

材料力学

CAILIAO LIXUE

冯贤桂 陈天富 编

1
庆大学出版社

TB301

400

F65

材料力学

冯贤桂 陈天富 编



A0926542

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教委批准印发的“材料力学课程教学基本要求(中学时)”编写的。

全书共 12 章, 内容包括: 绪论、轴向拉伸和压缩、剪切、平面图形的几何性质、扭转、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力状态分析和强度理论、组合变形、压杆的稳定性、交变应力。各章都附有习题及部分习题答案。

本书适用于高等工业学校冶金、矿山、地质、热加工、环境、机电、材料、仪表等类专业的高中、少学时材料力学课程; 对书的内容作适当加深调整后, 也可用于相近的有关专业。本书也可供材料力学教师及有关工程技术人员参考。

材 料 力 学

冯贤桂 陈天富 编

责任编辑 吴弟容

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重庆通信学院印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 15.5 字数: 387 千

1998 年 8 月第 1 版 1998 年 9 月第 1 次印刷

印数: 1—3000

ISBN 7-5624-1700-8/TB·17 定价: 17.00 元

第一章 绪 论

§ 1.1 材料力学的任务

在工程实际中,广泛应用着各种机械设备和工程结构。组成机械设备和工程结构的零件或部件统称为构件。例如,房屋的梁或柱、机器的轴或齿轮都是构件。构件在工作中受到载荷的作用,为保证机械设备和工程结构的正常工作,每一构件都应有足够的承载能力,以承受作用于其上的载荷。构件的承载能力包括以下三个方面:

1. 构件应有足够的强度

例如,冲床的曲轴,在工作冲压力作用下不应折断。又如,锅炉的筒体在规定的蒸气压力下不应爆破。所以强度是指构件在载荷作用下抵抗破坏的能力。

2. 构件应有足够的刚度

在载荷作用下,构件的形状和尺寸将发生变化,称为变形。对某些构件,若变形过大,也会影响其正常工作。例如,若齿轮轴变形过大,将造成齿轮和轴承的不均匀磨损,引起噪音。机床主轴变形过大,将影响加工精度。因而,刚度是指构件在载荷作用下抵抗变形的能力。

3. 构件应有足够的稳定性

有些受压力作用的细长直杆,如千斤顶中的螺杆、内燃机的气门挺杆等,应始终维持原有的直线平衡形态,保持不被压弯。故稳定性是指构件保持其原有平衡形态的能力。

设计一个构件,首先是要求构件安全可靠,即要求构件具有足够的强度、刚度和稳定性;同时还应考虑合理使用和节约材料,即既要考虑经济性,又要尽可能减轻构件的重量。一般来说,前者要求构件的截面尺寸大一些,材质好一些;后者要求构件的截面尺寸尽可能小,并且尽可能用廉价的材料,二者往往是矛盾的。材料力学则为合理地解决这一矛盾提供了理论基础及计算方法。

材料力学的任务就是在满足强度、刚度和稳定性的要求下,为构件确定合理的形状和尺寸,选择适当的材料;为设计既经济又安全的构件提供必要的理论基础和计算方法。

§ 1.2 可变形固体及其基本假设

制造各种构件所采用的材料,虽然品种繁多,性质各异,但它们都有一个共同的特点,就是在外力作用下会产生变形。在研究构件的强度、刚度等问题时,物体的变形是一个不可忽略的因素。因此,在材料力学中,将组成构件的材料皆视为可变形固体。

材料的物质结构和性质是比较复杂的,在研究构件的强度、刚度和稳定性时,为方便起见,必须略去材料的一些次要性质,而保留其主要属性,以抽象出理想化的力学模型。为此,在材料

力学中,对可变形固体作以下的基本假设:

1. 连续性假设

认为在物体的整个体积内都毫无空隙地充满了固体物质。实际上,组成固体的粒子之间存在着空隙,并不连续,但这种空隙与构件的尺寸相比极其微小,可以忽略不计。于是就认为固体在其整个体积内是连续的。这样,当把某些力学量看作是固体中点的坐标之函数时,对这些量就可以作为连续函数来进行数学处理。

2. 均匀性假设

认为在固体内任何部分的力学性能都完全相同。就使用最多的金属来说,组成金属的各晶粒的力学性能并不完全相同。但由于构件内含有为数极多的,而且是无规则地排列的晶粒,固体的力学性能是各晶粒的力学性能的统计平均量,各晶粒的非均匀性,从统计平均的观点看,可以不加考虑,认为各部分的力学性能是均匀的。这样,如从固体中取出一部分,不论其大小以及从何处取出,力学性能总是相同的。可以将小尺寸试样测得的材料性质,用于构件的任何部位。

3. 各向同性假设

认为无论沿任何方向,固体的力学性能都是相同的。各方向力学性能相同的材料,称为各向同性材料。这一假设对许多材料都是符合的。均匀的非晶体材料一般都是各向同性的。对金属等由晶体组成的材料,虽然每个晶粒的力学性能具有方向性,但由于它们的大小远小于构件的尺寸,且排列也不规则,因此它们的统计平均值在各个方向是相同的。铸钢、铸铁、玻璃等都可看作是各向同性材料。

在不同方向上力学性能不同的材料,称为各向异性材料,如木材、胶合板和某些人工合成材料等。

4. 小变形假设

在工程实际中,构件的变形相对于构件的原有尺寸是很小的,因此,在分析构件上力的平衡关系时,变形的影响可以忽略不计,仍按构件的原有几何尺寸来进行计算。材料力学一般只研究小变形问题。

在以后的讨论中,一般都把可变形固体假设为连续、均匀及各向同性的,并且在外力的作用下变形很微小。

§ 1.3 杆件变形的基本形式

实际构件有各种不同的形状。如果构件的长度远大于它的横截面尺寸,则称为杆件。材料力学主要研究杆件。杆件各横截面形心的连线称为杆件的轴线。轴线为直线的杆件称为直杆。横截面的形状和大小不变的杆件称为等直杆。轴线为曲线的杆件称为曲杆。工程上常见的很多构件都可以简化为杆件,如连杆、传动轴、立柱、丝杆、吊钩等。

等直杆在工程中的应用最广泛,它是材料力学研究的主要对象。等直杆的问题解决了,不仅解决了工程中大部分构件的问题,也为解决其他形状构件的问题提供了基础。等直杆的计算原理可以近似地用于曲率较小的曲杆或横截面无急剧变化的变截面杆。

除杆件外,工程中常用的构件还有平板和壳体等。

随着外力作用方式的不同,杆件受力后所产生的变形也有差异。杆件变形的基本形式有以下四种:

1. 拉伸和压缩

一对大小相等、方向相反、作用线与杆件轴线重合的外力作用在杆的两端,使杆件产生伸长或缩短,这种变形称为拉伸或压缩。例如,图 1.1(a) 所示的简易吊车,在外力 P 作用下,AC 杆受到拉伸[图 1.1(b)],而 BC 杆受到压缩[图 1.1(c)]。起吊重物的钢索、桁架的杆件、液压油缸的活塞杆等的变形,都属于拉伸或压缩变形。

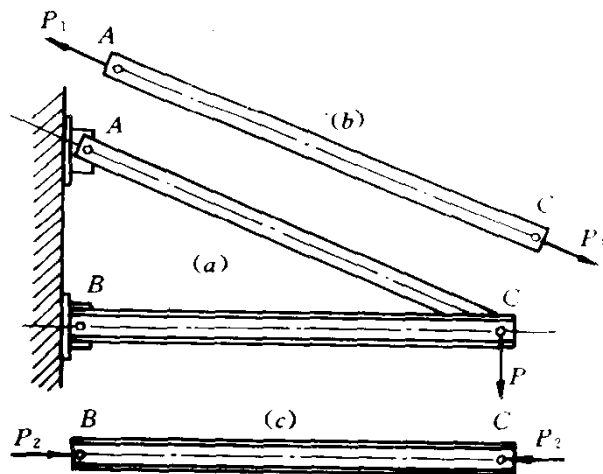


图 1.1

2. 剪切

一对大小相等、方向相反、作用线相距很近且与杆轴线垂直的外力作用在杆的两侧,两外力间的横截面发生相对错动,这种变形称为剪切。图 1.2(a) 表示一铆钉联结,在 P 力作用下,铆钉即受到剪切。机械中常用的联结件,如键、销钉、螺栓等都产生剪切变形。

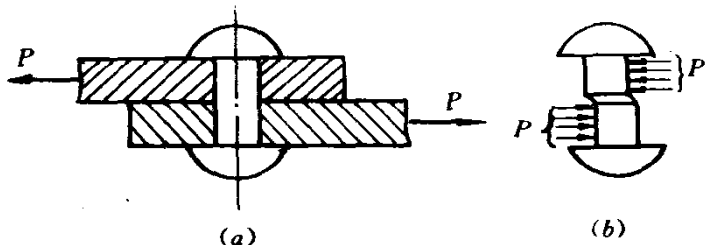


图 1.2

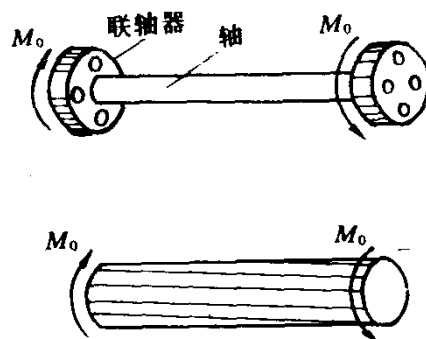


图 1.3

3. 扭转

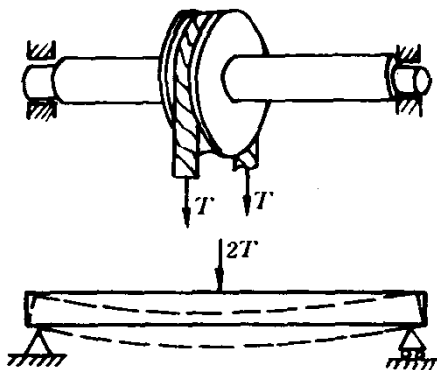


图 1.4

大小相等,方向相反,作用面与杆件轴线垂直的两个力偶作用在杆的两端,使杆的任意两个横截面绕轴线发生相对转动,这种变形称为扭转。图 1.3 所示的传动轴在外力偶作用下,发生扭转变形。汽车的凸轮轴、电机和水轮机的主轴,都是主要发生扭转变形的构件。

4. 弯曲

作用在包含杆轴的纵向面内的力偶或垂直于杆件轴线的横向力,使杆件的轴线由直线变为曲线,这种变形称为弯曲。图 1.4 所示的轮轴,在外力作用下发生弯曲变形。在工程中,受弯杆件是最常遇到的情况。桥式起重机的大梁,机车的车轴以及车刀等,都是主要发生弯曲变形的构件。

有一些杆件在工作时,同时发生几种基本变形,例如,车床主轴工作时发生弯曲、扭转和压

缩三种基本变形;钻床立柱同时发生拉伸和弯曲两种基本变形。这种情况称为组合变形。本书以下各章,首先将依次讨论四种基本变形的强度及刚度计算,然后再讨论组合变形。

第二章 轴向拉伸和压缩

§ 2.1 轴向拉伸和压缩的概念

在工程实际中,有许多承受轴向拉伸和压缩的构件。例如,在理论力学中介绍过的连杆机构中的连杆,桁架结构中的二力构件,以及起吊重物的钢丝绳等,这些构件的受力有共同的特点,即这些构件均为直杆,所承受的集中载荷或分布力的合力的作用线与杆件轴线重合。如图 2.1 所示。这种载荷的作用形式称为轴向加载。图 2.1(a) 杆件承受的是轴向拉力,使杆件伸长,称为拉杆;图 2.1(b) 杆件承受的是轴向压力,使杆件变短,称为压杆。

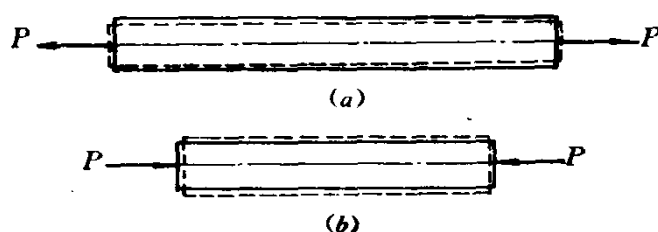


图 2.1

因此,轴向拉伸和压缩时杆件的受力特点和变形特点是:作用于杆件上的外力合力是一对大小相等,方向相反,作用线与轴线重合的集中力,杆件变形是沿轴线方向伸长或缩短。所以工程实际中的构件,只要能简化成图 2.1 的受力和变形形式,就是轴向拉伸或轴向压缩。

轴向拉伸和压缩是杆件四种基本变形形式中最简单的一种。本章将通过对轴向拉伸和压缩的讨论,建立其基本理论和计算方法;介绍材料力学研究问题的两大方法,材料拉压时的力学性能及实验方法;通过本章的研究初步掌握材料力学的处理方法。

§ 2.2 内力和截面法 轴力和轴力图

构件未受外力作用时,其内部的各质点之间就存在着相互作用的力,一般称为内聚力。这种内聚力使构件能够保持固有的形状。当构件受外力作用时,构件产生了变形,使其内部各质点之间的相对位置发生变化,因而引起各相邻质点之间内聚力发生改变,这个改变量称为内抗力。显然内抗力是一个分布力系,其主矢和主矩就是材料力学中构件的内力。

因此,材料力学中的内力,是指外力作用下物体内部各部分之间相互作用力的改变量,所以是物体内部各部分之间因外力而引起的附加相互作用力,即“附加内力”,简称内力。这样的内力随外力的增加而加大,到达某一限度时就会引起构件破坏,因而它与构件的强度是密切相关的。

材料力学中的内力与静力学中的内力有本质的区别。材料力学中的内力是物体内部各部

分之间的相互作用力的改变量。而理论力学中的内力则是在研究物体系统平衡时,各个物体之间的相互作用力,它相对于物体系这个整体来说是内力,但对于一个物体来说,就属于外力了。

为了揭示在外力作用下构件所产生的内力,确定内力的大小和方向,通常采用截面法。

截面法是材料力学中两大方法之一,即辅助法。截面法是用假想平面将构件截开,从而确定内力的方法。可以归纳为以下四个步骤。

1. 截

用假想平面在欲求构件内力处截开。

2. 弃

保留简单部分为研究对象,弃去复杂部分。

3. 代

以截面上的内力代替被弃部分对保留部分的作用。

4. 平

建立保留部分的平衡方程,确定截面上的未知内力大小和方向。

这里必须强调,在用假想平面截开之前,理论力学中的力的可传递性原理和合力矩定理暂时失效。截开之后研究保留部分平衡时仍然有效。这是因为材料力学中研究对象是变形体,其变形与受力位置相关。

下面用例题说明截面法的应用。

例 2.1 图 2.2 所示钻床,在载荷 P 作用下,试确定 $m-m$ 截面上的内力。

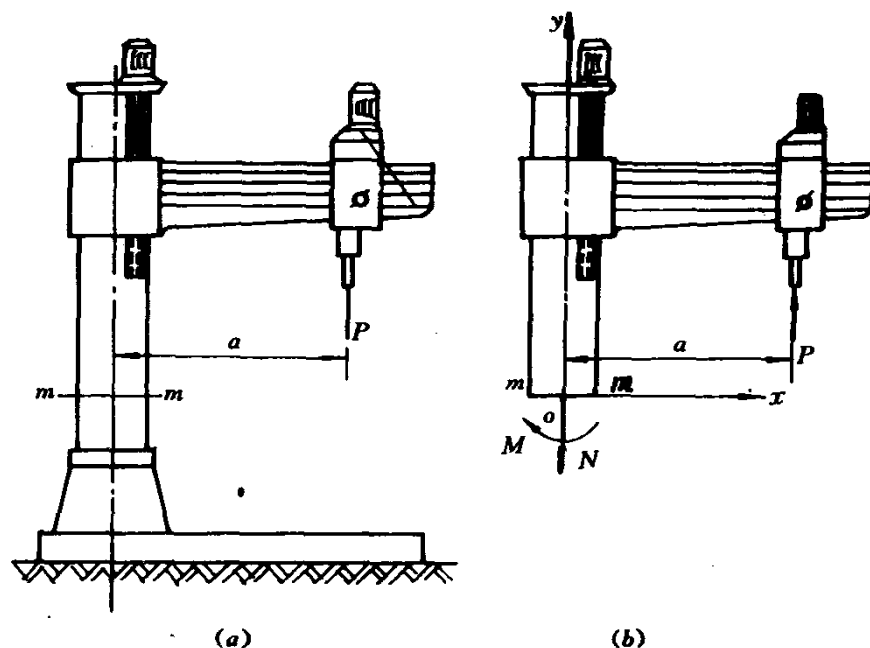


图 2.2

解 ① 用一假想平面沿 $m-m$ 截面将钻床截开分为上下两部分,如图 2.2(b)。

② 保留 $m-m$ 截面以上部分为研究对象,弃去复杂的 $m-m$ 截面以下部分(有反力要求)。

③ 在 $m-m$ 截面上以内力 N 和 M 代替被弃部分对保留部分的作用,如图 2.2(b) 所示。

④ 研究保留部分的平衡

$$\sum Y = 0 \quad P - N = 0 \quad N = P$$

$$\Sigma m_0(F) = 0 \quad Pa - M = 0 \quad M = Pa$$

N 和 M 是 $m-m$ 截面上分布力系 —— 内抗力的主矢和主矩。

例 2.2 设一直杆沿轴线同时受 $P_1 = 2\text{kN}$, $P_2 = 3\text{kN}$ 和 $P_3 = 1\text{kN}$ 的作用, 其作用点分别为 A 、 C 、 B , 如图 2.3(a) 所示。求杆的内力。

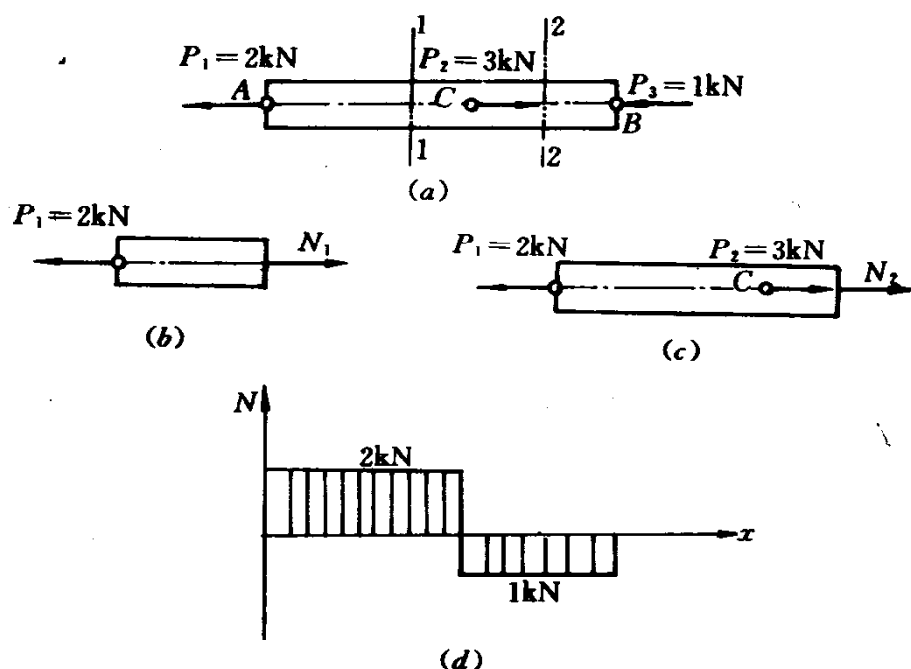


图 2.3

解 由于杆上有三个外力, 因此, 在 AC 和 BC 段横截面上有不同内力。

(1) 在 AC 段内任选一横截面 1-1, 用假想平面截开并取左侧部分为研究对象, 横截面上将右侧部分对左侧部分的作用用内力 N_1 代替, 如图 2.3(b) 所示, 由平衡方程

$$\Sigma X = 0 \quad N_1 - P_1 = 0$$

$$N_1 = P_1 = 2\text{kN}$$

(2) 再在 BC 段内任选一横截面 2-2, 用假想平面截开, 取左侧部分为研究对象, 2-2 截面上用内力 N_2 代替左侧部分的作用, 如图 2.3(c), 由平衡方程

$$\Sigma X = -P_1 + P_2 + N_2 = 0$$

$$N_2 = P_1 - P_2 = -1\text{kN}$$

(3) 内力 N_1 和 N_2 沿杆横截面位置的变化情况, 可以用 $N-x$ 坐标系内的线图表示, 如图 2.3(d) 所示。

在上例中, 由于杆件的外力 P_1 、 P_2 、 P_3 均与杆件轴线重合, 所求得的内力 N_1 和 N_2 也必然与杆件的轴线重合, 所以把 N_1 和 N_2 称为轴力。轴力 N 在坐标系 $N-x$ 内沿轴线的变化线图称为轴力图。轴力的单位为 N (牛) 或 kN (千牛)。

轴力的符号规定是: 指向横截面外法线正向或使杆件受拉伸的轴力为正; 指向横截面外法线负向或使杆件受压缩的轴力为负。

注意 在计算轴力过程中, 可先假设横截面上的轴力为正, 计算结果为正, 表示轴力与假设方向相同且为正, 杆受拉; 计算结果为负, 表示轴力与假设方向相反且为负, 杆受压。

§ 2.3 拉压杆应力

用截面法容易确定构件的内力。但仅仅知道内力还不能解决构件的强度问题。例如,粗、细两根绳子,起吊同样重量的物体,细的一根更容易被拉断,可见强度问题除与内力有关以外,还与构件的横截面面积有关。为了表示物体内部某点处内力分布的强弱程度,消除截面面积大小的影响,必须研究构件在外力作用下的内抗力,并且命名为应力。

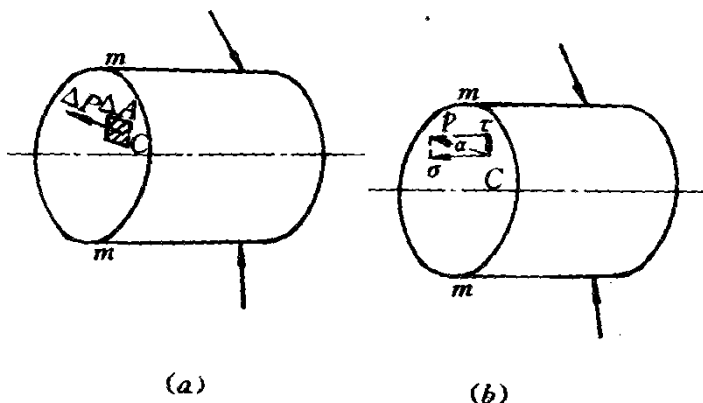


图 2.4

根据变形固体的均匀连续假设,可以认为物体的内力是连续地作用在整个截面上的。在受力物体内部某截面 $m-m$ 上围绕任一点 C 取微面积 ΔA , 见图 2.4(a), 若作用于 ΔA 上的内力为 ΔP , 则

$$p_m = \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

p_m 称为微面积 ΔA 上的平均应力。

随着 ΔA 的逐渐减小, p_m 的大小和方向都将逐渐变化。当 ΔA 趋近于零时, p_m 的大小和方向都将趋近于一定极限。得到

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA} \quad (2.1)$$

p 称为 C 点的总应力。 ΔA 趋近于质点的大小即是材料力学所研究的点的大小, 实际上 p 就是质点之间内聚力的改变量——内抗力, 它反映了材料抵抗破坏的能力。 p 是一个矢量, 一般不与截面垂直或相切。通常把总应力 p 沿截面的法线方向和切线方向分解为两个分量 σ 和 τ , 图 2.4(b), σ 称为截面上的正应力, τ 称为截面上的剪应力, 则

$$\begin{aligned} \sigma &= p \cos \alpha \\ \tau &= p \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

应力为矢量, 单位为帕斯卡, 或简称为帕 (Pa)。因为这个单位太小, 使用不便, 工程上常用兆帕 (MPa) 或吉帕 (GPa), $1\text{Pa} = 1\text{N}/\text{m}^2$, $1\text{MPa} = 10^6\text{Pa}$, $1\text{GPa} = 10^9\text{Pa}$ 。

对于轴向拉伸或压缩, 其横截面上的轴力 N 已由截面法求出, 根据静力学关系, N 和正应力 σ 之间的关系为

$$N = \int_A \sigma dA$$

式中 A 为杆件横截面面积。现在的问题是如何确定 σ 沿横截面的分布规律, 图 2.5(a) 为轴向受拉直杆, 根据结构的对称性, 在杆的两端施加一对大小相等, 方向相反的轴向拉力 P , 其对称截面 $m-m$ 保持为平面, 再取左半段为研究对象, $m-m$ 截面上 $N = P$, [图 2.5(b)] N 和 P 也是作用在此杆上的一对对称力, 其对称面 $n-n$ 仍保持为平面。如此分下去, 可以证明杆件的任一横截面均保持为平面 (除外力作用点附近区域外)。因此杆件受拉 (或压) 时, 横截面只相对平移, 保持为平面。即各质点相对位移相等, 其内聚力改变量也应相等。因此, 可得横截面上各点

正应力 σ 为常数, 于是

$$N = \sigma \int_A dA = \sigma A$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.3)$$

这就是拉压杆横截面上的正应力公式。此公式可用于拉压杆件横截面上的正应力计算。不过细长杆受压时容易被压弯, 属于稳定性问题, 将在第十二章中讨论。这里所指的是压杆未被压弯的情况。关于正应力的符号, 一般规定拉应力为正, 压应力为负。

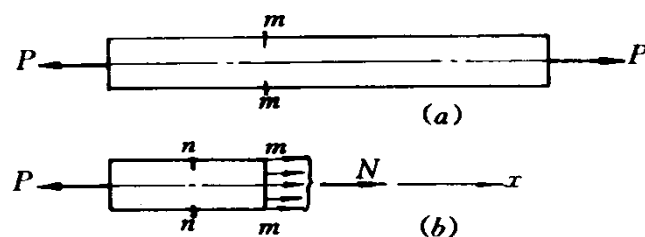


图 2.5

在应用上述正应力公式时, 应注意以下两个重要的问题:

1. 圣维南原理

实验指出, 在外力作用点附近, 杆横截面不能保持为平面, 如图 2.6 所示, 应力不均布, 则不能用上述正应力公式。那么距离力作用点多远才适用呢? 为此提出圣维南原理: “距外力作用部位相当远处, 应力分布与外力作用方式无关, 只同等效力有关。” 这里的相当远, 根据经验和某些精确计算, 可以大致认为是指横截面距力作用点长度相当于横截面尺寸的情况, 即在距力作用点的距离大于横截面尺寸的区域内正应力公式才适用。

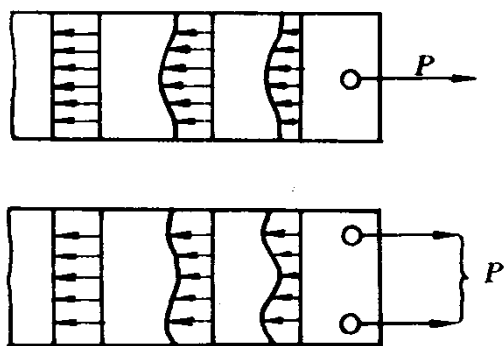


图 2.6

2. 应力集中

构件因结构的需要必须有孔、轴肩、沟、槽等, 使构件外形发生突变, 在这些部位截面上的应力不均匀, 且在局部区域应力急剧增大, 这种现象称为外形变化引起的应力集中。如图 2.7 所示, 其应力集中的严重程度用理论应力集中系数表示。即

$$k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} \quad (2.4)$$

式中 $\sigma_{\max}$ 为应力集中截面上的最大应力, σ 为同一截面上的平均应力, k 为大于 1 的系数。截面尺寸改变得越急剧, 角越尖, 孔越小, 应力集中程度越严重, k 值越大。许多构件的破坏通常是从应力集中部位开始。

另外, 材料不同, 对应力集中的敏感程度也不同。对塑性材料, 如中、低碳钢等, 由于屈服现象有缓和应力集中的作用, 可以不考虑应力集中的影响。脆性材料对应力集中的反应比较敏感, 所以对脆性材料和塑性较差的高强度钢等, 须考虑应力集中的影响。但对铸铁构件不考虑外形变化引起的应力集中影响。因其内部存在许多引起严重应力集中的因素(气孔、砂眼等), 由实验测试强度极限时, 已经反应了这些因素的影响。

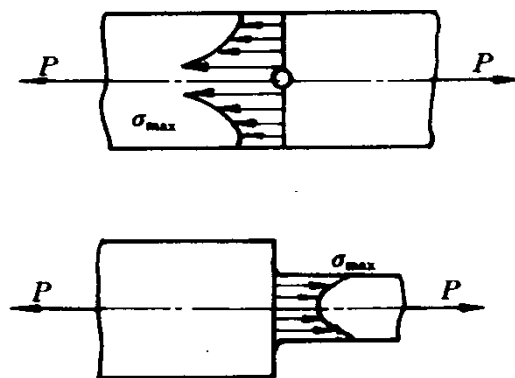


图 2.7

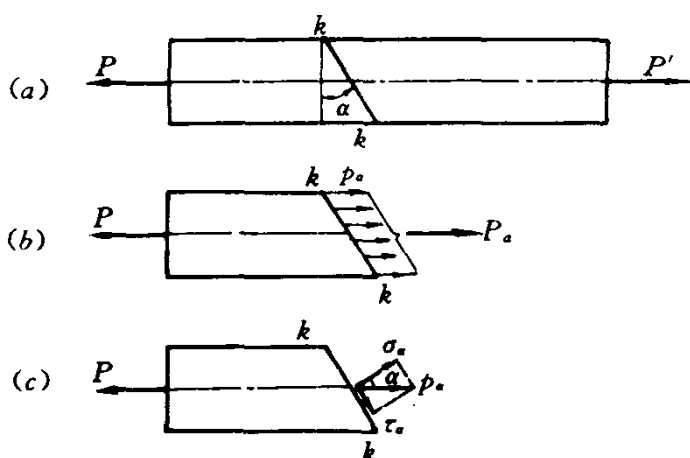


图 2.8

因此,在应力集中处,拉压正应力公式应根据不同材料选用。

为了更全面地了解杆内的应力情况,有必要研究杆件斜截面上的应力情况。

设直杆的轴向拉力为 P [图 2.8(a)], 横截面面积为 A , 则横截面上的正应力为

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} \quad (a)$$

设与横截面成 α 角的斜截面 $k-k$ 的面积为 A_α , 则

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha} \quad (b)$$

取左段为研究对象 [图 2.8(b)] 由平衡条

件知

$$P = P_\alpha = \int_{A_\alpha} p_\alpha dA_\alpha$$

仿照证明横截面上正应力均匀分布的方法, 可知斜截面上应力 p_α 也是均匀的, 则

$$P = P_\alpha = p_\alpha \int_{A_\alpha} dA_\alpha = p_\alpha A_\alpha$$

$$\text{即} \quad p_\alpha = \frac{P}{A_\alpha} \quad (c)$$

把式(b)代入式(c), 并注意式(a)所表示关系, 得

$$p_\alpha = \frac{P}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$$

把应力 p_α 分解成斜截面上的正应力 σ_α 和斜截面上的剪应力 τ_α [图 2.8(c)]

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\alpha) \quad (2.5)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \quad (2.6)$$

由此可得, σ_α 和 τ_α 的极值如下:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_\alpha \Big|_{\alpha=0} = \sigma \\ \tau_{\max} &= \tau_\alpha \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sigma}{2} \end{aligned}$$

即, 发生最大正应力的截面为横截面; 发生最大剪应力的截面为与杆轴线成 45° 的斜截面。利用这一结果可对某些破坏现象给予解释。如拉伸时, 脆性材料抗拉能力差, 故常沿横截面断裂; 塑性材料抗剪能力差, 故常从 45° 斜截面开始滑移。

§ 2.4 轴向拉伸或压缩时的变形

直杆在轴向力作用下所产生的变形主要是轴向伸长或缩短,同时还有横向的收缩和胀大。

一、纵向变形 线应变

如图 2.9 所示杆件,原长为 l ,横截面面积为 $a \times b$ 。在轴向力 P 作用下,杆件变形后长度为 l_1 ,横截面面积为 $a' \times b'$ 。杆件的纵向绝对伸长为 $\Delta l = l_1 - l$,当杆件变形均匀时,其 Δl 和 l 的比值称为平均线应变,用 ϵ 表示,则

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.7)$$

当杆件的变形不均匀时,取微段 Δx , Δx 的绝对伸长量为 Δu 。其线应变 ϵ 为

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

称为一点的线应变,简称应变。

线应变表示了杆件纵向变形程度,无量纲,有符号。

二、胡克定律

实验证明,杆件受到轴向力作用时,在弹性范围内应力 σ 和应变 ϵ 存在如下的关系,即

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.8)$$

式中 E 为材料的弹性模量,量纲为 GPa,由实验测定。式(2.8)称为胡克定律,即在线弹性范围内,应力与应变成正比。

拉伸或压缩时 $\sigma = \frac{N}{A}$, $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ 代入式(2.8)得

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (2.9)$$

称为拉伸或压缩时的胡克定律。式中 EA 为抗拉(压)刚度,反映了材料抵抗变形的能力。式(2.9)为拉伸或压缩时等直杆的变形计算公式。

当杆件为阶梯轴,即在 n 段内变形均匀时

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i} \quad (2.10)$$

式中 i 表示杆件的分段数、 N_i 为第 i 段横截面上的轴力, l_i 、 E_i 、 A_i 分别表示第 i 段的长度、弹性模量和横截面面积。

当杆件为变截面杆或轴力随横截面位置变化时, A 或 N 成为横截面位置 x 的函数,这时杆件的变形为

$$\Delta l = \int_l \frac{N(x)dx}{EA(x)} \quad (2.11)$$

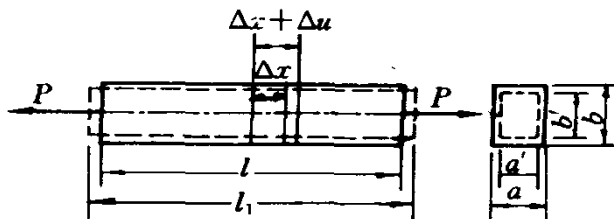


图 2.9

三、横向变形 泊松比

杆件受轴向拉伸时,横向尺寸要变小,发生收缩,横向尺寸的绝对收缩量为

$$\Delta b = b' - b \quad \Delta a = a' - a。$$

且二横向相对变形相等,同为

$$\epsilon' = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a}$$

式中 ϵ' 称为横向应变,无量纲,有符号。

试验结果表明:当应力不超过比例极限时,横向应变 ϵ' 与轴向应变 ϵ 之比的绝对值是一个常数。即

$$\left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right| = \mu$$

式中 μ 为泊松比,也称为横向变形系数,随材料而异,无量纲,为正值。

试验同时证明: ϵ 与 ϵ' 总是符号相反,则

$$\epsilon' = -\mu\epsilon \quad (2.12)$$

E 和 μ 的约值见表 2-1

表 2-1 几种常用材料的 E 和 μ 约值

材料名称	E/GPa	μ
碳 钢	196 ~ 216	0.24 ~ 0.28
合金钢	186 ~ 206	0.25 ~ 0.30
灰铸铁	78.5 ~ 157	0.23 ~ 0.27
铜及其合金	72.6 ~ 128	0.31 ~ 0.42
铝合金	70	0.33

例 2.3 阶梯轴受力如图 2.10(a) 所示, $P_1 = 120\text{kN}$, $P_2 = 220\text{kN}$, $P_3 = 260\text{kN}$, $P_4 = 160\text{kN}$ 。各段横截面面积分别为 $A_1 = 1600\text{mm}^2$, $A_2 = 620\text{mm}^2$, $A_3 = 900\text{mm}^2$ 。各段弹性模量相等,同为 $E = 200\text{GPa}$ 。求

- (1) 各段轴力并画轴力图;
- (2) 轴的最大正应力 $\sigma_{\max}$;
- (3) 轴的总伸长 Δl 。

解 (1) 求各段轴力,画轴力图 $\textcircled{N}$

用截面法,并考虑平衡条件,可求得

- ① 段 $N_1 = P_1 = 120\text{kN}$ (拉)
- ② 段 $N_2 = P_1 - P_2 = 120\text{kN} - 220\text{kN} = -100\text{kN}$ (压)
- ③ 段 $N_3 = P_4 = 160\text{kN}$ (拉)

作轴力图 $\textcircled{N}$ 如图 2.10(b) 所示。

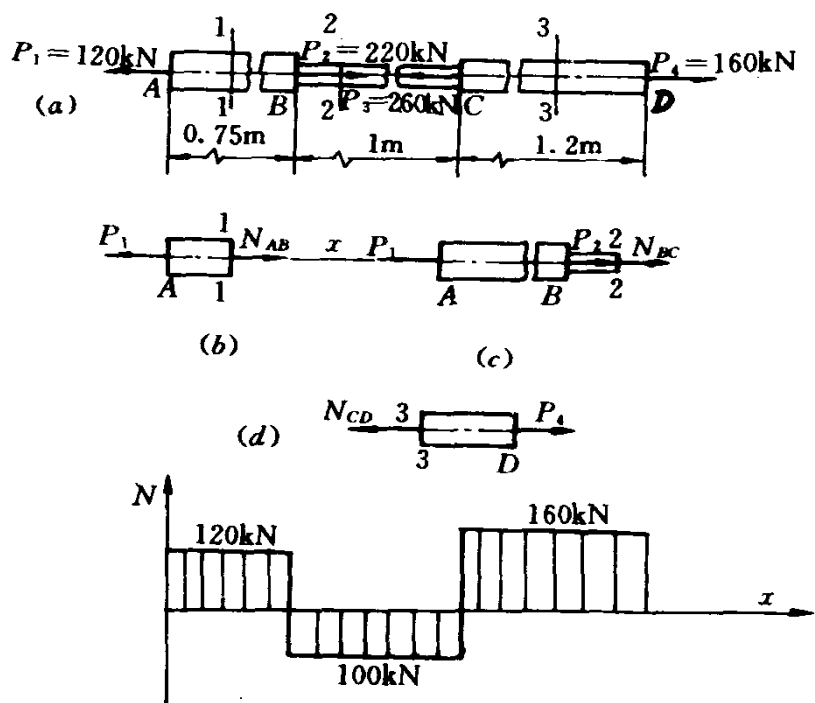


图 2.10

(2) 求轴的最大正应力

$$\sigma_{AB} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{120 \times 10^3 \text{ N}}{1600 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-100 \times 10^3 \text{ N}}{620 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = -160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{160 \times 10^3 \text{ N}}{900 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 178 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = 178 \text{ MPa}$$

在轴的 CD 段。

(3) 求轴的总伸长 Δl

$$\begin{aligned} \Delta l &= \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i} = \frac{N_1 l_1}{EA_1} + \frac{N_2 l_2}{EA_2} + \frac{N_3 l_3}{EA_3} \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{N_1 l_1}{A_1} + \frac{N_2 l_2}{A_2} + \frac{N_3 l_3}{A_3} \right) \\ &= \frac{1}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} \left(\frac{120 \times 10^3 \text{ N} \times 0.75 \text{ m}}{1600 \times 10^{-6} \text{ m}^2} - \frac{100 \times 10^3 \text{ N} \times 1 \text{ m}}{620 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{160 \times 10^3 \text{ N} \times 1.2 \text{ m}}{900 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \right) \\ &= 0.547 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.547 \text{ mm (伸长)} \end{aligned}$$

例 2.4 长为 l , 直径为 d 的等直杆受拉伸时, 若体积不变, 问该材料的泊松比是多少?

解 因体积不变, 故

$$\frac{1}{4} \pi (d - \Delta d)^2 (l + \Delta l) = \frac{1}{4} \pi d^2 l$$

整理得

$$\left(1 - \frac{\Delta d}{d}\right)^2 \left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right) = 1$$

所以 $(1 - \epsilon')^2(1 + \epsilon) = 1$

由于 ϵ 和 ϵ' 一般均为小量, 故高次项为高阶小量可略去, 即

$$\epsilon - 2\epsilon' = 0$$

因此 $\mu = \frac{\epsilon'}{\epsilon} = \frac{1}{2}$

例 2.5 图 2.11(a) 所示支架, ①、② 杆材料为钢质, $E = 200\text{GPa}$, 横截面面积 $A_1 = 200\text{mm}^2$, $A_2 = 250\text{mm}^2$, ① 杆长 $l_1 = 2\text{m}$ 。试求 $P = 10\text{kN}$ 时, ①、② 杆的应力和节点 A 的位移。

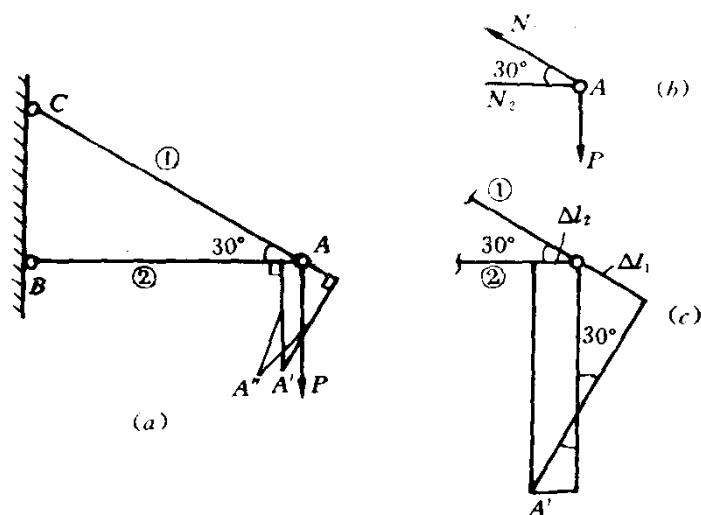


图 2.11

解 (1) 求轴力

由 A 点的平衡方程[图 2.11(b)] 可得

$$N_1 = \frac{P}{\sin 30^\circ} = 2P = 20\text{kN} \quad (\text{拉})$$

$$\begin{aligned} N_2 &= N_1 \cdot \cos 30^\circ = 1.73P \\ &= 17.3\text{kN} \quad (\text{压}) \end{aligned}$$

(2) 求应力

$$\sigma_{AC} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{20 \times 10^3 \text{N}}{200 \times 10^{-6} \text{m}^2} = 100 \times 10^6 \text{Pa} = 100\text{MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{17.3 \times 10^3 \text{N}}{200 \times 10^{-6} \text{m}^2} = 86.5 \times 10^6 \text{Pa} = 86.5\text{MPa}$$

(3) 计算各杆变形

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{20 \times 10^3 \text{N} \times 2\text{m}}{200 \times 10^9 \text{Pa} \times 200 \times 10^{-6} \text{m}^2} = 1 \times 10^{-3} \text{m} = 1\text{mm} (\text{伸长})$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{17.3 \times 10^3 \text{N} \times 2 \times \cos 30^\circ \text{m}}{200 \times 10^9 \text{Pa} \times 250 \times 10^{-6} \text{m}^2} = 6 \times 10^{-4} \text{m} = 0.6\text{mm} (\text{缩短})$$

(4) 求 A 点位移

变形后的 A 点是以 C 点为圆心, 以 $(l_1 + \Delta l_1)$ 为半径所作圆弧, 与以 B 点为圆心, 以 $(l_2 + \Delta l_2)$ 为半径所作圆弧的交点 A'。因为 Δl_1 和 Δl_2 与原杆长相比非常小 ($\Delta l < \frac{l}{1000}$), 即小变形, 所以