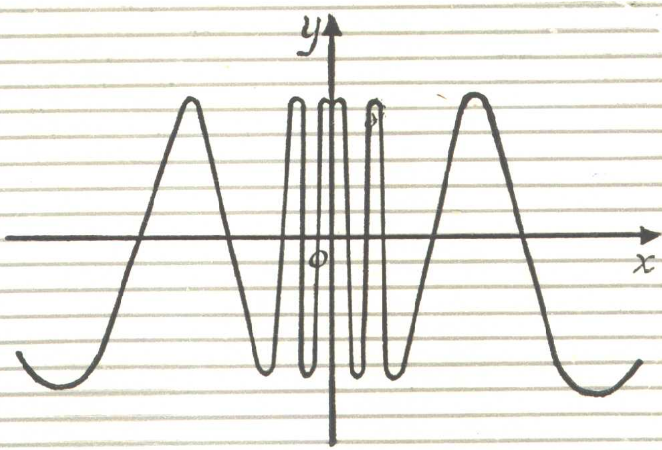
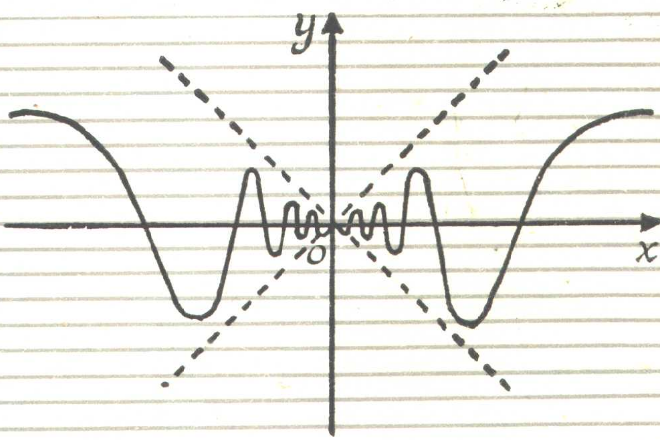


函数·极限·函数的连续性

梁嘉骅　汪明汉



函数·极限·函数的连续性

梁嘉骅　汪明汉

山西人民出版社

函数·极限·函数的连续性

梁嘉骅　汪明汉

*

山西人民出版社出版　太原并州北路十一号

山西省新华书店发行　山西新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：8.25　字数：169千字

1984年12月第1版　1984年12月太原第1次印刷

印数：1—4,500册

*

书号：7088·1208　　定价：1.00 元

出版说明

本书介绍函数、极限、函数连续性的基本理论和例题。重点是讲述这些理论发展的思想史、定理证明、演题的思想和技巧分析。它可以作为中学数学教师进修和教学参考书，并且可以作为函授学员、中学高年级学生以及自学者的参考读物。

编者的话

在本世纪以前，对一般人来说微积分还是一座迷宫，是只可神往而不可达的境界。人类发展了科学和文化，反过来，它对人的头脑进行了改造，使得和它相适应。在科学技术高度发达的今天，微积分可以、并且要求为更多人所掌握。近年来，我国和世界上很多国家已经把微积分初步列入中学数学的范畴，这正是微积分走向普及的标志。这样，在我国中学数学教师和中学生的面前，就面临着这样一个问题——如何教好和学好微积分的初步知识。作者编写这本书的目的是为了适应这种新形势。

本书选择《函数·极限·函数连续性》为书名的原因：首先，这部分内容是整个微积分学的基石——函数是微积分研究的主要对象，而极限又是微积分研究的主要工具；其次，它是高等数学的门扉、是从初等数学顺利步入高等数学的关键、是教和学的难点。

本书是一本参考读物，而不是一本教程，所以在内容的安排上没有使用通常教科书所使用的格式。笔者试图按照有关概念、定理、方法和技巧的产生背景、思路分析为重点来编写，希望有助于解决教和学中的疑难。但由于我们水平所限，书中难免存在缺点和错误，敬请读者指正。

目　　录

第一章

函　　数

本章介绍函数概念发展的历史，函数的概念、函数的性质以及研究函数必要的初等工具。这些材料是从初等数学迈进高等数学的起步点。

§1.1　历史的回顾

一位数学界的巨星——亨利·庞卡莱说过："如果我们要预见数学的未来，合适的途径是研究这门科学的历史和现状。"

一般来说，一本教科书它的主要目的，是按照所要介绍的学科已经形成的系统性，去介绍它已取得的成果。它不可能较为详细地介绍这门科学在形成过程中的思想发展、成功之路与失败的教训。这些是需要教师来加以填补的。因此，要求教师必须通晓它所要讲授的内容，包括思想发展史方面的知识。对于学生来说，掌握这方面的知识同样是十分重要的。

关于函数概念的产生和发展，应该追溯到十七世纪笛卡儿和伽利略等人的工作。他们是建立现代科学思想体系的巨

匠，他们正确地指出：世界的本质是物质和运动，而它们应该用数学方法表示。

随着笛卡儿坐标的建立、并从量的观点去研究物质和运动，在数学中引入一个最为重要的基本概念就是函数。函数的概念是随着科学技术的研究范围扩大而逐步发展的。早在伽利略的名著《两门新科学》中，已贯彻了变量和函数的思想。可以说，最先给函数下定义的是詹姆士·格里戈里，1667年他在《论圆和双曲线的求和》一文中，给函数下的定义为：从一些量经过一系列代数运算或其他任何可以想象到的运算而得到的量。现在所使用"函数"(function)一词是1673年由德国伟大的数学家莱布尼兹引入的。它是用来表示任何一个随着曲线上点的变动而变动的量。例如，切线、长度等等。同时他又引进了"常量"、"变量"和"参变量"等词。1714年他在《历史》一书中对函数一词又作了进一步的解析，认为："函数"是用来表示依赖于一个变量的量。即，现在被称为函数的"依赖关系定义"方式。

十七世纪的数学家已经清楚地了解，函数是研究变量间的依赖关系。但什么形式的依赖关系是有用的有研究价值的？这问题是函数概念发展的主线。

在十七世纪以前，科学技术中所出现的函数主要是代数函数。十七世纪人们对力学、几何学进一步的研究提出了一些新的函数，如 $\log x$、$\sin x$，a^x 等初等超越函数。在这样的历史条件下，产生了以欧拉和约翰·伯努利为代表的函数定义方式。1697年约翰·伯努利把函数定义为："是一个以任何方式用变量和常量构成的量。"按他的意思，"任何方式"是指代数式和超越式。1718年他引用 ϕx 表示 x 的函数。

现代所使用的函数记号 $f(x)$，是欧拉在1734年引入的．并且他在《引论》一书中，把函数定义为：是由变量与一些常量，通过任何方式形成的解析表达式．他所指的解析表达式包括了用积分表示的表达式．约翰·伯努利和欧拉所给出的定义，实质上是把函数概念的公式化，即现在称为函数的“公式定义”方式．与此观点类似的人是拉格朗日，在他1806年出版的《函数计算》一书中，把函数定义为：要得到未知量的值而对已知量必须要完成的运算，即函数是运算的一个组合．

到了十八世纪的后半叶，由于力学所研究的问题扩大，特别是对于弦振动问题的研究，逼使数学家不得不重新考虑函数的概念．因为在弦振动过程中出现的变量关系，是不能用欧拉规定的解析式来表示的．这样，欧拉和拉格朗日不得不扩充他们的函数定义，允许函数在不同的区域用不同的表达式，这就是现代所称的分段函数．1755年欧拉重新给出函数的定义，定义为：“如果某些量这样地依赖于另一些量，当后者改变时它经受变化，那么称前者为后者的函数”．“当后者变化时它经受变化”这一说法是含糊不清的，并没有对变化作任何的限制，甚至可以认为恢复到莱布尼兹的定义．直到十九世纪初，1837年，才由狄里赫勒给出了现代微积分学中所常用的函数定义方式．狄里赫勒在《用正弦和余弦级数来表示完全任意的函数》一文中，把函数定义为：如果对于给定区间上每一个 x 的值有唯一的一个 y 值同它对应，那么 y 就是 x 的一个函数．这种定义方式称为“对应关系定义”方式．

从詹姆士·格里戈里到狄里赫勒，函数概念的发展经历

了一百七十年．但这不是函数概念发展的终结．随着科学技术的发展，函数的概念得到进一步的发展，以后又出现了用集合语言的函数定义方式．这种定义包括了狄里赫勒的定义．

从函数概念的发展可以看出，十七世纪以来，数学家的研究遵循着由笛卡儿和伽利略提出的原则：数学的研究只有反映自然和付之应用才有真正的价值．函数概念的发展经历过几个阶段，出现过“依赖关系定义”方式、“公式定义”方式、“对应关系定义”方式和“集合语言定义”方式．每一阶段都反映着当时科学技术发展的水平和需要．

§1.2　函数的概念

研究函数首先要正确地了解函数的概念．本节首先介绍量和量值、变量等更为基本的概念，然后给出函数的定义和讨论函数要素分析、函数关系表示法及函数概念的推广等问题．

一　量和量值

教师在讲授变量与函数时，往往以这样的一段话作为开场白：在我们的日常生活、生产实践以及科学研究中，遇到各种各样的量，一些量在所研究的过程中是可以取不同的值的，这种量称为变量．……

但是，一个善于思索的学生会提出：“什么是量？”

量是一个抽象的基本概念．

一个长方形的几何图形，它的长为5米、宽为2米、面积为10米^2．这里的长、宽和面积是几何量．

某液体温度为35℃．温度是物理量．

这些量都是事物的特征．人们为了研究客观世界中的物质和运动，就需要研究物质和运动过程的特征．并且，要想法测量这些特征的大小，然后定量地用数学方法去研究它们的关系．长、宽、面积、温度、压力、路程、时间等等都是物质或运动过程的特征．这些特征有一个共同的特点是可以量测的．由此得出量的抽象概念：

量是事物中可量测的特征．

为了测量事物中可量测的特征，需要用同类特征中选定一个标准作为单位，用它与被测量的特征进行直接或间接比较（例如，用标准米尺去直接比较测量长度；用温度表去间接比较测量温度），比较的结果往往得出一个实数．这个数表示具体事物特征的大小程度，称为量值．具体量的量值是有单位的，表示它是什么量，用什么标准进行测量的．比如说，某一杆长为 5 米，是杆长度这个量的量值，使用的测量标准是米．

上面所说的量是能用一个实数来表示它的程度的，这种量称为纯量．还有其他形式的量，比如向量，它是既有大小又有方向的．在空间中运动的物体，它的速度和加速度就是向量．在本书中若不作声明所研究的量都是纯量．上面所讲的量是具体的量，它是有单位的．数学是一门普遍的科学，它应该用来描述和研究物质与运动的一般规律．所以数学上的研究是从具体的量中抽出它们的共同的特征；量值是用数来表示的．因此，量与量关系的研究就化为数的研究问题．在纯数学的研究中纯量的量值是一个没有单位的数．只有在研究具体的应用问题时才加上单位．了解这点是很重要的，这样才使我们理解为什么在以后的研究中，量的量值只是一

个实数．比较下面的例子，可以看出这样做的好处．

例1 研究长方形的长、宽与面积的关系；并问若长为2米，宽为1米时面积是多少？

在本例中有长、宽、面积三个量，可分别记为 x、y、S。它们之间存在下面的关系．

$$S=xy \tag{1}$$

当 $x=2$ 米，$y=1$ 米时得出面积 $S=2$ 米^2。

例2 研究质点作匀速直线运动时，时间、速度与路程的关系；并问若速度为2公里/小时，时间为1小时所走的路程是多少？

在本例中有速度、时间和路程三个量，仍可分别记为 x、y、S。它们之间存在下面的关系

$$S=xy \tag{2}$$

当 $x=2$ 公里/小时，$y=1$ 小时时得出所走的路程为 $S=2$ 公里。

上面的两个例子具体内容是完全不同的，但是关系式（1）和（2）却完全一样．如果不去考虑具体的内容、不管使用的单位，这就得出共同的规律，即 $S=xy$，当 $x=2$、$y=1$ 时 $S=2$．

二 变量和常量

（1）变量和常量的概念

现实世界中的事物是不断运动和变化着的．事物的运动与变化通过刻画它本质的量的变化来表现．由时间和路程的变化才显示出火车在运动．这种变化着的量及它们的相互关系应该用数学方法来描述．这样，在数学上引入变量的概念．具体的变量有两个共同特点：一是，在研究的过程中可

取不同的值；二是，变化不是随意的，而是受到具体的问题（过程）的限制．按这两个特点，得出数学上变量的定义．

定义1 在某一过程中可以取不同值的量称为变量，变量所允许的取值范围称变量的变域；在某一过程中只能取唯一确定值的量称为常量．

给出一个变量，就要给出它的变化范围．所以变量有两个要素：一个是名称，另一个是变域．我们讨论的量是纯量，它的量值是实数．所以变量又称变数，变域是实数的集合．

具体的量（不是数学意义上的）是与具体问题（过程）共存的，所研究的问题不同，这些量有时可以是变量，有时也可以是常量．例如，对于一摩尔的气体，它由体积V、压强P、温度T来描述它的状态．当压强P不变的情况下，研究温度T与体积V的关系时，压强P是常量，而温度T与体积V是变量；但当温度T不变的情况下，研究压强P与体积V的关系时，温度T却是常量，而压强P与体积V成为变量．在数学上也要反映这种情况，在数学研究中常出现这样的情况，在一个研究过程中假定某些量是不变的常量，而研究其他量之间的变化关系．至于有时在所研究的问题过程中，把变化很小的量视为常量，这是物理学和工程技术上的问题，而不是数学上的问题．

数学上是用符号来表示变量和常量的名称的．通常用拉丁字母x、y、z、t、u、v等来表示变量，用a、b、c、d、e等来表示常量．为了清楚起见通常写为“变量t”“常量a”．至于用什么记号来表示，由讨论者自行决定，用什么都可以，但一经选定就不能变动．有些变量是有具体的物理意义

的，常常使用特殊的记号，例如，时间用 t 表示，质量用 m 表示等等。在一个研究问题中，若出现很多的变量或常量，通常用一个拉丁字母在它的右下角加上“数码下标”来表示，例如，用 x_1，…，x_n 表示 n 个变量，用 a_1，…，a_m 表示 m 个常量。

（2）变量的分类

变量有名称和变域两个要素，名称是可以随意选取的，它们之间的差别表现在变域的不同。由于变域的形式不同，它本身的特性和研究的方法都有很大的差别。按照变域的不同形式，变量可分为连续变量和离散变量的两大类。

让我们看看下面几个具体量的例子。

例3 一个物体自由下落，经4秒落到地面，研究路程与时间这两个变量的变化状态。

很显然，路程 s 和时间 t 是连续变化的。如果不考虑单位，那么变量 t 的变域是从0至4间的全体实数组成的实数段。路程的变域可以通过 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 求出。若不考虑单位，则是从0至 $\frac{1}{2}g\times 16$ 间的全体实数组成的实数段。

若变量的变域是由一个实数段构成的，这样的变量称为连续变量。

例4 变量 x 的变域是全体自然数，变量 y 的值由公式 $y=x^2$ 确定，研究变量 x 和变量 y 的变域的特性。

在本例中，变量 x 的变域是全体自然数，可以按数数方法1、2、3、4、…一个一个数出来的。变量 y 与 x 存在下面对应关系

$$
\begin{array}{lccccc}
x: & 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
y: & 1, & 4, & 9, & 16, & \cdots
\end{array}
$$

即一个对应一个的一一对应关系，它也是可以一个个地数出来的。不论是 x 或是 y 都有这样的特点：它的变域所含的数的个数是可以一个个地数出，并且个数有无限多个，称为无限可数的。

例5 某猪场从1979年至1982年出售生猪的头数列表如下：

年　度 T	1979	1980	1981	1982
出售猪数 N	450	570	790	1100

研究变量 N 的变域特性。

在本例中，变量 N 的变域所含的数、个数是有限个，自然也是可数出来的。

在例 4 和例 5 中所出现的变量它们的变域所包含的数的个数是可数的，这样的变量称为离散变量。

（3）变域的表示法

一个变量可以用任意的符号来表示，最主要是要指出它的变域。对于连续变量，变域有三种表示法，即区间表示法、不等式表示法和图示法。这三种表示法在数学研究和实际中都是经常用到的。

若变量 x 的变域是包含 0 和 4 在内，从 0 到 4 间的全体实数。