经济数学基础
概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULITONGJI

吴涛 李南 主编

中国商业出版社

经济数学基础

——概率论与数理统计

吴 涛 李 南 主编

中国商业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计：经济数学基础 / 吴涛，李南主编 .－北京：中国商业出版社，2001.3

ISBN 7-5044-4048-5

Ⅰ.概… Ⅱ.①吴… ②李… Ⅲ.①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ.201

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 12029 号

责任编辑：马一波
策　　划：徐　尹

中国商业出版社出版发行
（100053 北京广安门内报国寺 1 号）
新华书店总店北京发行所经销
解放军炮兵学院印刷厂印刷
*
850 × 1168 毫米　大 32 开　9 印张　230 千字
2001 年 4 月出版　2001 年 4 月第一次印刷
定价：16.00 元
＊　＊　＊　＊
（如有印装质量问题可更换）

编写说明

世界经济已进入知识经济和信息经济时代,竞争日趋激烈,一个国家,一个地区乃至一个企业,要在这场竞争中立于不败之地,除大力发展科学技术外,还必须实现管理和决策的科学化,而管理和决策的对象往往具有随机性。概率论与数理统计就是研究随机现象及其规律性的数学学科,是研究和解决经济、管理问题的重要数学工具。因此,对于经济管理人员学好这门课程,具有极其重要的意义。

本书的主要内容有:随机事件及其概率,随机变量及其数字特征,中心极限定理,数理统计中的参数估计,假设检验,回归分析等内容。本书力求理论严谨,深入浅出,注重理论联系实际。为便于对基本理论和方法的掌握,本书列举较多的例题,并附有相当数量的习题。

吴涛编写第三、四、六、七、八章;李南编写第一、二、五章。

本书适用于经济、管理类专业的本、专科学生,也可作为经济、管理类人员参考。限于编者水平,书中错误难免,敬请读者不吝指教。

编　者

2001 年 3 日

目　录

第一章　随机事件及概率 ……………………………… (1)

第一节　随机事件 ……………………………… (1)

第二节　随机事件的概率及性质 ……………………… (7)

第三节　条件概率与事件的独立性 …………………… (20)

第四节　全概率公式与贝叶斯公式 …………………… (30)

第二章　随机变量及其分布 ……………………………… (36)

第一节　随机变量的定义及其分布函数 ……………… (36)

第二节　一维随机变量的分布 ………………………… (42)

第三节　二维随机变量的分布 ………………………… (66)

第四节　随机变量函数的分布 ………………………… (82)

第三章　随机变量的数字特征 …………………………… (92)

第一节　数学期望 ……………………………… (92)

第二节　方差与矩……………………………… (105)

第三节　协方差与相关系数…………………………… (115)

第四章　大数定律和中心极限定理……………………… (124)

第一节　大数定律……………………………… (124)

第二节　中心极限定理……………………………… (129)

第五章　样本分布……………………………… (135)

第一节　总体与样本……………………………… (136)

第二节　统计量及其分布…………………………… (140)

第六章　参数估计……………………………… (156)

第一节　点估计……………………………… (156)

第二节　估计量的优良性…………………………… (164)

第三节　区间估计……………………………………………… (168)

第七章　假设检验……………………………………………… (180)

第一节　假设检验的基本概念……………………………… (180)

第二节　单正态总体的假设检验…………………………… (185)

第三节　两个正态总体的假设检验………………………… (191)

第八章　回归分析及其应用…………………………………… (199)

第一节　一元回归分析……………………………………… (200)

第二节　多元回归分析……………………………………… (220)

附　表……………………………………………………………… (232)

一　标准正态分布的分布函数值表…………………………… (232)

二　普阿松分布的分布函数值表……………………………… (233)

三　t 分布表 ………………………………………………… (235)

四　χ^2 分布表 …………………………………………… (237)

五　F 分布表………………………………………………… (241)

六　相关系数表………………………………………………… (253)

七　杜宾-瓦特森检验统计量的下界和上界 ………… (257)

第一章　随机事件及其概率

第一节　随机事件

一、随机试验

为了研究事物的变化规律，需要对客观事物进行观察，观察的过程称为试验。

例 1：投掷一颗骰子，其出现的点数。

例 2：设一个口袋中共有 $n+m$ 个球，其中 n 个蓝球，m 个红球，搅匀后从袋中任取一球。

例 1 中，在投掷之前，不能确定所出现的点数，但必是 1，2，3，4，5，6 之一；例 2 中，在摸球这前，不能确定所取球的颜色，但必定为红，蓝中的一种。以上两个试验，虽然内容相距甚远，但它们有如下的共同特性：

（1）重复性：试验在相同的条件下可以重复；

（2）明确性：试验所有可能的结果是明确知道的，并且不止一个；

（3）随机性：在每次试验之前，不能确定试验将会出现哪一种结果。称这种试验为随机试验，记为 E。就一次试验而言，看不出什么规律，但“大数次”地重复这个试验，试验结果又遵循某种规律，如在例 1 中，在相同条件下，当掷的次数很大时，则各点数出现的次数大致相同，各占总次数的 $\frac{1}{6}$。

二、随机事件与样本空间

在概率论中，将试验的结果称为事件。一次试验中，可能发生也可能不发生，而在大量试验中具有某种规律性的事件称为随机事件，简称事件。通常用大写字母 A,B,C 来表示，如：在投郑骰子试验中：

A＝{出现的点数为 6}

B＝{出现的点数为偶数}

C＝{出现的点数小于等于 6}

D＝{出现的点数大于 7}

都是此试验的随机事件。

在随机事件中，有些可以看成是由某些事件复合而成的，而有些事件则不能分解为其它事件的组合。对于不能分解成其他事件组合的最简单的随机事件称为基本事件。如：事件 A 就是一个基本事件。事件 B,C 是由多个基本随机事件组成，称为复合事件。

每次试验中一定发生的事件称为必然事件，如事件 C。

每次试验中一定不会发生的事件称为不可能事件，如事件 D。

为便于研究，将基于事件称为样本点，用 ω 表示。一个随机试验的基本事件的全体称为样本空间，通常记为 Ω。由于试验的所有结果是明确的，因而其样本空间也是确定的。在例 1 的掷骰子试验中，

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

在例 2 的取球试验中，令

ω_1＝{取得红球}；ω_2＝{取得蓝球}；则 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$通常用 Ω 表示必然事件，用$\varnothing$表示不可能事件。

三、事件间的关系及运算

利用集合论的概念与方法，定义事件间的相互关系与运算。

1)随机事件间存在两种关系

(1)包含：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即：事件 A 中

的每个基本事件都包含在事件 B 中，则称事件 B 包含事件 A，或：事件 A 包含于事件 B。记作：

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A$$

对任何事件 A 都有：$\varnothing \subset A \supset \Omega$

(2)相等：若 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 同时成立。则称事件 A 与事件 B 相等。记作：

$$A = B$$

2)随机事件的运算

(1)和：事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的和(或并)。记作：

$$A \cup B$$

n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 中至少有一个发生的事件，称为事件 $A_i (i=1,2,\cdots,n)$ 的和，记作：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和表示可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生的事件。记作

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots\cdots$$

(2)积(交)：事件 A 和事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与 B 的积(或交)，记作：

$$A \cap B \text{ 或 } AB$$

有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 的积表示 n 个事件 $A_i (i=1,2,\cdots,n)$ 同时发生的事件。记作：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \text{，或简记为 } A_1 A_2 \cdots A_n$$

(3)差：包含在事件 A 中而不包含在事件 B 中的样本点的全体称为事件 A 与事件 B 的差，记作：

$$A - B$$

3)互不相容事件与对立事件

如果随机事件 A 与 B 不能同时发生，即：$A \cap B = \varnothing$，称事件 A 与 B 为互不相容事件。此时，记作

$$A \cup B = A + B$$

如果 $A \cap B = \varnothing$，且 $A \cup B = \Omega$，则称事件 A 与 B 为对立事件。记作：

$$B = \overline{A}$$

显然 A 与 B 互为对立事件，则 A 与 B 一定互不相容，反之不然。易证：

$$A\overline{A} = \varnothing \quad A + \overline{A} = \Omega \quad \overline{A} = \Omega - A \quad \overline{\overline{A}} = A$$

4）完备事件组

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互不相容的事件，并且：

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$

则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组。

显然：一个试验的全体基本事件构成一个完备事件组。

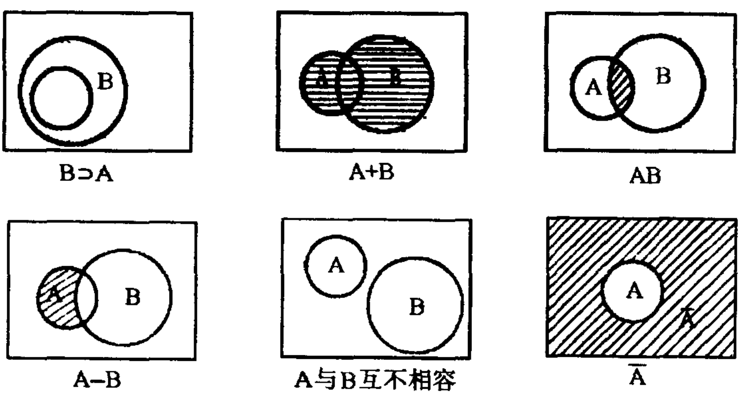

图 1-1

各事件的关系及运算如图 1-1 所示。

5）事件运算律

(1)交换律 $A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$

(2)结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3)分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4)De Morgan 定理 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

例 3:掷一粒骰子,观察其出现的点数。记事件 A={掷出偶数点},事件 B={掷出奇数点},事件 C={掷出的点数小于 5},事件 D={掷出的点数为 1},试写出 Ω,A,B,C,D,并讨论各事件间的关系。

解:掷一粒骰子,全部可能出现的基本结果有 6 种,即:掷出 1 点,2 点,…,6 点,则:

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{2,4,6\}$,$B=\{1,3,5\}$,$C=\{1,2,3,4\}$,$D=\{1\}$

显然,$B\supset D$,$C\subset D$,A 与 B 为对立事件,即:$B=\overline{A}$ A 与 D 为互不相容事件。

例 4:设 A,B,C,D 是四个事件,试用此四事件表示下列各事件:(1)这四个事件至少发生一个。(2)恰恰发生两个事件。(3)A、B 事件都发生而 C、D 事件都不发生。(4)这四个事件都不发生。(5)四个事件至多发生一个。

解:(1)$A\cup B\cup C\cup D$

(2)$AB\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}\,\overline{B}CD$

(3)$AB\overline{C}\,\overline{D}$

(4)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}=\overline{A\cup B\cup C\cup D}$

(5)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$

由此可见,列出事件的表达式时,首先要明确所讨论事件的含义,然后根据事件各种运算的意义,分析所给事件是经过事件 A,B,C,D 何种运算形成的,最后写出此事件的表达式。但应该说明

的是：由于分析的角度不同，有的事件可能有不同的，但可以相互转化的表达式。

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间及下列事件包含的样本点：

(1)掷一颗骰子，出现奇数点。

(2)将一枚均匀硬币抛两次。

A：第一次出现正面

B：两次出现同一面

C：至少有一次出现正面

(3)在 1,2,3,4 四个数中，可重复地取两个数，其中一个数是另一个数的两倍。

(4)将 a,b 两封信随机地投到三个信箱中，第一个信箱中至少有一封信。

(5)两个袋子中各装一只白球和一只黑球，从第一袋中任取一球，记下其颜色，再放入第二袋，搅匀后再从第二袋中任取一球。

A：两次取出的球有相同的颜色

(6)掷两颗骰子。

A：出现的点数之和为奇数，且其中恰好有一个 1 点

B：出现点数之和为偶数，但没有一颗出现 1 点。

2. 设 $\Omega=\{$小于或等于 10 的自然数$\}$

$A=\{2,3,4\}$　$B=\{3,4,5\}$　$C=\{5,6,7\}$

具体写出下列事件的样本点

(1)$\overline{A}B$　(2)$\overline{A}\cup B$　(3)$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$　(4)$\overline{A\overline{B}C}$　(5)$\overline{A\cap(B\cup C)}$

3. 在给定的条件下，连续进行三次试验，事件 A_i 表示第 i 次试验成功，$i=1,2,3$ 用文字叙述下列事件表示的试验结果。

(1)$\overline{A_1}$　(2)$\overline{A_1A_2}$　(3)$\overline{A_1A_2}$　(4)$\overline{A_1A_2}A_3$　(5)$A_2\cup A_1\cap A_3$

(6)$A_1A_2A_3$　(7)$A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$　(8)$A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$

4. 在经济学院学生中任选一名学生，令事件 A 表示选出的是男生，事件 B 表示选出的是二年级学生，事件 C 表示该生是党员。

(1)叙述事件 $AB\overline{C}$ 的意义

(2)在什么条件下，$ABC=C$ 成立？

(3)在什么条件下 $C\subset B$ 是正确的

(4)在什么条件 $\overline{A}=C$

5. 指出下列各等式命题是否成立，并说明理由。

(1)$A\cup B=(A\overline{B})\cup B$　(2)$\overline{A}B=A\cup B$

(3)$\overline{A\cup B}\cap C=\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$　(4)$(AB)(A\overline{B})=\varnothing$

6. 设向一指定目标连射 3 枪，以 A_i 表示第 i 枪击中目标($i=1,2,3$)，借助于 A_1,A_2,A_3 及事件的运算表示下列各事件。

(1)第一枪、第三枪中至少有一枪击中

(2)只有第一枪击中

(3)只击中一枪

(4)至少击中一枪

(5)三枪都没有击中

(6)三枪都击中

7. 统计每日上午 10 时到 11 时某交换台收到的呼唤次数，设"呼唤次数为 1000 到 2000"为事件 A，"呼唤次数为 500 到 1500"为事件 B。试用语言描述 $\overline{A},\overline{B},A\cup B$ 及 $A\cap B$。

8. 20 件产品中有 15 件一级品，5 件二级品，设"取出的产品是一级品"为事件 A，"取出的产品都不是一级品"为事件 B，"取出的产品不都是一级品"为事件 C，试确定 A，B，C 中任意两个事件间的关系。

第二节　随机事件的概率及其性质

随机事件在一次试验中发生与否是不确定的，但在"大次数"

的试验中它又呈现一定的规律性，一个随机事件发生的可能性，概率论中是通过概率来衡量的。历史上，概率有古典定义，统计定义和公理化定义等定义形式。

一、概率的统计定义

定义1　设随机事件A在重复n次同样的随机试验中出现r次，称比值$\frac{r}{n}$为这n次随机试验中事件A出现的频率，记作$\omega_n(A)$，即：

$$\omega_n(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{出现的次数}}{\text{试验次数}} \tag{1}$$

显然：$\omega_n(A)\in[0,1]$，且在重复n次同样的试验中，若A是必然事件，A出现的次数$r=n$，若A为不可能事件，则A出现的次数为0。故：必然事件的频率为1，不可能事件的频率为0。

经验表明：在相同条件下，大次数重复试验中随机事件A的频率具有一种稳定性。它的数值在某个确定常数附近波动。而且，一般地，试验次数越多，事件A的频率越接近于这个常数。例如：掷硬币的一些结果如表1-1。

表1-1

试验者	抛掷次数(n)	正面出现次数(m)	正面出现的频率(m/n)
德·摩尔根	2048	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

从表中可以看出：出现正面的频率，随着抛掷次数的增多，越来越接近0.5，在“大次数”重复试验中，事件频率稳定性中的常数

是随机事件的一个属性,它便是事件发生可能性的大小。

定义 2 在不变的条件下,重复进行 n 次试验,事件 A 发生的频率稳定地在某一常数附近摆动,且一般地,n 越大,摆动幅度越小,则称此常数为随机事件 A 发生的概率,记作:P(A)。

在上例中,硬币正面朝上的概率是 0.5。

一个事件发生的概率取决于事件本身的结构,是先于试验而存在的,概率的统计定义仅仅指出了事件概率的客观存在,并不能用这个定义来计算概率 P(A)。

二、概率的古典定义

定义 3 如果随机试验具有如下特征:

(1)有限性:试验的样本空间是有限的,也就是样本空间只含有限个基本事件,即:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

(2)等概性:每个基本事件发生的概率是相同的。即:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

则随机事件 A 的概率定义为:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{事件 A 所包含的样本点的个数}}{\text{样本点的总数}} \tag{2}$$

这种等可能的数学模型是概率论发展初期的主要研究对象,称为古典概型。古典概型的关键在于确定样本点总数以及有利于事件 A 的样本点的个数。

例 1:在盒子中有 10 个相同的球,分别标号为 1,2,…,10,从中任取一球,求此球的号码为偶数的概率。

解:令 $\imath$={所取球的号码为 $\imath$},$\imath$=1,2,…,10　则:

$$\Omega = \{1, 2, \cdots, 10\}$$

故基本事件总数 n=10,

令 A={所取球的号码为偶数}。则

$$A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{8\} \cup \{10\} = \{2,4,6,8,10\}。$$

故 A 中含有 $n_A=5$ 个基本事件，从而

$$P(A) = n_A/n = 5/10 = \frac{1}{2}$$

例 2：某镇上共有自行车 100 辆，牌照号从 001 到 100，试求事件 A："偶然遇到一辆自行车，其牌照号有数字 8 的概率有多大？"

解：显然样本总数 $n=100$，下面确定 A 中所包含的样本点数，因百位上只有 0，1 两个数，故可以不考虑，个位数上出现 8 的情况有 10 种，如：008，018，…098，同样十位数上出现 8 的情况也有 10 种，如：080，081，…，089，但由于数字 88 在两种情形中都作了计算，即计算了两次。因此，A 中所包含的样本点的个数为 19，从而：

$$P(A) = 19/100 = 0.19$$

例 3：（分赌本问题）设甲、乙二人赌技相同，各出赌注 500 元，约定：谁先胜 3 局，则谁拿走全部 1000 元。现已赌了三局，甲二胜一负，因故要中止赌博，问这 1000 元应如何分配，才算合理？

解：设想继续赌两局，则结果为以下四种情况之一：

甲甲，甲乙，乙甲，乙乙　　　　（ * ）

其中甲乙表示第一局甲胜，第二局乙胜，以此类推。把已赌过的三局结果结合，（即：甲、乙赌完 3 局），可以看出，对前三个结果都是甲先胜三局，因而得 1000 元，只有最后一个结果才是乙得 1000 元，在赌技相同的条件下，（ * ）中四个结果有等可能性，因而甲、乙最终获胜的概率分别为 0.75，0.25。赌本应按此比例分，即甲分 750 元，乙分 250 分，才算合理。

以上计算样本点的方法称为列举法，只适用于 n 较小的情形。当 n 很大时，列举法麻烦且易出错，通常利用排列组合公式求 n、m 的值，下面简单介绍排列、组合的基本原理与公式。

1. 乘法原理与加法原理

乘法原理：若一个过程包括 k 个相继进行的阶段，且第 i 阶段有 a_i 种方法（$1\leqslant i\leqslant k$），则实现该过程共有：$a_1a_2\cdots a_k$ 种方法。

例 4：设某人从 A 地取 B 地，但中途要在 C 地停留处理业务，

若从 A 地到 C 地可以坐飞机、火车或轮船，从 C 地到 B 地，只有火车与汽车两种交通工具，则此人从 A 到 B 地共有 3×2 种走法(见图 1-2)。

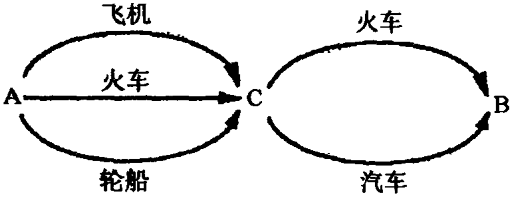

图 1-2

加法原理：若某过程有且仅有 k 种不同的方式，而每一种方式都能独立完成该过程，其中第 i 种方式有 a_i 种方法($1\leqslant i\leqslant k$)，则完成该过程有 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ 种方法。

例 5：某人从 A 地去 B 或 C 时之一，若从 A 到 B 有坐飞机、火车或轮船三种方法，从 A 地到 C 地可乘火车或飞机两种方法，则此人到目的地共有 3+2=5 种方法(见图 1-3)。

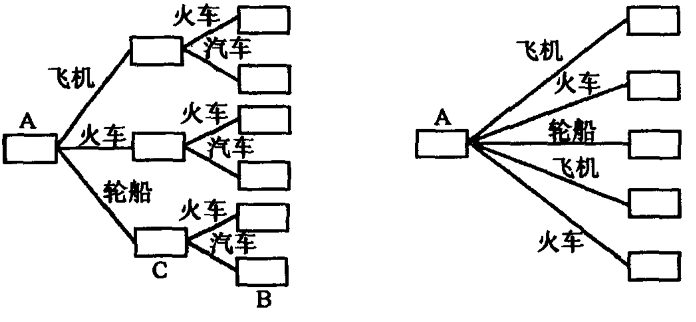

图 1-3

2. 排列