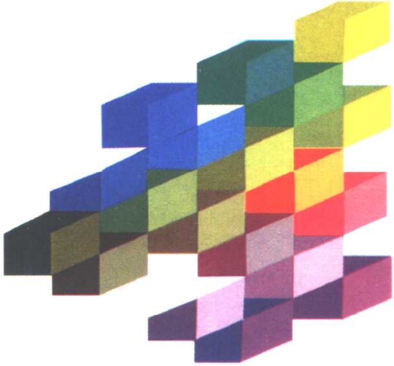
名师解惑丛书



排列 组合 二项式定理

艾志刚 编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

排列 组合 二项式定理

艾志刚 编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

排列 组合 二项式定理

艾志刚　编著

出 版 者:山东教育出版社
(济南市纬一路 321 号　邮编:250001)
电　　话:(0531)2023919　传真:(0531)2050104
网　　址:http://www.sjs.com.cn
发 行 者:山东教育出版社
印　　刷:山东新华印刷厂临沂厂
版　　次:1998 年 9 月第 1 版
2001 年 8 月修订第 2 版
2001 年 8 月第 4 次印刷
规　　格:787mm×1092mm　32 开本
印　　张:3.25
字　　数:59 千字
书　　号:ISBN 7-5328-2710-0/G·2488
定　　价:3.20 元

再版说明

“名师解惑丛书”出版发行以来，以其新颖的编写体例和缜密的知识阐述，深受广大读者青睐，曾连续多次重印．

近几年来，基础教育正发生深刻的改革：“科教兴国”战略深入人心，素质教育全面推进，与此同时，以“普通高等学校招生全国统一考试试卷”为主要载体，所反映出的高考招生改革信息和发展趋势，迫切需要广大教师和莘莘学子以新的视角和思维，关注并投身到这场改革之中．

有鉴于此，我们对“名师解惑丛书”进行了全面修订．此次修订将依然保持被广大读者认同的，每一册书为一个专题讲座的模式，围绕“如何学”，“如何建立知识间的联系”，“如何学以致用”等，帮助广大学生读者解决在学习知识和考试答卷过程中可能遇到的疑难问题．更重要的是，最新修订的“名师解惑丛书”在如何培养学生的创新精神和创造能力，联系现代科学技术及其在日常生产生活中的应用方面，做了较大的充实和修订……

丛书的编写者和出版者相信，您正在翻阅的这本书，将有助于您目前的学习．

作 者 的 话

排列、组合、二项式定理是现行高中数学教材的重要内容.

排列与组合是学习概率的预备知识,也是研究数理统计、近世代数、组合数学等高等数学的基础.其内容特殊,研究方法独特,应用灵活,是培养缜密的数学思维能力以及创新意识、创新能力的良好题材,是理论联系实际的典范.

二项式定理是在乘法公式及组合数公式的基础上展开的内容,它对于研究整除性、近似计算有直接的作用,它与概率论中的二项分布,微积分中求导公式的推导有密切的联系,是进一步学习高等数学时,经常要用到的基础知识.

本书对于排列、组合、二项式定理等重要的数学内容,立足教材,注意解答和剖析学习中遇到的种种疑惑问题;注意由浅入深,由具体到抽象;注意揭示事物间的联系和内在规律;注意理论联系实际,解决实际问题.本书具有如下特点:

1. 对于容易混淆的问题进行了重点剖析，分析其异同，并在具体应用中进一步加以区分；

2. 注意了数学思想方法的提炼，注意了题目的一题多解，一题多变，举一反三；

3. 有较强的针对性，对容易出错的地方，如“类”和“步”进行了多层次的讲解，究其根源，明辨标准.

在本书的编写过程中，编者立足于自己长期的教学积累，同时参阅了大量资料，博取众长. 在此，谨向诸位同仁深表谢意.

由于编者水平有限，书中错误在所难免，恳请读者批评指正.

2001 年 3 月

作者简介　艾志刚，1963 年生，大学本科学历，中学高级教师，现任淄博四中教科处主任，山东省高级教师职称评定委员会成员，淄博市教师培训主讲教师. 曾设计并主持“师生互动数学活动教学”的教改实验；曾先后在《中学数学》、《中学数学教学》、《数学通讯》等省级以上刊物发表学术论文 40 余篇，其中《巧用圆系解题》、《假道伐虢——例谈相等问题的不等处理策略》、《等项匹配——数学竞赛题解例说》、《谈创新能力的培养》等 10 余篇论文获山东省优秀论文奖；曾先后编著《滚动复习》、《中学数学教与学》等书籍 4 本. 先后荣获“山东省数学奥林匹克优秀辅导员”、“淄博市学科带头人”、“淄博市师德标兵”等荣誉称号.

目 录

一　加法原理与乘法原理

加法原理与乘法原理是人们在大量实践经验的基础上归纳出来的基本规律，它们不仅是推导排列数、组合数计算公式的依据，而且体现了两种基本的思想方法，这两种基本思想方法贯穿于本章的始终，是解决排列组合问题的基石．正因如此，对这两个基本原理我们必须加以深刻理解．

1．从思想方法的角度看

加法原理与乘法原理均涉及完成一件事的不同方法的种数．加法原理是将一个问题进行“分类”的思考，与“分类”有关，其特点是各种方法相互独立，用其中任何一种方法都可以完成这件事；乘法原理是将问题进行“分步”的思考，与“分步”有关，其特点是各个步骤相互依赖，只有各个步骤都完成了，这件事才算完成．

2．从集合的角度看

完成一件事有 A、B 两类办法，即集

合 A、B 互不相交，在 A 类办法中有 m_1 种方法，在 B 类办法中有 m_2 种方法，即 $\mathrm{card}(A)=m_1$，$\mathrm{card}(B)=m_2$，则完成这件事的不同方法的种数为

$$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)=m_1+m_2.$$

此即 $n=2$ 时的加法原理.

完成一件事需要 A、B 两个步骤，在实行 A 步骤时，有 m_1 种方法，在实行 B 步骤时，有 m_2 种方法，即 $\mathrm{card}(A)=m_1$，$\mathrm{card}(B)=m_2$，则完成这件事的不同方法种数为

$$\mathrm{card}(A\cdot B)=\mathrm{card}(A)\cdot\mathrm{card}(B)=m_1\times m_2.$$

此即 $n=2$ 时的乘法原理.

3. 从运用两个基本原理的情景看

加法原理中的“做一件事，完成它可以有 n 类办法”，是对完成这件事的所有方法的一个分类. 分类时，首先，要根据问题的特点确定一个分类的标准，然后在确定的分类标准下进行分类；其次，这里的“类”是各自独立的，是互斥的，应用加法原理必须要求各类的每一种方法都保证事件的完成.

乘法原理中的“做一件事，完成它需要分成 n 个步骤”，是指完成这件事的任何一种方法，都要分成 n 个步骤. 分“步”时，首先，要根据问题的特点确定一个分“步”的标准；其次，“步”是完成某一事件必须经由的步骤之一，应用乘法原理必须经由完成这一事件的所有步骤，缺一不可.

通常把完成题设事件的所有方法分为若干“互斥类”，又在同一类中，将完成事件的方法分成若干“独立步”，以保证不重复、不遗漏. “互斥”(无公共部分)、“独立”可保证不重；类

型、步骤完备，可保证不漏.

例 1 现有来自高一4个班的学生34人，其中一、二、三、四班各7人、8人、9人、10人，他们自愿组成数学课外小组.

(1)选其中1人为负责人，有多少种不同的选法?

(2)每班选1名组长，有多少种不同的选法?

(3)推选2人作中心发言，这2人需来自不同班，有多少种不同的选法?

解题指导:(1)选其中1人为负责人，这1人可来自不同班，但只要从1个班中选择1人即可完成此事，故用“分类”思考.

(2)每班选1名组长，故只有从这4个班中分别选出1名组长，才能完成这件事，故用“分步”思考.

(3)推选2人作中心发言，这2人需来自不同班，故首先应“分类”.分清“类”后，再考虑每一类中需分几步才能完成.

解:(1)依题意，可将选法分为四类:

第一类，从一班学生中选1人，有7种选法;

第二类，从二班学生中选1人，有8种选法;

第三类，从三班学生中选1人，有9种选法;

第四类，从四班学生中选1人，有10种选法.

故共有不同的选法 $N=7+8+9+10=34$(种).

(2)每种选法分四个步骤:第一、二、三、四步分别为从一、二、三、四班学生中选1名组长，故共有不同的选法 $N=7\times8\times9\times10=5\ 040$(种).

(3)依题意，可将选法分为六类，每类又分两步.

从一、二班学生中各选1人，有 7×8 种不同选法;

从一、三班学生中各选 1 人，有 7×9 种不同选法；

从一、四班学生中各选 1 人，有 7×10 种不同选法；

从二、三班学生中各选 1 人，有 8×9 种不同选法；

从二、四班学生中各选 1 人，有 8×10 种不同选法；

从三、四班学生中各选 1 人，有 9×10 种不同选法，

故共有不同选法 $N=7\times8+7\times9+7\times10+8\times9+8\times10+9\times10=431$(种).

[导评]利用加法原理与乘法原理解题时，首先应对题设条件进行深入分析，分清是分“类”还是分“步”，抑或“类”中有“步”，切忌审题不清就仓促求解.

例 2 (1)由数字 1,2,3 可组成多少个三位数？

(2)由 0,1,2,…,9 十个数字可组成多少个不同的四位数(数字可重复出现)？

解题指导:审题是解题的关键，审题时，宁可多花些时间，把题目多读几遍，仔细推敲每一字、句的含义，以真正领会题意.例如本题：首先应搞清所组成的是几位数，这个数有无限制(首位不能排 0)，各位数上的数字是否可以重复……在排一个几位数时，还要结合题目条件特点确定完成这件事的方法、步骤.

解:(1)可分三步：第一步，先确定百位数，可取 1、2、3 这三个数字中的任一个，故有 3 种方法；

第二步，再确定十位数，因为数字可以重复，故有 3 种方法；

第三步，确定个位数，亦有 3 种方法；

∴由乘法原理，知共有三位数 $N=3\times3\times3=27$(个).

(2)可分四步：第一步，先确定首位即千位上的数字，因为0不能排首位，只能从1,2,…,9这9个数字中选一个，故有9种方法；

第二步，确定百位上的数字，因数字可重复出现，故有10种方法；

第三步，确定十位上的数字，共有10种方法；

第四步，确定个位上的数字，共有10种方法；

∴根据乘法原理，共有不同的四位数 $9\times10\times10\times10=9\times10^3$(个).

例3 (1)将4封信投入3个邮筒，有多少种不同的投法？

(2)3位旅客，到4个旅馆住宿，有多少种不同的住宿方法？

(3)8本不同的书，任选3本分给3个同学，每人1本，有多少种不同的分法？

解题指导：首先搞清怎样才算完成一件事：(1)将4封信投到邮筒中，才算完成了这件事；(2)3位旅客住到旅馆中，才算完成这件事.搞清这一点后，(1)、(2)即可解决；(3)3个同学分别得到1本书，才算完成了这件事.

解：(1)分四步：每投一封信算其中的一步，而每一封信都有3种不同的投法，故共有不同投法 $N=3\times3\times3\times3=3^4$(种).

(2)分三步：每位旅客都有4种不同的住宿方法，故共有不同住宿方法 $N=4\times4\times4=4^3$(种).

(3)分三步：第一步，第一位同学从8本不同的书中任取

一本，有 8 种方法；

第二步，第二位同学从剩下的 7 本不同的书中任取一本，有 7 种方法；

第三步，第三位同学从剩下的 6 本不同的书中任取一本，有 6 种方法.

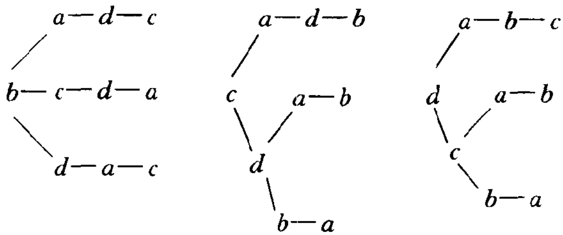
根据乘法原理，共有不同分法 $N=8\times7\times6=336$(种).

[导评]求解这类题目，要仔细审题，搞清“谁选择谁”，如，(1)中信选择邮筒；(2)中旅客选择旅馆；(3)中同学选择书.但(1)、(2)中可重复选择；(3)中不可重复选择，当第一个同学选择以后，第二个同学就只能从剩下的书中选择 1 本了等.

例 4 a、b、c、d 排成一行，其中 a 不排第一，b 不排第二，c 不排第三，d 不排第四的不同排法有多少种？

解法指导：对于此类问题，采用画“树图”法比较有效.

解：依题意，符合要求的排列法可以分为三类，即第一个排 b、c、d 中的某一个，每类中不同排法可采用画“树图”的方式逐一画出.



第 1—1 题图

∴符合题意的不同排法共有 9 种.

[导评]本题应用了加法原理的思考方式:“分类”思考,将问题分为三大类,每一大类又分为几小类,而要完成每一小类,又离不开乘法原理提供的“分步”思想.所以,我们应从这个小题中领悟两点:(1)充分认识到加法原理和乘法原理为我们所提供的分析问题的“分类”与“分步”的思想方法;(2)掌握“树图”的画法,理解“树图”是一种把握不同排法规律的直观、有效的方法.

习 题 一

1. 选择题

(1)从 6 本不同的书中任取出 4 本分给 4 位同学,每人 1 本,不同的分法共有(　　).

(A)24 种　　(B)120 种

(C)360 种　　(D)1 440 种

(2)将 5 封信投入 3 个邮筒,不同的投法共有(　　).

(A)5^3 种　　(B)3^5 种　　(C)3 种　　(D)15 种

(3)由 0,1,2,3 组成比 300 大的三位数共有(　　)个.(无重复数字)

(A)6　　(B)18　　(C)208　　(D)24

(4)某城市的电话号码由七位数字组成,此城市最多可以安装(　　)门电话.(电话号码首位不能为 0)

(A)9^7　　(B)7^9　　(C)10^6　　(D)9×10^6

(5)从 1～8 这 8 个数字中任取两个相加(不重复取),其和是偶数的种数比其和是奇数的种数(　　).

(A)多 1 种　　(B)多 4 种

(C)少 2 种　　(D)少 4 种

(6)已知集合 $M=\{1,-2,3\}$, $N=\{-4,5,6,-7\}$, 从两个集合中各取出 1 个元素配对作为点的坐标, 则可得到直角坐标系中, 第一、二象限内的不同点(　　)个.

(A)18　　(B)10　　(C)16　　(D)14

2. 填空题

(1)由数字 2,3,4,5 可组成______个三位数, ______个四位数, ______个五位数.

(2)从 1～10 这 10 个自然数中任意取出两个相加, 所得的和为奇数的不同情形有______种.

(3)乘积 $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$ 展开后共有______项.

(4)商店里有 15 种上衣, 18 种裤子, 某人要买一件上衣或一条裤子, 共有______种不同的选法. 要买上衣、裤子各 1 件, 共有______种不同的选法.

3. 王平同学有若干本课外参考书, 其中外语 5 本, 数学 4 本, 物理 3 本, 化学 2 本. 他欲带参考书到图书馆看书,

(1)若从这些参考书中选 1 本, 有多少种不同的选法?

(2)若从外语、数学、物理和化学参考书中各选 1 本, 有多少种不同的选法?

(3)若从这些参考书中选 2 本不同学科的, 有多少种不同的选法?

4. 若 x, y 仅能取 $0,1,2,\cdots,9$, 那么,

(1)可以组成多少个不同的复数 $x+yi$?

(2)可以组成多少个不同的虚数 $x+yi$?

(3)可以组成多少个不同的实数 $x+yi$?

5. 一把数字号码锁共有 5 个号码,每个号码的圆盘上有 0,1,2,…,9 共 10 个数码,现给这把锁一个开锁的密码(只有当拨到这个数字时,锁才能开启),这样的密码有多少个?有一个人在这把锁上随意拨出五位号码,它刚好能开启这把锁的可能性是多少?

习题一答案

1. (1)C. (2)B. (3)A. (4)D. (5)D. (6)D.

2. (1)$4^3,4^4,4^5$.

(2)25.

(3)60.

(4)33,270.

3. (1)有 $5+4+3+2=14$(种).

(2)有 $5\times4\times3\times2=120$(种);

(3)有 $5\times4+5\times3+5\times2+4\times3+4\times2+3\times2=71$(种).

4. (1)可组成 100 个复数;

(2)可组成 90 个不同的虚数;

(3)可组成 10 个不同的实数.

5. 共有 $10\times10\times10\times10\times10=10^5$(个号码),一个人随意拨出五位号码,开启的可能性为$\frac{1}{10^5}$.

二 排 列

本小节的内容包括排列、排列数、排列数公式及排列应用题等，它们是上一节内容的延续，是上一节所展示思想方法的具体应用，也是进一步学习下一节内容的基础．所以，本节内容是本章的一个重点，只有把本节内容理解透彻了，才能较好地学习后续内容．正因为如此，对本节概念及公式我们还须作进一步的剖析：

1．排列

从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列．

这里需要注意：

(1)给出的 n 个元素是互不相同的，且从 n 个元素中抽取 m 个元素是没有重复抽取情况的，因而这 m 个元素也是互不相同的，这就决定了 $m\leqslant n$．

(2)排列的定义中包含两个基本内容：