高等學校教學用書

矩陣論

上卷

Ф. Р. ГАНТМАХЕР 著
柯召 譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

矩　陣　論

上　卷

Ф. Р. 甘特馬赫爾著
柯　召　譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）1953年出版的甘特馬赫爾（Ф. Р. Гантмахер）所著"矩陣論"（Теория матриц）來譯出的。中譯本分上下兩卷出版，上卷爲原書第一部分：矩陣的理論基礎，包括第一至十章。下卷爲原書第二部分：矩陣的特殊問題及其應用，包括第十一至十五章。

本書可供綜合大學學生，研究生，數學及物理科學研究人員和工程師參考之用。

矩　陣　論

上　卷

書號246（譯224）

甘特馬赫爾　著

柯　召　譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

〔北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號〕

新華書店總經售

商務印書館印刷廠印刷

上海天通菴路一九〇號

開本850×1168 1/32　印張 11 9/16　字數 305,000

一九五五年二月上海第一版　印數 1—3,500

一九五五年二月上海第一次印刷　定價 ¥20,500

原　　序

在近代，矩陣的研究，在數學，力學，理論物理，理論電工技術等等的各種領域中，有廣大的應用。同時在蘇聯和在外國文獻中，都沒有充分剖釋矩陣論問題及其各種應用的書籍。這一本書是企圖填補數學文獻中這一個缺憾的。

這本書所根據的，是著者在近十七年中，在以姆.維.洛莫諾索夫命名的莫斯科國立大學，以約.維.斯大林命名的托比力西國立大學與莫斯科物理-技術學院中，先後講授矩陣論及其應用這一課程的講義。

本書不僅顧及數學家(大學生，研究生，科學工作者)，亦應及在其鄰近的領域中(物理學家，工程研究者)關心數學及其應用的專家。因此著者力圖使內容的表達儘可能爲讀者所易於接受，僅假定讀者學過行列式論與高等工業學校教學計劃範圍內的高等數學這一課程。祇是在本書的以後諸章各別的節中對於讀者需要補充的數學知識。此外，著者企圖使各別章中的敍述儘可能彼此無關。例如，第五章"矩陣函數"並沒有依靠第二，第三章中所述的內容。同時在第五章中第一次應用第四章中所引進的概念時，有對應的引證。這樣一來，已經熟悉矩陣的初等理論的讀者，有可能直接開始閱讀書中他所關心的諸章。

本書是由兩部分組成的，內容共分十五章。

在第一與第三章中引進關於矩陣與線性運算子的初步的基本知識且建立運算子與矩陣間的關係。

在第二章中敍述高斯消去法的理論基礎以及與之相結合的解 n 讀大時含有 n 個方程線方程組的有效方法。在這一章中讀者獲得裂分矩陣爲長方"子塊"或"塊"後的運算技術。

在第四章中引進有基本意讀的方陣的"特徵多項式"與"最小多項式"，矩陣的"附加矩陣"與"導出附加矩陣"。

在第五章中所討論的是矩陣的函數,給予一般的定義與 $f(A)$ 的實際計算方法,其中 $f(\lambda)$ 爲純量變數 λ 的函數,而 A 爲一個方陣。在這一章的 §§ 5, 6 中應用矩陣函數的概念來求出並且詳細的研究常係數一級線性微分方程組的解。關於矩陣函數的概念以及與之相結合的常係數一級線性微分方程組的研究,都祇應用關於矩陣的最小多項式這一概念(與平常的說法不同),並不用及在以後的第六章與第七章中所述的"初級因子理論"。

前五章包含關於矩陣及其應用的某些知識。矩陣的更深入的問題與化矩陣爲法式有關聯。這種演化奠基於伐愛爾斯脫拉斯的初級因子理論。由於這一理論的重要性,在本書中給予兩種敍述方法:在第六章中的解析方法與在第七章中的幾何說法。讀者要注意第六章 §§ 7, 8 中所討論的求出化已予矩陣爲法式的變換矩陣的有效方法。在第七章 § 8 中詳細的討論了阿.恩.克力洛夫院士對於實際算出特徵多項式係數的方法。

在第八章中解出某些類型的矩陣方程。此處亦曾討論關於與已知矩陣可易的全部矩陣問題而且詳細的研究了矩陣的多值函數 $\sqrt[m]{A}$, $\ln A$。

第九與第十章分別從事於 U-空同中線性運算子理論與二次型及安密達型的理論。這兩章並未用及伐愛爾斯脫拉斯的初級因子理論,對於以前的東西,祇用到本書第一與第三章中所述的關於矩陣與線性運算子的基本知識。在第十章的 § 8 中給予二次型在有 n 個自由度微振動系統研究中的應用。在同一章的 § 10 中給出勿勞別湼斯對於甘凱連夫型理論的細緻的研究。這些結果以後在第十五章中,對於路斯-霍維茨問題中特殊情形的討論,是要用到的。

最後五章組成本書的第二部分。在第十一章中定出複對稱,複反對稱與複正交矩陣的法式,而且在這些矩陣,與同類型的實矩陣,與 U-矩陣之間建立了有趣味的關係。

在第十二章中所述的是 $A+\lambda B$ 型矩陣束的普遍理論,其中 A 與 B 為同維數的任意長方矩陣。有如正則矩陣束 $A+\lambda B$ 的研究是奠基於伐愛爾斯脫拉斯的初級因子理論,異矩陣束的研究有賴於克朗南格的最小指標理論,這是伐愛爾斯脫拉斯初級因子理論的進一步的發展。藉助於克朗南格的理論(著者相信,本書中對於這一理論在表達上的簡化是很成功的),在第十二章中建立了矩陣束 $A+\lambda B$ 在普遍情形的標準式。我們應用所得出的結果來研究常係數線性微分方程組。

在第十三章中所述的是非負元素所構成的矩陣的卓越的影譜性質並且討論到這類矩陣兩種重要的應用範圍:(1)在概率論中的純馬爾可夫鏈與(2)在力學中彈性振動的顫動性質。用矩陣的方法來研究純馬爾可夫鏈在扶.伊.羅馬諾夫斯基的工作[25]中得到他的發展,這有賴於這樣的事實,在有限多事件的純馬爾可夫鏈中條件概率矩陣是一種特殊類型的,元素都是非負的矩陣("斯篤哈斯基矩陣")。

彈性振動的顫動性質與另外一類重要的非負矩陣——"顫動矩陣"——是密切結合着的。這些矩陣及其應用曾為蒙.格.克萊因與本書著者所合作的研究過。在第十三章中祇述及這一領域中一些主要的結果。這一全部材料的詳細敍述,讀者可在專著[7]中找到。

在第十四章中討論矩陣論對於有變量係數微分方程組的應用。這一章中所研究的中心問題(§§ 5—9)是可乘積分的理論及其與伏爾泰勒無窮小計算的關係。在蘇聯數學文獻上對於這些問題幾乎完全沒有給予說明。在前面幾節和 § 11 中所研究的是與關於運動的穩定性問題相結合的(按照略普諾夫的)可化組和恩.潑.也羅琴的一些結果的演化。§§ 9-11 講到微分方程組的解析理論。此處剖明了別爾克霍夫基本定理的錯誤,這個定理平常是用來研究微分方程組在異點鄰近的解以及在正則異點這一情形建立解的標準形式的。

在第十四章的 § 12 中概略的寫出伊.阿.拉撲-達尼連扶斯基對於多個矩陣的解析函數及其應用於微分方程組的基本研究的一些結果。

最後一章(第十五章)所討論的,是應用二次型(特別是甘凱連夫型)理論於關於定出多項式的位於右半平面(Re $z>0$)中根的個數的路斯-霍維茨問題。在這一章的前幾節中引進這個問題的古典的處理方法。在 § 5 中給予阿.蒙.略普諾夫定理,這個定理建立了與路斯-霍維茨判定相當的穩定性判定。與路斯-霍維茨穩定性判定相伴的,在這一章的 § 13 中提出不很著名的連那爾與希派爾判定,在這個判定中行列式不等式的個數比路斯-霍維茨判定中的個數約少一半。

在第十五章的末了證明了與穩定性問題密切相結合着的阿.阿.馬爾可夫與潑.爾.切比雪夫的兩個著名定理,這些定理是兩位偉大的學者從把某種特殊類型連分式展爲變數的降冪級數的展開式理論來得出的。此處還給予這兩個定理以矩陣的證明。

這樣我們簡略的列舉了本書的內容。

最後,在本書準備付印時,達.克.法捷也夫,扶.潑.撲塔撲夫與達.蒙.柯且略恩斯基閱讀了本書的原稿且提出許多主要的註釋來幫助著者,著者表示衷心的感謝。在寫出本書時著者用及蒙.格.克萊因與阿.伊.烏自可夫的寶貴的意見,著者亦在此提出他的謝意。

上卷目錄

原序

第一部分　理論基礎

矩　陣　論

第一部分　理論基礎

第一章　矩陣及其運算

§1. 矩陣，主要的符號記法

1. 設給予某一數域 K❶。

定義 1. 域 K 中的數的長方陣列

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{1}$$

稱爲矩陣。如果 $m=n$，那末稱之爲方陣，而相等的兩數 m 與 n 稱爲他的階。在一般的情形，矩陣稱爲 $m\times n$ 維長方矩陣。在矩陣中的那些數稱爲他的元素。

符號記法　元素的兩個足數記法是這樣的，他的第一個足數永遠指行的序數，而其第二個足數是指列的序數，這個元素就位於這組行列相交的地方。

同時我們亦用次之簡便記法來記矩陣（1）：

$$\|a_{ik}\| \quad (i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n)。 \tag{2}$$

❶ 數域是指數的任何一個集合，在他裏面常可施行四個運算：加法，減法，乘法與以不爲零的數來除的除法，而且所得出結果是唯一確定的。

可用所有有理數的集合，所有實數的集合或所有複數的集合作爲數域的例子。

我們假設以後所有遇到的數都是屬於事先所給予的數域裏面的。

有時亦用一個符號，例如矩陣 A，來記矩陣（1）。如果 A 是一個 n 級方陣，那末寫之為：$A=\|a_{ik}\|_1^n$。方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的行列式將記為：$|a_{ik}|_1^n$ 或 $|A|$。

引進由所予矩陣中元素所組成的行列式的一種簡便記法：

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \cdots & a_{i_1k_p} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \cdots & a_{i_2k_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_pk_1} & a_{i_pk_2} & \cdots & a_{i_pk_p} \end{vmatrix}。 \qquad (3)$$

行列式（3）稱為矩陣 A 的 p 級子式，如果 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant m$，$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_p\leqslant n$。

長方矩陣 $A=\|a_{ik}\|$ $(i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)$ 有 $C_m^p\cdot C_n^p$ 個 p 級子式

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant m \\ 1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_p\leqslant n \end{matrix};\ p\leqslant m,\ n\right)。 \qquad (3')$$

當 $i_1=k_1, i_2=k_2, \cdots, i_p=k_p$ 時，稱子式（3′）為主子式。

用（3）的記法，可將方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的行列式寫為：

$$|A|=A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}。$$

矩陣中不為零的諸子式的最大階，稱為這個矩陣的秩。如果 r 是 $m\times n$ 維長方矩陣 A 的秩，那末顯然有 $r\leqslant m, n$。

由一個列所組成的長方矩陣

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix},$$

稱為單列（或列）矩陣且記之以：$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

由一個行所組成的長方矩陣

$$\|z_1, z_2, \cdots, z_n\|,$$

稱爲單行(或行)矩陣且記之以：$[z_1, z_2, \cdots, z_n]$。

在主對角線以外的所有元素都等於零的方陣

$$\begin{Vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{Vmatrix},$$

稱爲對角形方陣且記之以：$\|d_i\delta_{ik}\|_1^n$ ❶ 或

$$\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}。$$

設 m 個量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 經另外 n 個量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 齊次線性表出：

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{array}\right\} \tag{4}$$

或簡寫爲：

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i = 1, 2, \cdots, m)。 \tag{4'}$$

用(4)式來變諸値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲値 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的變換稱爲線性變換。

這一個變換的係數構成一個 $m \times n$ 維的長方矩陣(1)。

已知的線性變換(4)唯一的確定矩陣(1)，反之亦然。

在次節中，從線性變換(4)的性質來界說長方矩陣的基本運算。

§2. 長方矩陣的加法與乘法

我們來界說矩陣的基本運算：矩陣的加法，數與矩陣的乘法及矩陣間的乘法。

❶ 此處的 δ_{ik} 是克朗南格符號：$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k)。\end{cases}$

1. 設諸量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 經量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 用線性變換

$$y_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{5}$$

來表出,而量 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 經同一組量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 用線性變換

$$z_i=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{6}$$

來表出。則

$$y_i+z_i=\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}+b_{ik})x_k \quad (i=1, 2, \cdots, m)。 \tag{7}$$

與之相對應的我們建立

定義 2. 兩個有相同維數 $m\times n$ 的矩陣 $A=\|a_{ik}\|$ 與 $B=\|b_{ik}\|$ 的和是指一個同維數的矩陣 $C=\|c_{ik}\|$, 他的元素等於所予兩個矩陣的對應元素的和:

$$C=A+B,$$

如其 $\quad c_{ik}=a_{ik}+b_{ik} \quad (i=1, 2, \cdots, m; k=1, 2, \cdots, n)$。

得出兩個矩陣的和的運算稱爲矩陣的加法。

例

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 & b_3+d_2 \end{Vmatrix}。$$

按照定義 2, 祇有同維數的長方矩陣始能相加。

由這一定義知變換(7)的係數矩陣爲變換(5)與(6)的兩個係數矩陣的和。

由矩陣的加法定義直接推知,這一運算有可易與可羣的性質:

$1^\circ \quad A+B=B+A,$

$2^\circ \quad (A+B)+C=A+(B+C)$。

此處 A, B, C 是任何三個同維數的長方矩陣。

矩陣的加法運算很自然的可以推廣到任意多個矩陣相加的情形。

2. 在變換(5)中, 將諸量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 乘以 K 中某一數 α。則

得：

$$\alpha y_i=\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{ik})x_k \quad (i=1, 2, \cdots, m)。$$

與之相對應的我們有：

定義 3．K 中數 α 對矩陣 $A=\|a_{ik}\|(i=1, 2, \cdots, m; k=1, 2, \cdots, n)$ 的乘積是指矩陣 $C=\|c_{ik}\|(i=1, 2, \cdots, m; k=1, 2, \cdots, n)$，他的元素都是矩陣 A 中的對應元素與數 α 的乘積：

$$C=\alpha A,$$

如其 $$c_{ik}=\alpha a_{ik} \quad (i=1, 2, \cdots, m; k=1, 2, \cdots, n)。$$

得出數與矩陣的乘積的運算稱為數與矩陣的乘法。

例

$$\alpha\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 \end{Vmatrix}。$$

易知

1° $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$,

2° $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$,

3° $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$。

此處 A, B 為同維數的長方矩陣，α, β 為域 K 中的數。

兩個同維數長方矩陣的差 $A-B$ 是由等式

$$A-B=A+(-1)B$$

來定出的。

如果 A 是一個 n 級方陣而 α 為 K 中的數，那末❶

$$|\alpha A|=\alpha^n|A|。$$

3．設諸量 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 經量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 用線性變換

$$z_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y_k \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{8}$$

來表出，而量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 經量 $x_1, x_2, \cdots, x_q$ 用線性變換

❶ 這裏的符號 $|A|$ 與 $|\alpha A|$ 是各指矩陣 A 與 αA 的行列式（參考第一節）。

$$y_k=\sum_{j=1}^{q} b_{kj}x_j \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{9}$$

來表出。則把 $y_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$的這些表示式代入(8)式中，我們就可以把 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_m$ 經 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_q$ 用"結合的"變換

$$z_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{j=1}^{q} b_{kj}x_j=\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)x_j \quad (i=1,\ 2,\cdots,\ m) \tag{10}$$

來表出。與之相對應的得出

定義 4. 兩個長方矩陣

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\|, \quad B=\left\|\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nq} \end{matrix}\right\|$$

的乘積是指矩陣

$$C=\left\|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mq} \end{matrix}\right\|,$$

其中位於第 i 行與第 j 列相交地方的元素 c_{ij}，等於第一個矩陣 A 的第 i 行中元素與第二個矩陣 B 的第 j 列中元素的"乘積"❶：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,\ 2,\cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\cdots,\ q)。 \tag{11}$$

得出兩個矩陣的乘積的運算稱爲矩陣的乘法。

例

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix} a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 & a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3 & a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3 \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3 & b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3 & b_1f_1+b_2f_2+b_3f_3 \end{matrix}\right\|。$$

---

❶ 對於兩組數序 $a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n$ 與 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ 的乘積，是指他們的對應數的乘積的和：$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$。

由定義 4 知變換(10)的係數矩陣,等於變換(8)的係數矩陣對變換(9)的係數矩陣的乘積。

我們注意,兩個長方矩陣的相乘,祗有在第一個因子的列數等於第二個因子的行數時,才可以施行。特別的,如果兩個因子都是同級的方陣,乘法常可施行。但是我們還要注意,卽使對於這一個特殊的情形,矩陣的乘法都不一定是可易的。例如,

$$\begin{Vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2 & 0\\3 & -1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}8 & -2\\18 & -4\end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix}2 & 0\\3 & -1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2 & 4\\0 & 2\end{Vmatrix}。$$

如果 $AB=BA$,那末稱矩陣 A 與 B 是彼此可易的或可交換的。

例　矩陣

$$A=\begin{Vmatrix}1 & 2\\-2 & 0\end{Vmatrix}\quad 與\quad B=\begin{Vmatrix}-3 & 2\\-2 & -4\end{Vmatrix}$$

彼此可易,因爲

$$AB=\begin{Vmatrix}-7 & -6\\6 & -4\end{Vmatrix},\quad BA=\begin{Vmatrix}-7 & -6\\6 & -4\end{Vmatrix}。$$

容易驗證,矩陣的乘法是可羣的,同時亦有結合乘法與加法的分配律存在。

1°　$(AB)C=A(BC)$,

2°　$(A+B)C=AC+BC$,

3°　$A(B+C)=AB+AC$。

很自然的可以推廣矩陣的乘法運算到許多個矩陣相乘的情形。

如果利用長方矩陣的乘法,那末線性變換

$$\begin{aligned}y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\y_m&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{aligned}$$