

数学名著译丛

代数 特征值问题

〔英〕J. H. 威尔金森 著

科学出版社

内 容 简 介

本书是一本计算数学名著。作者用摄动理论和向后误差分析方法系统地论述代数特征值问题以及有关的线性代数方程组、多项式零点的各种解法,并对方法的性质作了透彻的分析。本书的内容为研究代数特征值及有关问题提供了严密的理论基础和强有力的工具。全书共分九章。第一章叙述矩阵理论,第二、三章介绍摄动理论和向后舍入误差分析方法,第四章分析线性代数方程组解法,第五章讨论 Hermite 矩阵的特征值问题,第六、七章研究如何把一般矩阵化为压缩型矩阵及压缩型矩阵的特征值的问题,第八章论述 LR 和 QR 算法,最后一章讨论各种迭代法。

本书可作为高等院校计算数学专业的教学参考书,也可供计算数学工作者、工程技术人员及有关科学计算人员参考。

Copyright © Oxford University Press 1965

This translation of The Algebraic Eigenvalue Problem originally published in English in 1965 is published by arrangement with Oxford University Press for sale in the Mainland part of the People's Republic of China only.

本书根据 1965 年英文原版《代数特征值问题》翻译而成,由牛津大学出版社授权在中国大陆境内发行。

图字:01-2000-2677 号

图书在版编目(CIP)数据

代数特征值问题/(英)威尔金森(Wilkinson, J. H.)著;石钟慈,邓健新译. -北京:科学出版社,2001.8

(数学名著译丛)

ISBN 7-03-009352-6

I. 代… II. ①威… ②石… ③邓… III. 特征值-研究
IV. 0151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 23740 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 11 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

2001 年 11 月第一次印刷 印张: 21 7/8

印数: 1-3 000 字数: 568 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

序 言

代数特征值问题的解法长期以来对我有一种特殊的魅力,因为它充分地显示出所谓经典数学与实用数值分析之间的差异。特征值问题具有貌似简单的提法,而且其基本理论多年来已为人们所熟知;然而欲求其精确解就会遇到各种挑战性问题。

L. Fox 教授与 E. F. Goodwin 博士基于我在计算机上工作的早期经验,建议我写一本关于这个主题的书,纳入数值分析专著丛书。如果不是 W. J. Givins 教授邀请我参加 1957 年于底特律召开的矩阵讨论会,因而相继被邀请在密执安大学举办的夏季讨论班作题为“解线性方程组及计算特征值和特征向量的实际技巧”的讲演,撰写本书恐怕只能是一个良好的愿望。每年为这些讲演提供一套讲义的规定业已证明确有特定的价值,本书的许多材料就是以这种方式通过讲演得以介绍。

我原来的意图是叙述解此问题的大部分已为人们知晓的技巧以及对其优点作出评价,并尽可能附以相应的误差分析。基于上述想法的原稿于 1961 年差不多就完成了。然而,在准备原稿的那段时间内,特征值问题与误差分析获得了重大进展,使我对原先的各章日益感到不满。1962 年我决定按照业已改变的客观情况改写全书。我感到,要包含几乎所有的已知方法并给出它们的误差分析已不再切合实际,因此决定主要叙述我有着广泛实际经验的那些方法。同时,我插进附加的一章,给出相当一般的误差分析,它适用于后面提出的几乎所有的方法。多年的经验使我确信,一种方法,如果没有使用过,就很难对它作出可靠的评价,并且一个实际过程在细节方面的相当微小的变动常常会对此方法的效果产生很大的影响。

写数值分析书的作者面临着一个特殊的困难问题,这就是如

何确定该书的读者对象。特征值问题的实用性论述可能使许多人都感兴趣，其中包括设计工程师、理论物理学家、经典应用数学家以及那些旨在矩阵领域进行研究的数值分析家。一本主要面向后一类读者的书可能会使前一类读者感到难以接受。我不会单纯因某些读者可能感到太困难而省略掉任何东西，但是只要题材许可，我尽量把一切写得初等一些。左右为难的处境在第一章中表现得最为突出。我希望，那里所采用的初等叙述不至于冒犯严谨的数学家，而且如果他还拟从本书其余部分汲取营养，那么希望他把这仅仅看作是他所熟悉的经典材料的一种粗浅表示。我从一开始就假定读者熟悉向量空间、线性相关以及秩的基本概念。对于本书内容而言，L. Fox 的《数值线性代数引论》(Oxford, 本丛书之一)是一部极好的入门书。在此领域中的研究工作者将在 A. S. Householder 的《数值分析中的矩阵论》(Blaisdell, 1964 年)一书中找到非常珍贵的资料。

前面业已提到，我决定只讲述那些我具有广泛经验的方法，这就难免使得一些重要的算法被省略掉。然而，这些省略的严重性实际上也许是比较小的，因为 Durand 的著作《代数方程数值解》(Masson, 1960 年, 1961 年)以及 D. K. Faddeev 与 V. N. Faddeeva 的著作《线性代数计算方法》(Moscow, 1963 年)提出了非常广泛的叙述。不过有两处省略需要特别提到，第一处是由 P. J. Eberlein 发展的 Jacobi 型方法以及由 H. Rutishauser 独立地发展的 Jacobi 型方法的各种变型。我认为，这些方法有意外地成功的希望，或许正好能提供一般特征值问题的最满意的解。倘若不首先对它们进行应有的详细研究，那么我不愿意将它们包括在内，因为不能直接用我所给出的一般误差分析来概括它们，这一认识更坚定了我的决心。第二处省略是 Rutishauser 关于 QD 算法的一般论述，它有很广泛的应用。我觉得，我不能在特征值问题的局部范围内对此项工作做出完全公正的评价。读者可参阅 Rutishauser 与 Henrici 的论文。特征值问题的文献非常丰富，我把文献目录主要限于正文中直接引用过的那些文章。前面提到过的 Fa-

ddcev 与 Faddeeva 的书以及 Householder 的书都有非常详细的文献目录可资利用。

在改写本书时,我曾试图把算法用 ALGOL 语言表出,但后来我断定,要提供一个在每个细节上都是正确的过程,其困难在现阶段是无法克服的。因此,我使用了经典数学的语言,而采用一种易于翻译成 ALGOL 语言以及有关的计算机语言的文字形式。

本书取材广泛,而密执安大学夏季讨论班对我有显著的影响,特别是 F. L. Bauer, G. E. Forsythe, J. W. Givens, P. Henrici, A. S. Householder, O. Taussky, J. Todd 以及 R. S. Varga 等人的工作。除此之外, H. Rutishauser 在算法方面的才能是我灵感的主要源泉。

(致谢略)

J. H. 威尔金森

目 录

第一章 理论基础.....	1
引言.....	1
定义.....	2
转置矩阵的特征值与特征向量.....	3
不相同的特征值.....	4
相似变换.....	6
重特征值与一般矩阵的标准型.....	7
亏损特征向量系.....	8
Jordan (经典的) 标准型	10
初等因子.....	11
A 的特征多项式的友矩阵.....	12
非减次矩阵.....	13
Frobenius (有理的) 标准型	15
Jordan 标准型与 Frobenius 标准型的关系.....	16
相抵变换.....	17
λ 矩阵.....	18
初等运算.....	19
Smith 标准型	19
λ 矩阵的 k 行子式的最大公因子.....	22
$(A - \lambda I)$ 的不变因子	22
三角标准型.....	24
Hermite 矩阵与对称矩阵.....	24
Hermite 矩阵的基本性质	25
复对称矩阵.....	27
用酉变换化成三角型.....	27

二次型·····	27
正定性的充要条件·····	29
常系数微分方程·····	30
对应于非线性初等因子的解·····	31
高阶微分方程·····	33
特殊形式的二阶方程·····	34
$B\dot{y} = -Ay$ 的显式解 ·····	35
形如 $(AB - \lambda I)x = 0$ 的方程 ·····	36
向量的最小多项式·····	37
矩阵的最小多项式·····	38
Cayley-Hamilton 定理·····	39
最小多项式与标准型的关系·····	40
主向量·····	43
初等相似变换·····	44
初等矩阵的性质·····	46
用初等相似变换化成三角标准型·····	46
初等酉变换·····	48
初等酉 Hermite 矩阵 ·····	49
用初等酉变换化成三角型·····	51
正规矩阵·····	52
可交换矩阵·····	53
AB 的特征值·····	55
向量与矩阵的范数·····	56
从属的矩阵范数·····	57
Euclid 范数与谱范数 ·····	58
范数与极限·····	59
避免使用矩阵无穷级数·····	62
第二章 摄动理论·····	64
引言·····	64
关于特征值连续性的 Ostrowski 定理 ·····	65

代数函数.....	66
数值例题.....	67
单特征值的摄动理论.....	68
对应特征向量的摄动.....	69
具有线性初等因子的矩阵.....	70
特征值的一阶摄动.....	71
特征向量的一阶摄动.....	72
高阶摄动.....	72
重特征值.....	73
Gerschgorin 定理	73
基于 Gerschgorin 定理的摄动理论	75
情形 1 具有线性初等因子矩阵的单特征值 λ_1 的摄动...	75
情形 2 具有线性初等因子矩阵的重特征值 λ_1 的摄动...	78
情形 3 具有一个或多个非线性初等因子矩阵的单特征值的摄动.....	80
情形 4 相应于非减次矩阵非线性因子的特征值的摄动...	82
情形 5 当有一个以上 $(\lambda_i - \lambda)$ 幕次的初等因子且至少有一个为非线性时,特征值 λ_i 的摄动.....	83
相应于非线性因子一般分布的摄动.....	84
根据 Jordan 标准型的特征向量的摄动理论	84
相应于重特征值(线性初等因子)的特征向量的摄动.....	86
摄动理论的限度.....	87
s_i 之间的关系.....	88
计算问题的条件.....	89
条件数.....	89
矩阵 A 关于特征值问题的谱条件数.....	90
谱条件数的性质.....	91
条件数的不变性.....	92
非常病态的矩阵.....	93
实对称矩阵的摄动理论.....	96

非对称摄动.....	96
对称摄动.....	97
经典方法.....	98
秩为 1 的对称矩阵.....	101
特征值的极值性质.....	102
特征值的极小-极大性质	103
两个对称矩阵之和的特征值.....	105
实际应用.....	106
极小-极大原理的进一步应用	107
分隔定理.....	107
Wielandt-Hoffman 定理	108
第三章 误差分析	114
引言.....	114
定点运算.....	114
内积的累加.....	115
浮点运算.....	116
误差界的简化表示.....	117
某些基本浮点计算的误差界.....	118
误差矩阵的范数的界.....	119
浮点运算中内积的累加.....	120
某些基本 $\mu_2(\cdot)$ 计算的误差界	121
平方根的计算.....	123
块浮点向量和矩阵.....	123
ϵ 位计算的基本限制.....	124
用相似变换作简化的特征值方法.....	127
基于初等非酉变换方法的误差分析.....	128
基于初等酉变换的方法的误差分析.....	130
酉变换的优越性.....	132
实对称矩阵.....	133
酉变换的限度.....	134

用浮点计算的平面旋转的误差分析·····	135
用平面旋转的乘法·····	137
用一系列平面旋转做乘法·····	139
近似的平面旋转乘积的误差·····	144
相似变换的误差·····	145
对称矩阵·····	146
定点运算的平面旋转·····	148
$\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 的另一种算法 ·····	149
用近似的定点旋转左乘·····	150
用一系列平面旋转相乘(定点)·····	151
一组近似平面旋转的计算乘积·····	153
相似变换的误差·····	153
关于误差界的总评述·····	156
浮点计算的初等 Hermite 矩阵 ·····	157
初等 Hermite 矩阵计算的误差分析 ·····	158
数值例子·····	162
用近似的初等 Hermite 矩阵左乘 ·····	163
用近似的初等 Hermite 矩阵序列的乘法 ·····	166
类似平面旋转的非酉初等矩阵·····	168
类似于初等 Hermite 矩阵的非酉初等矩阵 ·····	169
用非酉矩阵序列左乘·····	171
先验的误差界·····	172
正规性的偏离·····	173
简单的例子·····	175
后验的界·····	176
正规矩阵的后验的界·····	177
Rayleigh 商 ·····	178
Rayleigh 商的误差 ·····	180
Hermite 矩阵 ·····	181
病态地靠近的特征值·····	183

非正规矩阵	185
完全特征系的误差分析	187
数值例子	188
限制可达精度的条件	189
非线性初等因子	190
近似的不变子空间	192
几乎正规矩阵	195
第四章 线性代数方程组的解法	197
引言	197
摄动理论	197
条件数	199
平衡矩阵	200
简单的实际例子	201
特征向量矩阵的条件	201
显式解	202
对矩阵条件的总评述	203
病态和几乎奇异的关系	204
k 位运算的限制	205
解线性方程组的算法	206
Gauss 消去法	208
三角形分解	208
三角形分解矩阵的结构	209
三角形矩阵元素的显式表达式	210
Gauss 消去法的中断	212
数值稳定性	213
交换的重要性	214
数值例子	215
Gauss 消去法的误差分析	217
用定点运算的摄动矩阵的上界	219
约化后的矩阵元素的上界	220

全主元素.....	220
部分主元素方法的实际过程.....	222
浮点误差分析.....	222
不选主元素的浮点分解.....	224
有效位的损失.....	225
流传的谬误.....	225
特殊形式的矩阵.....	226
在高速计算机上的 Gauss 消去法	229
对应不同的右端的解.....	230
直接的三角形分解.....	230
Gauss 消去法和直接的三角形分解的关系.....	231
分解不唯一和失败的例子.....	232
有行交换的三角形分解.....	233
三角形分解的误差分析.....	236
行列式计算.....	238
Cholesky 分解.....	238
对称非正定矩阵.....	239
定点运算 Cholesky 分解的误差分析	240
病态矩阵.....	242
用初等 Hermite 矩阵的三角形化	243
Householder 三角形化的误差分析	246
用 M'_{ii} 型初等稳定矩阵的三角形化	246
前主子式的计算.....	247
用平面旋转的三角形化.....	249
Givens 约化的误差分析.....	250
正交三角形化的唯一性.....	251
Schmidt 正交化	252
三角形化方法的比较.....	254
向后回代.....	256
三角形方程组的计算解的高精度.....	259

一般的方程组的解	261
一般矩阵的逆的计算	262
计算解的精度	263
没有小主元素的病态矩阵	264
近似解的迭代改进	265
迭代过程中舍入误差的影响	266
定点计算的迭代过程	267
迭代过程的一个简单例子	268
迭代过程的总评述	270
有关的迭代法	271
迭代过程的极限	272
迭代法的严格的调整	272
第五章 Hermite 矩阵	275
引言	275
实对称矩阵的经典 Jacobi 方法	275
收敛率	277
收敛于固定的对角矩阵	278
顺序 Jacobi 方法	279
Gerschgorin 圆	280
Jacobi 方法的最后的二次收敛性	280
靠近的和重的特征值	282
数值例子	283
$\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的计算	284
更简单的转角计算方法	287
过关 Jacobi 方法	288
特征向量计算	289
数值例子	289
Jacobi 方法的舍入误差	290
计算的特征向量的精确度	291
用定点计算的误差界	292

程序编制问题·····	293
Givens 方法·····	293
在有两级存储设备的计算机上实现 Givens 方法 ·····	295
Givens 方法的浮点误差分析 ·····	297
定点误差分析·····	298
数值例子·····	299
Householder 方法 ·····	302
利用对称性·····	304
存储方案的研究·····	304
在有内、外存储设备的计算机上实现 Householder 方法···	305
用定点运算的 Householder 方法 ·····	306
数值例子·····	307
Householder 方法的误差分析 ·····	309
对称三对角矩阵的特征值·····	310
Sturm 序列性质·····	311
分半法·····	313
分半法的数值稳定性·····	314
数值例子·····	317
关于分半法的总评述·····	318
小特征值·····	319
靠近的特征值和小 β_i ·····	319
特征值的定点计算·····	324
三对角型的特征向量计算·····	327
特征向量显式表达式的不稳定性·····	328
数值例子·····	330
逆迭代·····	333
初始向量 b 的选择·····	335
误差分析·····	336
数值例子·····	337
靠近的特征值和小 β_i ·····	339

对应重特征值的线性独立特征向量	340
计算特征向量的交替方法	343
数值例子	344
三对角矩阵特征问题的评论	344
Givens 和 Householder 方法的完成	345
方法的比较	347
拟对称三对角矩阵	348
特征向量的计算	349
形如 $Ax = \lambda Bx$ 和 $ABx = \lambda x$ 的方程	349
数值例子	351
同时简化 A 和 B 为对角型	352
三对角矩阵 A 和 B	353
复 Hermite 矩阵	354
第六章 化一般矩阵为压缩型	359
引言	359
Givens 方法	359
Householder 方法	361
存储方案的研究	364
误差分析	365
Givens 方法与 Householder 方法的关系	366
初等稳定变换	368
置换的意义	370
直接约化矩阵为 Hessenberg 型	371
结合交换	373
数值例子	374
误差分析	378
有关的误差分析	380
Hessenberg 矩阵的劣定	383
用 M'_{ji} 型稳定矩阵化为 Hessenberg 型	383
Krylov 方法	384

逐列 Gauss 消去法	385
实际的困难	386
对于某些标准的特征值分布的 C 的条件	387
级小于 n 的初始向量	389
实际的经验	391
广义 Hessenberg 方法	392
广义 Hessenberg 方法的失败	393
Hessenberg 方法	395
实际的方法	395
Hessenberg 方法与以前的方法的关系	396
Arnoldi 方法	397
实际的考虑	398
再正交化的重要性	400
Lanczos 方法	403
过程的故障	404
数值例子	406
实际的 Lanczos 方法	406
数值例子	408
非对称的 Lanczos 方法的总评述	409
对称的 Lanczos 方法	410
化 Hessenberg 矩阵为更压缩的形式	411
化下 Hessenberg 矩阵为三对角型	411
使用交换	412
小主元素的影响	414
误差分析	415
应用于下 Hessenberg 型的 Hessenberg 方法	417
Hessenberg 方法与 Lanczos 方法的关系	418
化一般矩阵为三对角型	419
和 Lanczos 方法比较	420
化矩阵为三对角型的重新考察	420

化上 Hessenberg 型为 Probenius 型	421
小主元素的影响	423
数值例子	423
关于稳定性的总评述	424
特殊的上 Hessenberg 型	425
直接确定特征多项式	426
第七章 压缩型矩阵的特征值	429
引言	429
显式多项式形式	429
显式多项式的条件数	432
某些典型的零点分布	433
Krylov 方法的总评述	437
显式多项式的总评述	437
三对角矩阵	439
Hessenberg 矩阵的行列式	442
舍入误差的影响	443
浮点累加	445
用正交变换计算	446
一般矩阵的行列式计算	448
广义特征值问题	448
间接确定特征多项式	449
Le Verrier 方法	450
以插值为基础的迭代法	451
渐近收敛率	452
多重零点	454
函数关系的逆	456
区间分半法	458
Newton 法	458
Newton 法与插值法的比较	459
三次收敛的方法	460