

高中各科知识精要指导丛书

天门

教学考

3+X 高考数学总复习

TIANMEN



天门市教研室 编

华中师范大学出版社

走进高校的台阶 / 决胜高考的秘招 / 3+X 备考的课堂

总主编 刘祥国 姚洪波
副总主编 谢虎成 马之棠 熊中庭

天门教学考

3+X 高考数学总复习

天门市教研室 编

本册主编	刘兵华	李社红	马振标
本册编委	汪中海	代承红	石水峰
	廖鹏根	卢么中	张德尚
	熊衍彪	肖家怀	蒋良臣
	肖会仁	刘庆平	方运法
	陈 峰	钱红林	刘兵华
	吴兰俊		

国家教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

2001年·武汉

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

天门教学考——3+X 高考数学总复习/天门市教研室编,本册主编刘兵华.

—武汉:华中师范大学出版社,2001.1

(天门教学考/总主编刘祥国,姚洪波)

ISBN 7-5622-2321-1/G·1131

I. 3...

II. 刘...

III. 数学课—高中—教学参考书

IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 86967 号

天 门 教 学 考
3+X 高考数学总复习

© 天门市教研室 编
本册主编 刘兵华

华中师范大学出版社出版发行
(武昌桂子山 邮编:430079 电话:027-87876240)

新华书店湖北发行所经销

华中科技大学印刷厂印刷

责任编辑:彭守权
责任校对:张 钟

封面设计:新视点
督 印:方汉江

开 本:787×960 1/16
版 次:2001 年 1 月第 1 版
印 数:1-10 000

印 张:14.75 字数:296 千字
2001 年 1 月第 1 次印刷
定 价:15.00 元

本书如有印装质量问题,可向承印厂调换。

出版说明

天门,古称竟陵,是江汉平原上一颗璀璨的明珠。1983年高考录取人数居全国县市之首而被著名作家秦牧誉为“高考状元县”,1984年高考上线数首过千人大关,以后逐年递增。1993年《人民日报》记者杜若原盛赞天门高考,“江汉才子出天门”的佳话广为流传。2000年高考过省线数达4783人,居湖北省榜首,且湖北省高考理科第一、二名均被该市考生夺得。该市的高中毕业生一直被清华、北大、中科大、复旦、南开等名校看好。

天门的成功不仅在于重点中学摘金挂银,更为可贵的是普通高中也不甘落后,全市所辖八所高中2000年过省线最少的学校(参加高考的学生仅500余人)也达到了327人,体现出强劲的整体优势。

天门的成功不仅在于把优秀的学生培养成了一枝独秀的高考“状元”,更为可贵的是他们帮助大批基础较差、成绩一般的学生圆了大学之梦。

天门的成功与天门市教研室科学的教学指导是密不可分的。他们举教学改革之旗,向教学研究要质量,向科学备考要成绩,以挖掘学生的智力潜能为目标,把课题研究与复习指导紧密结合,摸索出了一套独特的教、学、考的成功经验。这些经验经全国各地众多取“经”者使用,证明不仅天门适用,在外地也行之有效。

为了满足广大考生的需求,我们约请天门市教研室组织全市各科中心教研组骨干教师编写了这套丛书。本丛书总结了天门市近年来“U·P·A复习教学法”和“3+X”的研究成果,体现了天门市高中复习备考的成功经验,是“天门经验”的第一次完整公开出版。

本书分两大部分,第一部分“3+X”课堂是本书的主体,是专为第二轮复习设计的。下设四个栏目:

知识网络—织网子。遵循学生认知心理,从整体出发,将单元知识构成一张简明的网,以揭示各部分知识之间及与其他学科之间的内在联系,从而建立完整的、立体的、开放的知识系统。

学法导航—教法子。方法得当,事半功倍。学习有“窍门”,教学有“绝招”,这“窍门”、“绝招”,其实就是学习的规律和方法,本不神秘,考生一旦把握,受益多多。

考题精析—引路子。一道好题就是一大知识板块,就是一类解题方法。本书通过对

经典考题的分析,点拨思路,指导方法,规范程序,训练技巧,以求举一反三,触类旁通。

创新演练—练脑子。知识在演练中深化,方法在应用中活化,技能在训练中强化。本书通过适度的、新颖的、精巧的习题训练,使学生开阔视野,拓展思维,巩固提高。

第二部分“3+X”考场可供第三轮复习用。它既是模拟训练,又是实战演习,同时也体现了作者对今年高考走向的分析和预测。

复习备考本无捷径可走,但规律和方法是有的。我们组编本丛书的目的不在于猜题押宝,而是想帮助您探索规律、优化方法、少走弯路、提高效率。但愿它能给您启迪,伴您成功。

华中师范大学出版社

2001年1月9日

目 录



第一编 3 + X 课堂

第一单元 集合	(1)
一、知识网络	(1)
1. 知能链结	(1)
2. 目标强化	(1)
二、学法导航	(2)
三、考题精析	(2)
四、创新演练	(3)
第二单元 映射与函数	(6)
一、知识网络	(6)
1. 知能链结	(6)
2. 目标强化	(6)
二、学法导航	(6)
三、考题精析	(7)
四、创新演练	(9)
第三单元 二次函数	(11)
一、知识网络	(11)
1. 知能链结	(11)
2. 目标强化	(11)
二、学法导航	(11)
三、考题精析	(12)
四、创新演练	(13)
第四单元 函数的性质(奇偶性、单	

调性、周期性)	(16)
一、知识网络	(16)
1. 知能链结	(16)
2. 目标强化	(16)
二、学法导航	(16)
三、考题精析	(17)
四、创新演练	(18)
第五单元 函数图像与反函数	
	(21)
一、知识网络	(21)
1. 知能链结	(21)
2. 目标强化	(21)
二、学法导航	(21)
三、考题精析	(21)
四、创新演练	(23)
第六单元 幂函数、指数函数与对	
数函数	(25)
一、知识网络	(25)
1. 知能链结	(25)
2. 目标强化	(25)
二、学法导航	(25)
三、考题精析	(26)
四、创新演练	(27)
第七单元 单位圆与三角函数	(30)

一、知识网络	(30)
1. 知能链结	(30)
2. 目标强化	(30)
二、学法导航	(31)
三、考题精析	(31)
四、创新演练	(33)
第八单元 三角函数的图像与性质	
.....	(35)
一、知识网络	(35)
1. 知能链结	(35)
2. 目标强化	(35)
二、学法导航	(36)
三、考题精析	(36)
四、创新演练	(37)
第九单元 三角函数的基本公式(一)	
.....	(40)
一、知识网络	(40)
1. 知能链结	(40)
2. 目标强化	(40)
二、学法导航	(40)
三、考题精析	(41)
四、创新演练	(43)
第十单元 三角函数的基本公式(二)	
.....	(45)
一、知识网络	(45)
1. 知能链结	(45)
2. 目标强化	(45)
二、学法导航	(45)
三、考题精析	(46)
四、创新演练	(47)
第十一单元 反三角函数	(50)
一、知识网络	(50)
1. 知能链结	(50)

2. 目标强化	(50)
二、学法导航	(50)
三、考题精析	(51)
四、创新演练	(52)
第十二单元 解不等式	(55)
一、知识网络	(55)
1. 知能链结	(55)
2. 目标强化	(55)
二、学法导航	(55)
三、考题精析	(56)
四、创新演练	(57)
第十三单元 不等式的应用	(60)
一、知识网络	(60)
1. 知能链结	(60)
2. 目标强化	(60)
二、学法导航	(60)
三、考题精析	(60)
四、创新演练	(62)
第十四单元 含参数的不等式的解法	
.....	(65)
一、知识网络	(65)
1. 知能链结	(65)
2. 目标强化	(65)
二、学法导航	(65)
三、考题精析	(65)
四、创新演练	(68)
第十五单元 等差数列与等比数列	
.....	(70)
一、知识网络	(70)
1. 知能链结	(70)
2. 目标强化	(70)
二、学法导航	(71)
三、考题精析	(71)

四、创新演练·····	(73)	1. 知能链结·····	(96)
第十六单元 数列的极限、特殊数列		2. 目标强化·····	(96)
求和·····	(75)	二、学法导航·····	(96)
一、知识网络·····	(75)	三、考题精析·····	(96)
1. 知能链结·····	(75)	四、创新演练·····	(98)
2. 目标强化·····	(75)	第二十一单元 二项式定理·····	(101)
二、学法导航·····	(75)	一、知识网络·····	(101)
三、考题精析·····	(75)	1. 知能链结·····	(101)
四、创新演练·····	(78)	2. 目标强化·····	(101)
第十七单元 数学归纳法·····	(80)	二、学法导航·····	(101)
一、知识网络·····	(80)	三、考题精析·····	(101)
1. 知能链结·····	(80)	四、创新演练·····	(103)
2. 目标强化·····	(80)	第二十二单元 空间的直线与直线	
二、学法导航·····	(80)	·····	(105)
三、考题精析·····	(81)	一、知识网络·····	(105)
四、创新演练·····	(83)	1. 知能链结·····	(105)
第十八单元 复数的概念与运算		2. 目标强化·····	(105)
·····	(86)	二、学法导航·····	(106)
一、知识网络·····	(86)	三、考题精析·····	(106)
1. 知能链结·····	(86)	四、创新演练·····	(108)
2. 目标强化·····	(86)	第二十三单元 空间的直线与平面	
二、学法导航·····	(86)	·····	(112)
三、考题精析·····	(86)	一、知识网络·····	(112)
四、创新演练·····	(88)	1. 知能链结·····	(112)
第十九单元 复数与几何·····	(91)	2. 目标强化·····	(112)
一、知识网络·····	(91)	二、学法导航·····	(112)
1. 知能链结·····	(91)	三、考题精析·····	(113)
2. 目标强化·····	(91)	四、创新演练·····	(115)
二、学法导航·····	(91)	第二十四单元 空间的平面与平面	
三、考题精析·····	(92)	·····	(118)
四、创新演练·····	(93)	一、知识网络·····	(118)
第二十单元 排列与组合·····	(96)	1. 知能链结·····	(118)
一、知识网络·····	(96)	2. 目标强化·····	(118)

二、学法导航	(118)	四、创新演练	(148)
三、考题精析	(119)	第二十九单元 极坐标	(151)
四、创新演练	(122)	一、知识网络	(151)
第二十五单元 多面体与旋转体的 面积	(125)	1. 知能链结	(151)
一、知识网络	(125)	2. 目标强化	(152)
1. 知能链结	(125)	二、学法导航	(152)
2. 目标强化	(125)	三、考题精析	(152)
二、学法导航	(126)	四、创新演练	(154)
三、考题精析	(126)	第三十单元 参数方程及其应用	(156)
四、创新演练	(128)	一、知识网络	(156)
第二十六单元 多面体与旋转体的 体积	(131)	1. 知能链结	(156)
一、知识网络	(131)	2. 目标强化	(156)
1. 知能链结	(131)	二、学法导航	(156)
2. 目标强化	(131)	三、考题精析	(157)
二、学法导航	(132)	四、创新演练	(160)
三、考题精析	(132)	第三十一单元 轨迹方程的探索	(162)
四、创新演练	(135)	一、知识网络	(162)
第二十七单元 直线与圆	(138)	1. 知能链结	(162)
一、知识网络	(138)	2. 目标强化	(162)
1. 知能链结	(138)	二、学法导航	(162)
2. 目标强化	(138)	三、考题精析	(163)
二、学法导航	(139)	四、创新演练	(166)
三、考题精析	(139)		
四、创新演练	(143)		
第二十八单元 圆锥曲线	(145)	第二编 3+X 考场	
一、知识网络	(145)	高考模拟试题(一)	(169)
1. 知能链结	(145)	高考模拟试题(二)	(172)
2. 目标强化	(145)	高考模拟试题(三)	(176)
二、学法导航	(145)	高考模拟试题(四)	(180)
三、考题精析	(146)	高考模拟试题(五)	(184)
		附录 参考答案	(187)

第一编 3 + X 课堂

第一单元 集合

知识网络

知能链接

1. 本节知识点主要是两块,一块为集合的有关概念,一块为集合的有关运算.它为中学数学提供最原始的概念和符号语言,为运用数学语言(集合语言)进行阅读与叙述,运用集合思想、整体性(全体性)观点进行思维提供基础.

2. 理解集合的概念及其基本性质:整体性、确定性、互异性和无序性;理解子集、交集、并集、补集的概念及属于、包含、相等、互补等关系的意义.

3. 能判定元素、集合等之间的关系,进行集合的相关运算.

目标强化

1. 集合 $A = \{x | x + 2 > 0\}$; $B = \{x | x + 2 > 0\}$; $C = \{(x, y) | y = x + 2\}$; $D = \{y | y = x + 2, x \in \mathbf{R}\}$ 中数集的个数是().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 下面六个关系式:① $\emptyset \subset \{a\}$; ② $a \subset \{a\}$; ③ $\{a\} \subseteq \{a\}$; ④ $\{a\} \in \{a, b\}$; ⑤ $a \in \{a, b, c\}$; ⑥ $\emptyset \in \{a, b\}$; 其中正确的是().

A. ① ② ③ ④ B. ③ ⑤ ⑥ C. ① ④ ⑤ D. ① ③ ⑤

3. 设全集 $I = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $M = \left\{ (x, y) \left| \frac{(y-3)}{(x-2)} = 1 \right. \right\}$, $N = \{(x, y) | y \neq x + 1\}$, 那么 $\overline{M \cup N}$ 等于().

A. $\emptyset$ B. $\{(2, 3)\}$ C. $(2, 3)$ D. $\{(x, y) | y = x + 1\}$

4. 含有三个实数的集合可表示为 $\{a, \frac{b}{a}, 1\}$, 也可表示为 $\{a^2, a + b, 0\}$, 求 $a^{2001} + b^{2000}$ 的值.

5. 若集合 $A = \{x | x^2 + ax + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{1, 2\}$, 且 $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围.

学法导航

集合为中学数学最原始的概念,属不定义概念,因此集合及其衍生的子集、交集、并集、补集的概念及属于、包含、相等、互补等概念的涵义的理解是本节重点,难点是各概念间的区别与联系,如交集与并集的本质区别在于逻辑联结词“且”与“或”的区别;属于与包含一个反映元素与集合的关系,一个反映集合与集合的关系.在历年高考题中,集合几乎都会考到,题型一般为容易题.要注意运用数轴、韦恩图的直观辅助作用.熟记有关全集、空集及集合运算性质的一类常用结论.如: $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup I = I$ $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (分配律).

考题精析

【例 1】 已知全集 $I = \{\text{不大于 } 12 \text{ 的非负偶数}\}$, 集合 $M \cap N = \{2, 12\}$, $\overline{M} \cup \overline{N} = \{6, 10\}$, $M \cap \overline{N} = \{8\}$, 求集合 M, N .

讲析 作出集合关系的韦恩图,运用几何直观.

解 $I = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, 作出集合的韦恩图如下: 可以得出: $M = \{2, 8, 12\}$, $N = \{0, 2, 4, 12\}$.

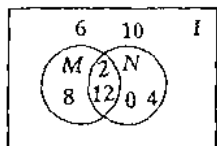


图 1-1

又解: $\because (M \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = M \cap (N \cup \overline{N}) = M \cap I = M$,

$\therefore M = (M \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \{2, 12\} \cup \{8\} = \{2, 8, 12\}$.

同理: $(\overline{M} \cup \overline{N}) \cup (M \cap \overline{N}) = (\overline{M} \cap \overline{N}) \cup (M \cap \overline{N}) = \overline{N} \cap (\overline{M} \cup M) = \overline{N}$.

$\therefore \overline{N} = (\overline{M} \cup \overline{N}) \cup (M \cap \overline{N}) = \{6, 10\} \cup \{8\} = \{6, 8, 10\}$. $\therefore N = \overline{\overline{N}} = \{0, 2, 4, 12\}$.

【例 2】 设集合 $P = \{x | x^2 - 4x - 5 < 0\}$, $Q = \{x | x - a \leq 0\}$,

(1) 若 $P \cap Q = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围; (2) 若 $P \subset Q$, 求实数 a 的取值范围.

讲析 讨论区间之间的关系, 可利用数轴直观求解.

解 化简得: $P = \{x | -1 < x < 5\}$, $Q = \{x | x \leq a\}$.

如图:

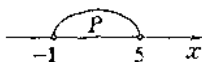


图 1-2

(1) 由图可知, 若 $P \cap Q = \emptyset$, 则 $a \leq -1$, $\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty, -1]$.

(2) $\because P \subset Q$, $\therefore a \geq 5$, $\therefore a$ 的取值范围为 $[5, +\infty)$.

【例 3】 设集合 $A = \{x | x^2 + (2m-3)x - 3m = 0\}$, $B = \{x | x^2 + (m-3)x + m - 3m = 0\}$, 如果 $A \neq B$, 且 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的值和 $A \cup B$.

讲析 在两方程分别不好解的情况下,可联立起来求公共解.

解 $\because A \cap B \neq \emptyset$, 且 $A \neq B$, $\therefore$ 两方程有且仅有一个公共根, 设为 x_0 ,

$$\text{则有: } x_0^2 + (2m-3)x_0 - 3m = 0 \quad \text{①}$$

$$x_0^2 + (m-3)x_0 + m^2 - 3m = 0 \quad \text{②}$$

两式相减得: $mx_0 - m^2 = 0$, $\therefore x_0 = m$ (若 $m=0$, 则 $A=B$ 与已知矛盾).

将 $x_0 = m$ 代入方程①得: $m^2 + (2m-3)m - 3m = 0$,

解得 $m=2$. 将 $m=2$ 分别代入①, ②得

$$A = \{-3, 2\}, \quad B = \{-1, 2\}, \quad \therefore A \cup B = \{-3, -1, 2\}.$$

【例4】 设 $f(x) = x^2 + px + q$, $A = \{x | x = f(x)\}$, $B = \{x | f[f(x)] = x\}$,

(1) 求证 $A \subseteq B$; (2) 如果 $A = \{-1, 3\}$, 求 B .

讲析 严密的证明只能利用 $A \subseteq B$ 的定义, 其过程中又要用 $x \in A, x \in B$ 的定义.

(1) 证明 对于任意 $x_0 \in A$, 则 $x_0 = f(x_0)$, $\therefore f[f(x_0)] = f(x_0) = x_0$,

$\therefore x_0 \in B$, $\therefore A \subseteq B$.

(2) $\because A = \{-1, 3\}$, $\therefore x = f(x) = x^2 + px + q$ 的根为 $-1, 3$,

由韦达定理得: $p = -1, q = -3$, $\therefore f(x) = x^2 - x - 3$.

由 $A \subseteq B$ 知: $f[f(x)] = x$ 中含有 $f(x) - x$ 的因式,

而由 $f[f(x)] = x$ 得:

$$\begin{aligned} f^2(x) - f(x) - 3 - x &= [f(x) - x + x]^2 - [f(x) - x + x] - 3 - x \\ &= \cdots = [f(x) - x][f(x) + x] = 0. \end{aligned}$$

$\therefore f(x) - x = 0$ 或 $f(x) + x = 0$ 将 $f(x) = x^2 - x - 3$ 代入解得:

$$x = -1, 3 \text{ 或 } x = \pm\sqrt{3}, \quad \therefore B = \{-\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}, 3\}.$$

创新演练

一、选择题:

1. 记满足下列条件的函数 $f(x)$ 的集合为 M , 当 $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4|x_1 - x_2|$, 若 $g(x) = x^2 + 2x - 1$, 则 $g(x)$ 与 M 的关系是().

- A. $g(x) \in M$ B. $g(x) \notin M$ C. $g(x) \subseteq M$ D. $g(x) \subset M$

2. 已知 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x | ax = 1\}$, 若 $B \subset A$, 则实数 a 的值构成的集合 M 是().

- A. $\{-1, 0, \frac{1}{3}\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{-1, \frac{1}{3}\}$ D. $\{\frac{1}{3}, 0\}$

3. 已知集合 $M = \{\text{直线}\}$, $N = \{\text{圆}\}$, 则 $M \cap N$ 中的元素的个数为().

- A. 0 B. 0, 1, 2 其中之一 C. 无穷 D. 无法确定

4. 设 $M = \{x | f(x) = 0\}$, $N = \{x | g(x) = 0\}$, 则 $\{x | f(x)g(x) = 0\}$ 为().
 A. M B. N C. $M \cup N$ D. 以上都不对
5. 在直角坐标系内, 坐标轴上的点的集合可表示为().
 A. $\{(x, y) | x=0, y \neq 0 \text{ 或 } x \neq 0, y=0\}$
 B. $\{(x, y) | x=0 \text{ 且 } y=0\}$
 C. $\{(x, y) | xy=0\}$
 D. $\{(x, y) | x, y \text{ 不同时为 } 0\}$
6. 集合 $A = \{(x, y) | y = |x|, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y > 0\}$, 则 A 与 B 的关系是().
 A. $A \subset B$ B. $A \subseteq B$ C. $B \subset A$ D. 以上都不对
7. $x \in A \cap B$ 的否命题是().
 A. $x \notin A$ 且 $x \notin B$ B. $x \notin A \cup B$ C. $x \in A$ 但 $x \notin B$ D. $x \notin A$ 或 $x \notin B$
8. 集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则().
 A. $M = N$ B. $M \supset N$ C. $M \subset N$ D. $M \cap N = \emptyset$
9. 已知映射 $f: A \rightarrow B$, 其中, 集合 $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象, 且对任意的 $a \in A$, 在 B 中和它对应的元素是 $|a|$, 则集合 B 中元素的个数是().
 A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
10. 从集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 到集合 $B = \{3, 4\}$ 的映射 f 中满足条件 $f(3) = 3$ 的映射的个数是().
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

二、填空题:

11. 已知集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $N = \{a, b, c\}$, 设集合 M 到集合 N 的不同映射的个数为 m , 若集合 N 中的每个元素在集合 M 中能找到原象的映射的个数为 n , 那么 $\frac{m}{n} =$ _____.
12. 设全集 $I = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{2, |a + 1|\}$, $\bar{A} = \{5\}$, $M = \{x | x = \log_2 |a|\}$, 则集合 M 的所有子集是_____.
13. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 则实数 m 组成的集合是_____.
14. 下列从 M 到 N 的各种对应法则中, 是映射的为_____.
 (1) $M = \{\text{直线 } Ax + By + C = 0\}$, $N = \mathbf{R}$, f_1 : 求直线 $Ax + By + C = 0$ 的斜率.
 (2) $M = \{\text{直线 } Ax + By + C = 0\}$, $N = \{0 \leq \alpha < \pi\}$, f_2 : 求直线 $Ax + By + C = 0$ 的倾角.

(3) $M=N=\mathbf{R}$, f_3 : 求 M 中每个元素的正切.

(4) $M=N=\mathbf{R}^+$, f_4 : 求 M 中每个元素的算术平方根.

三、解答题:

15. 已知 $A = \{x | x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 求实数 p 的取值范围.

16. 若集合 $A = \{a, a+d, a+2d\}$, 集合 $B = \{a, aq, aq^2\}$, 其中 $a, d, q \in \mathbf{R}$, 若 $A=B$, 求实数 q 的值.

17. 设 A 是数集, 满足 $a \in A \Rightarrow \frac{1}{1-a} \in A$, 且 $1 \in A$. (1) 若 $2 \in A$, 求 A ; (2) A 能否为单元素集? 若能, 求出 A .

18. 设 $A = \{(x, y) | y^2 = x + 1\}$, $B = \{(x, y) | 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}$, $C = \{(x, y) | y = kx + b\}$, 问是否存在自然数 k, b , 使 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$? 证明你的结论.

第二单元 映射与函数

知识网络

知能链接

1. 教纲考纲要求:了解映射、函数的概念,能判定一些简单的对应是不是映射、函数,会求简单函数的解析式、定义域、值域.

2. 集合、对应、映射、函数与反函数是一系列的概念,它们都是高中代数特别是整个函数理论的基本概念;求函数解析式中所包含的待定系数法、换元法、配凑法,求定义域中的解不等式,求值域中的判别式法、换元法、单调性法、不等式法等方法贯穿整个高中代数的始终,因而这一节无论从理论到方法都是中学数学的基石.

目标强化

1. 在从集合 A 到集合 B 的映射中,下面说法不正确的是().

- A. A 中的每一个元素在 B 中都有象
B. B 中的元素在 A 中可以没有原象
C. A 中的两个不同元素在 B 中的象必不相同
D. B 中的某一元素在 A 中的原象不只一个

2. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ -x+3 & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(\frac{5}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 满足 $f(3) = f(1) + f(2)$ 的映射 $f: A \rightarrow B$ 的个数是().

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 7

4. 设函数 $y = \lg(x^2 - x - 2)$ 的定义域是 A , 函数 $y = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ 的定义域是 B , 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \leq 0 \\ x+3 & 0 < x \leq 1 \\ -x+5 & x > 1 \end{cases}$ 的值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

学法导航

对应、映射、函数等都是反映两个个体(集合及其内的元素)之间的相互关系,要掌握

它们的区别与联系.映射是特殊的对应,其特殊性表现在存在性(A 中元素在 B 中都有象)和惟一性(A 中元素在 B 中都有惟一的象).函数又是特殊的映射,其特殊性表现在 A 、 B 为非空数集.除弄清上述概念之外,对函数问题中常见的配方法、判别式法、换元法、单调性法、基本不等式法及不等式的解法也应注意归纳,学习,加以掌握,必将受益深远.

考题精析

【例 1】 从盛满 20 升纯酒精的容器里倒出 1 升,然后用水填满,再倒出 1 升混合溶液后又用水填满,这样继续进行,如果到倒第 $k(k \geq 1)$ 次时共倒出纯酒精 x 升,设到倒第 $k+1$ 次时共倒出纯酒精 $f(x)$ 升,则函数 $f(x)$ 的表达式为_____.

讲析 看起来是个数列问题,但由 x 的意义,我们只须考虑相邻两次中纯酒精的关系,不要求定义域、值域更使问题简化.可以思考实际意义对 x 取值范围的限定是怎样的.

解 由已知,倒第 k 次时共倒出纯酒精 x 升,故容器中还剩纯酒精 $20-x$ 升,第 $k+1$ 次倒出 1 升,其中有纯酒精 $\frac{20-x}{20}$ 升,所以至第 $k+1$ 次,共倒出纯酒精 $x + \frac{20-x}{20} = \frac{19}{20}x + 1$ (升).

【例 2】 如图,铁路线上 AB 段长 100 公里,工厂 C 到铁路的距离 CA 为 20 公里,现在要在 AB 上某一点 D 处,向 C 修一条公路.已知铁路每吨公里与公路每吨公里的运费之比为 3:5,为了使原材料从供应站 B 运到工厂 C 的运费最省, D 点应选在何处?

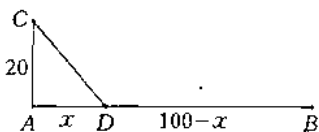


图 2-1

讲析 近年高考题中突出应用能力,而应用问题与函数知识联系较多.

解 设 AD 为 x 公里,铁路和公路每吨公里运费分别为 $3k$ 和 $5k$,记 B 到 C 的总运费为 y ,则 $y = 5k\sqrt{400+x^2} + 3k(100-x)$,即

$$\frac{y-300k}{k} = 5\sqrt{400+x^2} - 3x \quad (0 \leq x \leq 100), \text{ 令 } t = \frac{y-300k}{k},$$

$$\text{则 } (t+3x)^2 = 25(400+x^2), \text{ 即 } 16x^2 - 6tx + 10000 - t^2 = 0,$$

$$\because x \in \mathbf{R}, \therefore \Delta = 36t^2 - 64(10000 - t^2) \geq 0,$$

$$\text{解得 } |t| \geq 80, \text{ 当 } t = 80 \text{ 时}, x = 15,$$

即当 D 点取在距 A 点 15 公里处时,总运费最省.

又解:令 $\angle ACD = \theta, \theta \in [0, \arctan 5]$, 则总运费 $y = 20k \cdot \frac{5-3\sin\theta}{\cos\theta} + 300k$, 转化为求 $\frac{5-3\sin\theta}{\cos\theta}$ 的极值.

【例3】 向高为 H 的水瓶中注水,注满为止,如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图像如下图所示,那么水瓶的形状是().

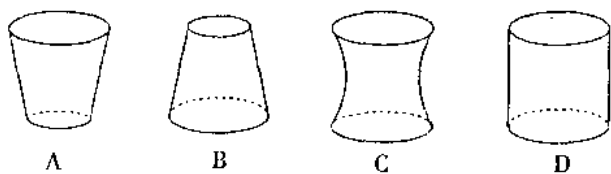


图 2-2

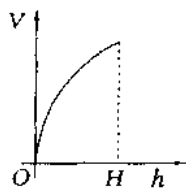


图 2-3

讲析 本题虽只是一个选择题,但考查知识相当全面、巧妙,如果企图求出体积的函数关系式再与函数图像比较,则不仅麻烦,且 C 的体积不会求,本题应利用选择题的特殊性采用间接算法求解.

解法一 从图像所反映的体积 V 随水深 h 的变化趋势看,增加相同的高度 h ,体积开始(底部)增加快,而后增加慢(图像开始陡,而后平缓),故开始截面半径大、水瓶粗,而往后(靠近顶部)时,水瓶变细,故答案只能取 B .

解法二(特例法、特值法) 考查特殊位置——水深为总高度一半时,体积应占总容积的比.在 A 中 $V_{\text{中}} < \frac{1}{2} V_{\text{顶}}$, B 中 $V_{\text{中}} > \frac{1}{2} V_{\text{顶}}$,而 C 、 D 中 $V_{\text{中}} = \frac{1}{2} V_{\text{顶}}$,

因图像上, $V_{\text{中}} > \frac{1}{2} V_{\text{顶}}$,故应选 B .

说明:两种解法都是间接算法中的筛选法(或说淘汰法),因为选择题只须选择,可以不直接求解.

【例4】 求函数 $y = x + \sqrt{1-x^2}$ 的值域.

讲析 关键是怎样去掉根号及利用 x 范围的限定条件.

解 $\because 1-x^2 \geq 0, \therefore -1 \leq x \leq 1$, 令 $x = \sin \theta$, 则 $\sqrt{1-x^2} = |\cos \theta|$,

令 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则 $\sin \theta$ 仍然取得 $[-1, 1]$ 内所有值且 $\cos \theta \geq 0$,

$\therefore |\cos \theta| = \cos \theta, \therefore y = \sin \theta + |\cos \theta| = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$.

$\because \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \therefore \theta + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

借助正弦函数图像可得函数值域为 $[-1, \sqrt{2}]$.

说明:上述解法中用到了换元法和数形结合法(图像略).