bar{k}\times\bar{e}=\bar{g} \tag{1.4}$$

利用圆向量函数，可以确定用极座标（ρ，φ）表示的平面上给定一点的位置：

$$\bar{\rho}=\rho\bar{e}(\varphi) \tag{1.5}$$

（1）圆向量函数的加法公式　角变量和的圆向量函数，用每个角变量的圆向量函数表示为：

$$\left.\begin{aligned}\bar{e}(\theta+v)&=\bar{i}\cos(\theta+v)+\bar{j}\sin(\theta+v)\\ \bar{e}(\theta+v)&=\bar{e}(\theta)\cos v+\bar{g}(\theta)\sin v\\ \bar{e}(\theta+v)&=\bar{e}(v)\cos\theta+\bar{g}(v)\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

但是，因向量 $\bar{e}(\theta+v)$ 是向量 $\bar{e}(\theta)$ 绕座标原点转过 v 角所得，因而，公式（1.6）也是向量 $\bar{e}(\theta)$ 绕座标原点逆时针转过 v 角的定则。

同理可证：

$$\left.\begin{aligned}\bar{g}(\theta+v)&=-\bar{e}(\theta)\sin v+\bar{g}(\theta)\cos v\\ \bar{g}(\theta+v)&=-\bar{e}(v)\sin\theta+\bar{g}(v)\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

（2）向量在空间的旋转和螺旋运动　如果在空间 $Oxyz$ 中，圆柱座标为 $(\rho_0,\ \varphi_0,\ z_0)$ 的一点 M_0 之向量为：

$$\bar{\lambda}=\bar{i}\lambda_1+\bar{j}\lambda_2+\bar{k}\lambda_3$$

那么，作为刚体的 $\bar{\lambda}$ 绕轴 Oz 旋转 φ 角并平行于轴 z 移动 $p\varphi$ 的长度后，得向量：

$$\overline{\Lambda}=\lambda_1\bar{e}(\varphi_0+\varphi)+\lambda_2\bar{g}(\varphi_0+\varphi)+\bar{k}(\lambda_3+p\varphi)$$

三、常螺旋线方程

已知螺旋运动（V，ω，p）。我们取 V 为右手笛卡儿坐标系的轴 Oz。φ 和 h 的含义和前述相同：

$$\frac{d\varphi^{㊀}}{dt}=\omega;\quad \frac{dh}{dt^{㊁}}=u;\quad p=\frac{u}{\omega}=\text{常数}$$

此时，作螺旋运动的点 $M(x,\ y,\ z)$ 之向径 $\bar{r}$ 按下式确定（图 1.2）：

$$\left.\begin{aligned}\overline{OP}=a\bar{e}(\varphi),&\quad \overline{PM}=h\bar{k}\\ \bar{r}=a\bar{e}(\varphi)&+h\bar{k}\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

在最简单的情况下，$\varphi=\omega t$、$h=ut$、$u=p\omega$，常螺旋线的向量方程为：

$$\left.\begin{aligned}&\bar{r}=a\bar{e}(\omega t)+ut\bar{k}\\ \text{或}\quad&\bar{r}=a\bar{e}(\varphi)+p\varphi\bar{k}\\ \text{或}\quad&\bar{r}=\bar{i}a\cos\varphi+\bar{j}a\sin\varphi+\bar{k}p\varphi\end{aligned}\right\} \tag{1.8'}$$

螺旋线的参数方程为：

$$x=a\cos\varphi;\quad y=a\sin\varphi;\quad z=p\varphi \tag{1.9}$$

如果分运动是变速运动，则：

㊀ 原书误为 $d\omega$——校注。

㊁ 原书误为 di——校注。

$$\varphi = \int \omega dt; \quad h = \int u dt = p\int \omega dt = p\varphi$$

将其代入方程（1.8），则得螺旋线方程。在圆柱坐标（ρ，φ，z）中，常螺旋线方程为：

$$\rho = a; \quad z = p\varphi \qquad (1.9')$$

螺旋线在坐标平面 Oxy 上的投影是一个圆，称为基圆：

$$\bar{r} = a\bar{e}(\varphi)$$

或

$$x = a\cos\varphi; \quad y = a\sin\varphi; \quad x^2 + y^2 = a^2$$

在平面 Oyz 上的投影为正弦曲线：

$$y = a\sin\varphi; \quad z = p\varphi$$

或

$$y = a\sin\frac{z}{p}$$

在平面 Oxz 上的投影为余弦曲线（或移位正弦曲线）：

$$x = a\cos\varphi; \quad z = p\varphi$$

或

$$x = a\cos\frac{z}{p}$$

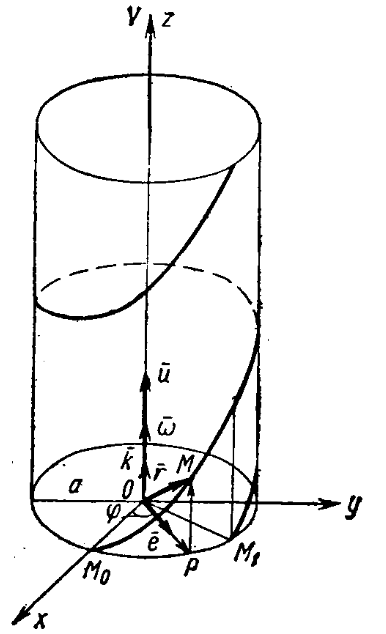

图 1.2

如果从下列方程组中用$\frac{z}{p}$消去 φ：

$$x^2 + y^2 = a^2; \quad \frac{y}{x} = \mathrm{tg}\varphi$$

那么，螺旋线可看成是两个曲面的交线，即圆柱面

$$x^2 + y^2 = a^2$$

和阿基米德正螺旋面（劈锥曲面）

$$y = x\,\mathrm{tg}\frac{z}{p}$$

的交线。

如果螺旋线和平面 Oxy 不相交于点 M_0（图1.2），而是相交于基圆的另外某一点 M_1，且 $\angle M_1Ox = \varphi_1 \gtrless 0$，则螺旋线方程为：

$$x = a\cos\varphi; \quad y = a\sin\varphi; \quad z = p(\varphi - \varphi_1)$$

如果在后一种情况下，从半径 OM_1 计算 φ 角，则螺旋线方程为：

$$x = a\cos(\varphi_1 + \varphi); \quad y = a\sin(\varphi_1 + \varphi); \quad z = p\varphi$$

方程（1.9）可确定 $p > 0$ 时的右螺旋线和 $p < 0$ 时的左螺旋线。

如果设 $p > 0$，那么左螺旋线（图 1.3）由下列方程确定：

$$x = a\cos\varphi; \quad y = a\sin\varphi; \quad z = -p\varphi$$

我们来研究与平面 Oxy 成 ψ 角的平行线束所形成的螺旋线（1.9）之投影。取投影方向平行于平面 Oxz㊀。设螺旋线上一点 $M(x, y, z)$ 的投影为点 $M_1(x_1, y_1, 0)$，且直线

㊀ 原文为 xz——校注。

MM_1 与平面 Oxy 夹角 ψ。显然，由图 1.4 得 $x_1 - x = z\mathrm{ctg}\psi$，$y_1 = y$。因而，任一点 M_1 的轨迹决定于下列方程：

$$x_1 = a\cos\varphi + b\varphi;\quad y_1 = a\sin\varphi$$

式中

$$b = p\mathrm{ctg}\psi$$

当 $b = a$ 时，得摆线，它就是半径为 a 的圆沿直线作无滑动的滚动时圆周一点的轨迹。$b \neq a$ 时，得变态摆线。比值 $\frac{b}{a}$ 称为滚动系数。

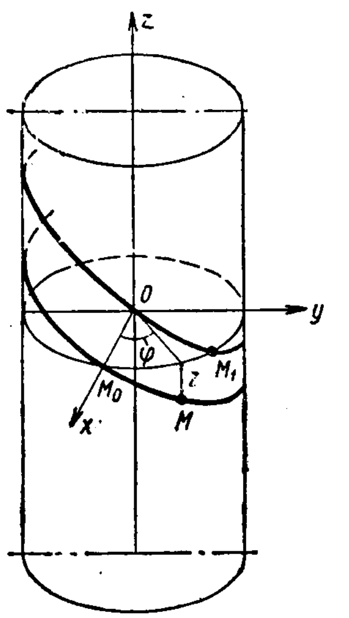

图 1.3

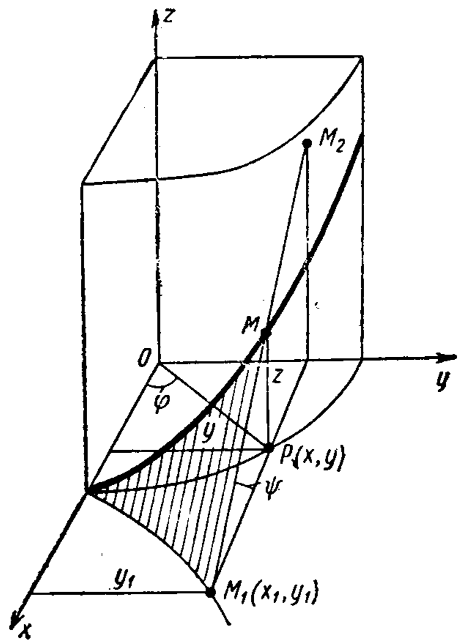

图 1.4

如果点 $M_2(O,\ y_2,\ z_2)$ 是直线 MM_1 和座标平面 Oyz㊀ 的交点（图 1.4），则：

$$z_2 - z = x\mathrm{tg}\psi;\quad y_2 = y$$

因而，同一束平行线把螺旋线投影到垂直平面 Oyz㊀ 上为曲线：

$$y_2 = a\sin\varphi;\quad z_2 = m\cos\varphi + p\varphi$$

式中 $m = a\mathrm{tg}\psi$。这条曲线是摆线，但是仿射变换的。

螺旋线从座标原点到平面 $z = h$ 的中心投影在极座标（r，φ）中由下列关系式（图 1.5）确定：

$$\frac{r}{a} = \frac{h}{z}$$

式中 $r = OM_1$㊁。

令 $b = \frac{ah}{p}$，此时投影为双曲螺线：

$$r = \frac{b}{\varphi}$$

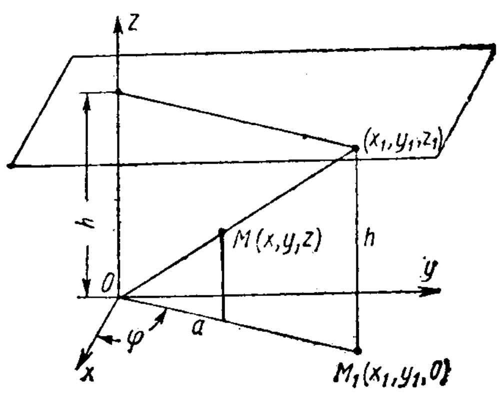

图 1.5

㊀ 原文为 yz——校注。

㊁ 原文为 OM，应为 OM_1——校注。

如果螺旋线自轴 z 的某点 $A(0, 0, h)$ 投影到平面 Oxy，我们得到，

$$\frac{r}{a}=\frac{h}{h-z}$$

投影的极座标方程为：

$$r=\frac{h}{c-\varphi}$$

它确定同一双曲螺线，但绕极点的转角为 $c=\frac{h}{p}$。

四、切线和法平面

曲线 $\bar{r}=\bar{r}(t)$ 在某点 $M(\bar{r})$ 的切线向量 $\bar{r}=\{x, y, z\}$ 由导数 $\frac{d\bar{r}}{dt}$ 或微分 $d\bar{r}$ 确定。切线的单位向量 $\bar{\tau}=\frac{d\bar{r}}{ds}$，此处 s ——曲线弧长；向量的模 $|d\bar{r}|=ds$。

对在构架（$\bar{e}$，$\bar{g}$，$\bar{k}$）中的螺旋线（1.8），我们有：

$$\frac{d\bar{r}}{d\varphi}=a\bar{g}(\varphi)+p\bar{k} \tag{1.10}$$

这个公式是螺旋线切线向量的最简形式，且给出了 a 与 p 为定值时沿基圆切线 $\bar{g}$ 和螺旋轴 $\bar{k}$ 的向量投影。向量本身位于平面（$\bar{g}$，$\bar{k}$）或和基圆柱母线 MP 相切的平面内（图 1.6㊀）。根据其投影，可求得切线和轴 Oz 以及和平面 Oxy 的夹角。我们把螺旋线上点 M 的切线和螺旋轴的夹角记作 γ_1，而和平面 Oxy 亦即和向量 $\bar{g}$ 的夹角记作 θ，此时，由公式（1.10）得：

$$\mathrm{tg}\gamma_1=\frac{a}{p}=\text{常数}$$

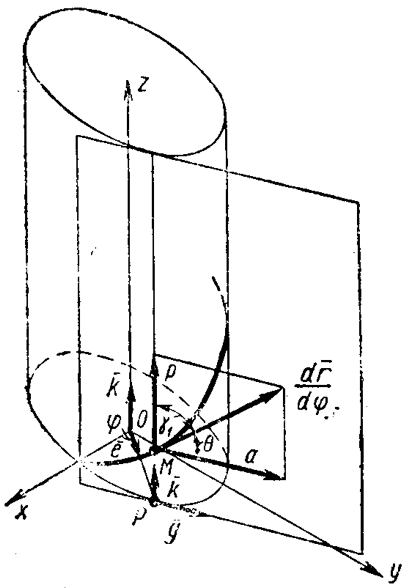

图 1.6

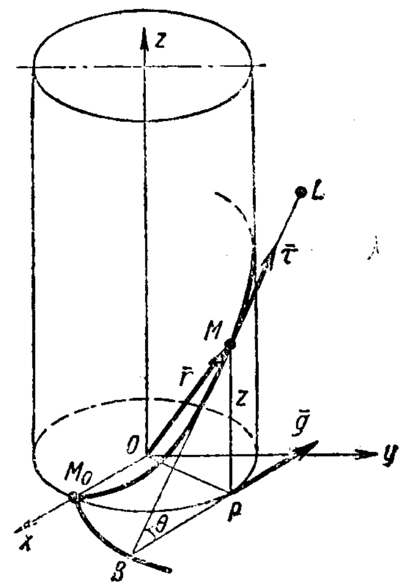

图 1.7

㊀ 原文为图1.7，应为图1.6——校注。

螺旋线的第一性质：螺旋线上各点的切线和螺旋轴夹定角γ_1，或者说螺旋线和圆柱的所有母线相交成定角γ_1。螺旋线的这个基本性质可作为定义而由此得方程（1.9）。

定角θ称为螺旋线升角：

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{p}{a}=\frac{H}{2\pi a};\quad \theta=\mathrm{arctg}\frac{p}{a}$$

1. 弧长

我们算得：

$$d\bar{r}=[a\bar{g}(\varphi)+p\bar{k}]d\varphi \tag{1.11}$$

$$ds=|d\bar{r}|=\sqrt{a^2+p^2}\,d\varphi \tag{1.12}$$

自点$M_0(\varphi=0)$到点M的螺旋线弧长s为（图1.2）：

$$s=\int_0^{\varphi}\sqrt{a^2+p^2}\,d\varphi=\sqrt{a^2+p^2}\,\varphi \tag{1.13}$$

对于同一数值的参数φ，基圆弧$\sigma=\widehat{M_0P}$⊖就是螺旋线在平面Oxy上的投影：

$$\sigma=a\varphi \tag{1.14}$$

螺旋线的第二性质：螺旋线弧长s和对应的基圆弧长成正比：

$$s=\sqrt{1+\left(\frac{p}{a}\right)^2}\,\sigma;\quad \sigma=s\sin\gamma_1 \tag{1.15}$$

切线的单位向量：

$$\bar{\tau}=\frac{d\bar{r}}{ds}=\frac{a}{\sqrt{a^2+p^2}}\bar{g}+\frac{p}{\sqrt{a^2+p^2}}\bar{k} \tag{1.16}$$

这个公式可把单位向量$\bar{\tau}$分解为单位向量$\bar{g}$和$\bar{k}$，因此，$\bar{\tau}$的投影是$\bar{\tau}$和$\bar{g}$与$\bar{k}$夹角的方向余弦，即：

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{пp}_{xy}\bar{\tau}=\frac{a}{\sqrt{a^2+p^2}}\bar{g};\quad \frac{a}{\sqrt{a^2+p^2}}=\cos\theta\\&\mathrm{пp}_{z}\bar{\tau}=\frac{p}{\sqrt{a^2+p^2}}=\cos\gamma_1=\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

分解$\bar{\tau}$为座标轴的单位向量：

$$\bar{\tau}=\frac{-a\sin\varphi}{\sqrt{a^2+p^2}}\bar{i}+\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{a^2+p^2}}\bar{j}+\frac{p}{\sqrt{a^2+p^2}}\bar{k} \tag{1.18}$$

得$\bar{\tau}$在座标轴上的投影。如果把切线和座标轴的夹角分别记作α_1、β_1、γ_1，则得切线的方向余弦为：

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_1&=\frac{dx}{ds}=\frac{-a\sin\varphi}{\sqrt{a^2+p^2}}\\\cos\beta_1&=\frac{dy}{ds}=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{a^2+p^2}}\\\cos\gamma_1&=\frac{dz}{ds}=\frac{p}{\sqrt{a^2+p^2}}\end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

螺旋线的第三性质：螺旋线的所有切线与螺旋轴的垂直平面沿基圆渐开线相交。

⊖ 原文为$\widehat{MP_0}$，有误——校注。

实际上，螺旋线M点的切线投影在平面Oxy上为基圆在P点的切线，且与该投影夹角θ（图1.6）。为了求出B点，即切线和平面Oxy的交点（图1.7）㊀，应当从直角$\triangle BPM$算出基圆的切线线段：

$$BP = z\mathrm{ctg}\theta = a\varphi$$

此线段等于点$M_0(\varphi=0)$到点P的基圆弧长，它在点P的切线上沿与$\bar{g}$相反的方向绘出，且在基圆的常渐开线上形成一点。

直线BP是基圆渐开线在B点的法线即主法线，平面BPM是渐开线的法平面。与基圆柱螺旋线相切的直线BM，是基圆渐开线的一条法线。

因为任意曲线Γ_1的渐开线是这样的曲线Γ，它的法线是Γ_1的切线，所以基圆的渐开线也是常螺旋线的渐开线。螺旋线本身是圆的渐开线的一条空间渐屈线。

2. 切线作图

如果作基圆渐开线，即作对应于φ角的一点B，则利用直角$\triangle BPM$容易作出对应于同一φ角的螺旋线M点的切线BM。螺旋线上M点切线的水平投影和垂直投影图形如图1.8所示。

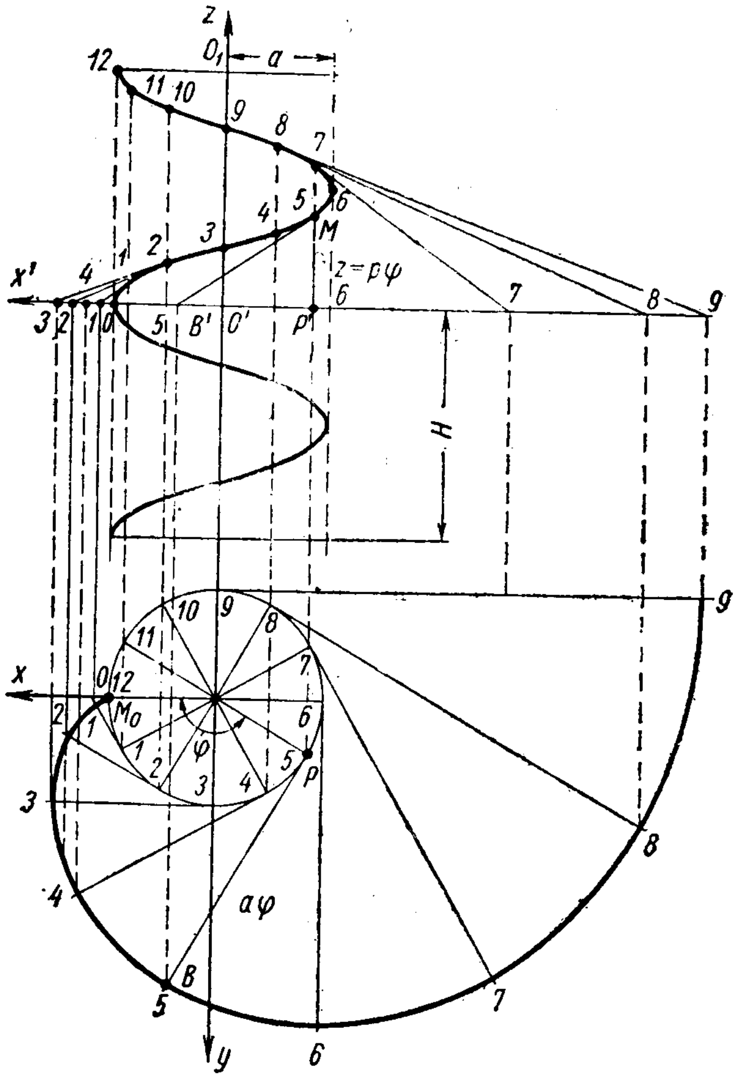

图 1.8

螺旋线上M（$\bar{r}$）点(图1.7)切线的向量方程为：

$$\bar{R} = \bar{r} + u\bar{\tau} \qquad (1.20)$$

式中　$\bar{R}$——切线上一点L（X，Y，Z）的向径；

u——确定切线上一点L的位置的参数，$u=ML$。

切线方程的座标形式为：

$$X = x + u\cos\alpha_1$$

$$Y = y + u\cos\beta_1$$

$$Z = z + u\cos\gamma_1$$

或

$$\frac{X - a\cos\varphi}{-a\sin\varphi} = \frac{Y - a\sin\varphi}{a\cos\varphi} = \frac{Z - p\varphi}{p}$$

螺旋线在M点的法平面向量方程为：

$$(\bar{R} - \bar{r})\,\bar{\tau} = 0$$

式中　$\bar{R}$——法平面上一点的向径。

写成座标形式为：

㊀ 原文为图1.6，有误——校注。

$$X a\sin\varphi - Y a\cos\varphi - pZ^{㊀} + p^2\varphi = 0$$

式中　X，Y，Z——法平面上一点的座标。

五、主法线，曲率，化直平面

$\bar{\tau}$㊁对弧 s 的导数，就是曲线的主法线向量。把主法线的单位向量记作 $\bar{\nu}$，向量模记作 K，此时：

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = K\bar{\nu} \tag{1.21}$$

根据方程（1.16）和（1.12），可直接求出 K：

$$d\bar{\tau} = \frac{a\,d\bar{g}}{\sqrt{a^2+p^2}} \tag{1.22}$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{-a}{a^2+p^2}\bar{e} \tag{1.22'}$$

所以：

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = K = \frac{a}{a^2+p^2} \tag{1.23}$$

由曲率向量定义（1.21）和方程（1.22′）得：

$$\bar{\nu} = -\bar{e} \tag{1.24}$$

这个公式表明，主法线的单位向量和向量 $\bar{e}$ 共线，而方向相反。公式（1.24）表示了螺旋线的第四性质：螺旋线每点的主法线和螺旋轴垂直且相交。

公式（1.23）表示了螺旋线的第五性质：螺旋线每点的曲率为常数。

如果令基圆曲率 $K_1 = \dfrac{1}{a}$，并且把公式（1.23）改写成

$$K = \frac{a^2}{a^2+p^2}K_1$$

或

$$K = K_1\sin^2\gamma_1 = K_1\cos^2\theta$$

则得螺旋线的曲率和它在平面 Oxy 上投影的曲率成正比。

曲率的倒数称为曲率半径：

$$\frac{1}{K} = \frac{a^2+p^2}{a} \tag{1.25}$$

由公式（1.24）可知，主法线的单位向量为：

$$\bar{\nu} = -\bar{i}\cos\varphi - \bar{j}\sin\varphi \tag{1.26}$$

因为单位向量的座标总是它的方向余弦，故如用 α_2、β_2、γ_2 表示 $\bar{\nu}$ 和座标轴的夹角，则可得螺旋线上某点主法线的方向余弦为：

$$\cos\alpha_2 = -\cos\varphi;\quad \cos\beta_2 = -\sin\varphi;\quad \cos\gamma_2 = 0 \tag{1.27}$$

螺旋线上点 M（$\bar{r}$）的主法线向量方程为：

$$\bar{R} = \bar{r} + u\bar{\nu} \tag{1.28}$$

㊀ 原文为 pz，应为 pZ——校注。

㊁ 原文为 τ，有误——校注。

式中　$\bar{R}$——主法线上一点的向径；

u——确定主法线上一点位置的参数。

写成座标形式：

$$X = a\cos\varphi - u\cos\varphi;\quad Y = a\sin\varphi - u\sin\varphi;\quad Z = p\varphi$$

或

$$\frac{X - a\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{Y - a\sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{Z - p\varphi}{0}$$

式中　X、Y、Z——$\bar{R}$的座标。

主法线在平面Oxy上投影的方程为：

$$Y = X\,\mathrm{tg}\varphi$$

曲线在M点的主法线之垂直平面，称为曲线在M点的化直平面。螺旋线在M点的化直平面之向量方程为：

$$(\bar{R} - \bar{r})\,\bar{\nu} = 0$$

写成座标形式：

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi - a = 0$$

式中　$\bar{R}\{X,\ Y,\ Z\}$——化直平面上一点的向径。

螺旋线的第六性质：圆柱上的常螺旋线是这个圆柱面上的短程线㊀。实际上，螺旋线的主法线就是圆柱面的法线，因而螺旋线是圆柱面上的短程线。

螺旋线是圆柱面上任意两个邻近点间最短的曲线（这两点不位于同一母线上或不位于和圆柱面母线垂直的同一圆上）。

曲面上的短程线具有每点之短程曲率㊁$K_g = 0$的性质。圆柱面上的螺旋线也具有这个性质。如果把螺旋线投影到圆柱面在M点的切平面上，则得正弦曲线（参见4页），其拐点落在M点内，而正弦曲线在这点的曲率等于零，但曲线在切平面的投影曲率也为K_g，因而螺旋线上每点的$K_g = 0$。

如果圆柱面在平面上展开，则螺旋线将是一条直线。大家知道，曲面弯曲时[24]角度保持不变，曲线的曲面短程曲率也不变。因为螺旋线和圆柱面的直母线交成定角，而直线展开时仍为直线，那末只有直线才可和这些直线夹成定角，因而，当圆柱面复叠到平面上时，螺旋线变成直线。用螺旋线的其他性质也可说明其短程曲率等于零，因平面上每条曲线的短程曲率是普通曲率，且曲面弯曲时，$K_g = 0$的值保持不变，所以螺旋线变成直线，它每点内的曲率等于零。

六、次法线和密切平面

通过曲线M点的切线和主法线的平面称为密切平面，而密切平面在M点的垂线是曲线在该点的次法线。大家知道，通过曲线切线的一束平面可称为曲线的切平面，其中有一个切平面在M点与曲线接触最紧密。如果在曲线上取相邻的一点M_1，它到M点的曲线弧长具有任意小的距离$MM_1 = \Delta s$，自点M_1引垂线到所有的切平面，那么M_1到密切平面的距离较到其

㊀ 曲面上一曲线的主法线在每一点处都与该曲面的法线重合时，该曲线称为曲面上的短程线——校注。

㊁ 原文误为短程曲线——校注。