数学分析习题集题解

曹 敏 谦

上海交通大学应用数学系

本解答系根据李荣涑译Б.П.吉米多维奇著“数学分析习题集”（修订本）而作。第六章多变量函数的微分法，分两册出版，即第9第10分册。第9分册包括§1-§4；第10分册包括§5-§7。

目　录

第二编　多变量函数

第六章　多变量函数的微分法

§1.　多变量函数的极限.连续性

1°. 多变量函数的极限　设函数 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义。若对于任何的 $\varepsilon>0$，存在有 $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$，使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P,\ P_0)<\delta$［其中 $\rho(P,P_0)$ 为 P 和 P_0 两点间的距离］，则

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A。$$

2°. 连续性　若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 于 P_0 点是连续的。

若函数 $f(P)$ 于已知域内的每一点连续，则称函数 $f(P)$ 于此域内是连续的。

3°. 一致连续性　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在有仅与 ε 有关的 $\delta>0$。使得对于域 G 中的任间点 P'，P''，只要是

$$\rho(P',\ P'')<\delta,$$

便有不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

成立，则称函数 $f(P)$ 于域 G 内是一致连续的。

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的。

确定并绘出下列函数存在的域（3136—3150题）：

3136. $u=x+\sqrt{y}$。

解：函数的定义域为$y\geqslant 0$。

其图形如右。

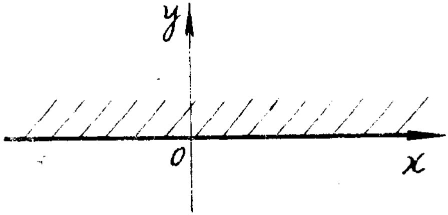


图 3136 题

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$。

解：函数的定义域为$|x|\leqslant 1$，$|y|\geqslant 1$。

其图形如下。

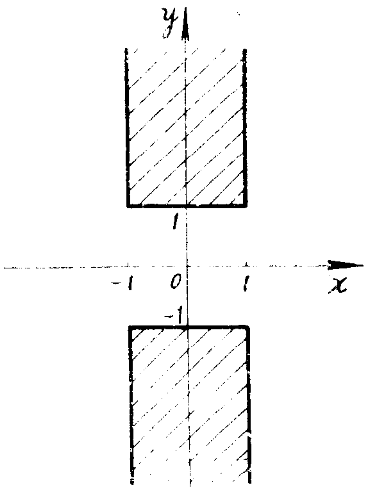
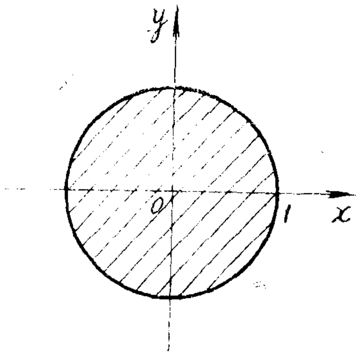


图 3137 题

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$。

解：函数的定义域为 $x^2+y^2\leqslant 1$。

其图形如下。



3138 题

3139. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$。

解：函数的定义域为 $x^2+y^2-1>0$，即 $x^2+y^2>1$。

其图形如下。

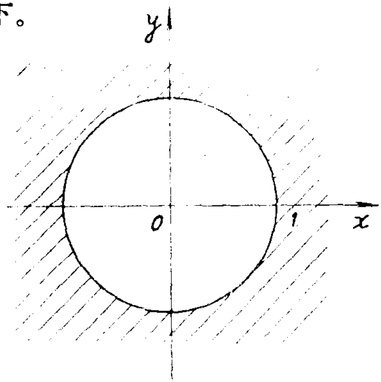


图 3139 题

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$。

解：函数的定义域为 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$。

其图形如下。

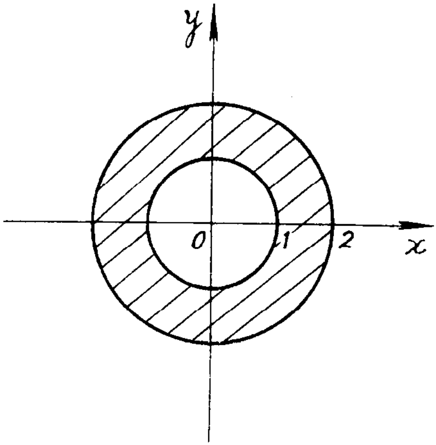


图 3140 题

3141.

$$u=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}。$$

解：函数的定义域为

$$\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}\geqslant 0。$$

故得

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-x\geqslant 0, \\ 2x-x^2-y^2>0; \end{cases}$

或

(2) $\begin{cases} x^2+y^2-x<0, \\ 2x-x^2-y^2<0。 \end{cases}$

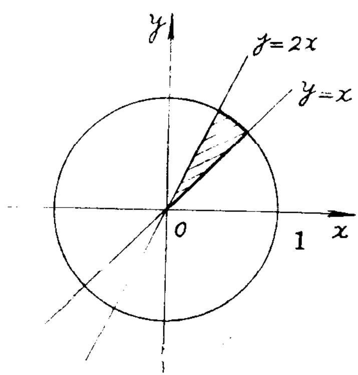


图 3141 题

由(1)得　$x\leqslant x^2+y^2<2x$，而(2)为矛盾方程组。故函数的定义域为　$x\leqslant x^2+y^2<2x$。

其图形见前页。

3142.

$u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$。

解：函数的定义域为

$|x^2+y|\leqslant 1$，即

$-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$。

其图形如右。

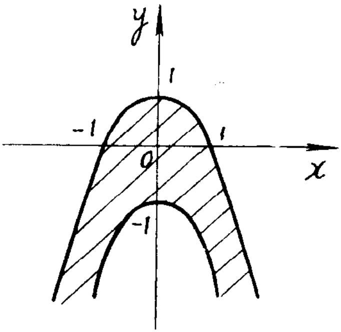


图 3142 题

3143. $u=\ln(-x-y)$。

解：函数的定义域为 $x+y<0$。

其图形如下。

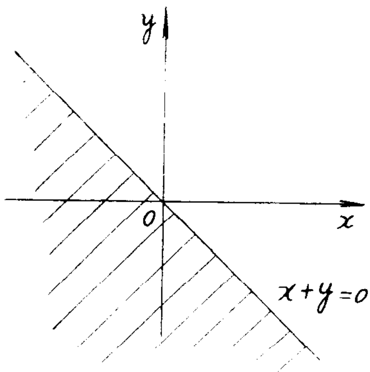


图 3143 题

3144. $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$。

解：函数的定义域为 $x\neq0$ 及 $\left|\frac{y}{x}\right|\leqslant1$，

即 $|y|\leqslant|x|$ 而点(0,0)除外。

其图形如下。

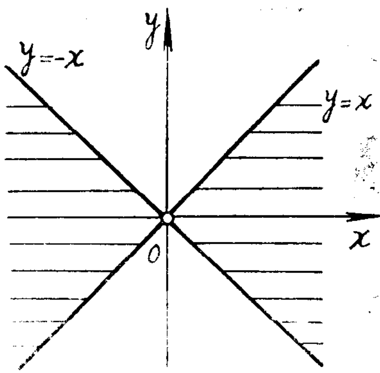


图 3144 题

3145.

$u=\arccos\frac{x}{x+y}$。

解：函数的定义域为

$x+y\neq0$ 以及 $\left|\frac{x}{x+y}\right|$

$\leqslant1$。

由 $\left|\frac{x}{x+y}\right|\leqslant1$ 解得

$y(2x+y)\geqslant0$。这是包含

两直线 $y=0$ 及 $2x+y=0$

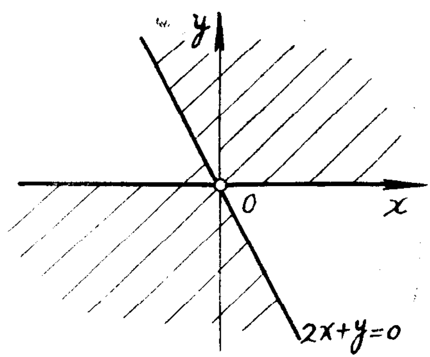


图 3145 题

以及它们之间的角域。由于 $x+y\neq0$，因此要除去角域和直线 $x+y=0$ 的公共点 $(0,0)$，即应将原点除去。

其图形见前页。

3146. $u=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$。

解：函数的定义域为 $y\neq0$，$\left|\dfrac{x}{y^2}\right|\leqslant1$ 及 $|1-y|\leqslant1$。

条件 $\left|\dfrac{x}{y^2}\right|\leqslant1$ 化为 $-y^2\leqslant x\leqslant y^2$。

又 $|1-y|\leqslant1$ 化为 $0\leqslant y\leqslant2$。

故函数的定义域为 $\begin{cases}-y^2\leqslant x\leqslant y^2,\\0\leqslant y\leqslant2,\end{cases}$ 且 $(x,y)\neq(0,0)$。

其图形如下。

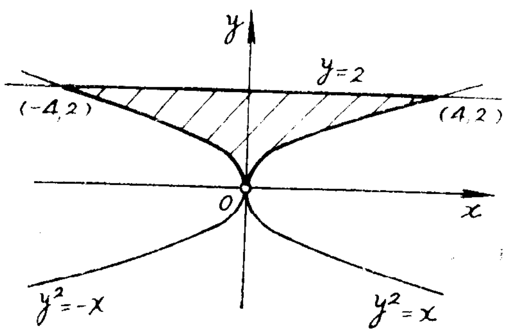


图 3146 题

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$。

解：函数的定义域为 $\sin(x^2+y^2)\geqslant0$，即

$$2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi\quad(k=0,1,2,\cdots)。$$

这是包含边界在内的同心环族。

其图形见下页。

3148. $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

解：函数的定义域为 $x^2+y^2\neq0$ 以及 $\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant1$，即包含圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 以及以外的区域但要除去原点。

其图形如下。

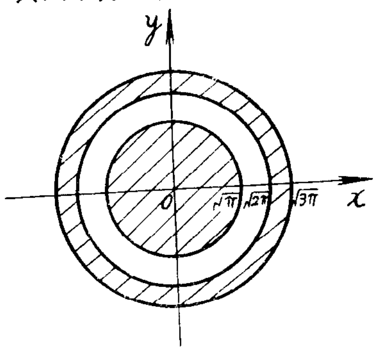


图 3147 题

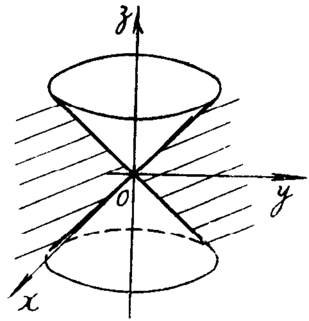


图 3148 题

3149. $u=\ln(xyz)$。

解：函数的定义域为 $xyz>0$，即空间直角坐标系中第 Ⅰ，Ⅲ，Ⅴ，Ⅶ四个卦限，但不包括坐标面。

图形略。

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$

解：函数的定义域为

$$-1-x^2-y^2+z^2>0,$$

即
$$x^2+y^2-z^2<-1。$$

这是双叶双曲面的内部，但不包括双叶双曲面本身。

其图形如右。

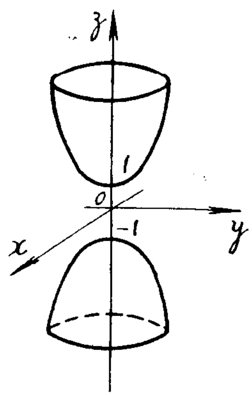


图 3150 题

作出下列函数的等位线(3151—3165 题)：

3151. $z=x+y$。

解： 等位线为平行直线族 $x+y=c$。

其图形如下。

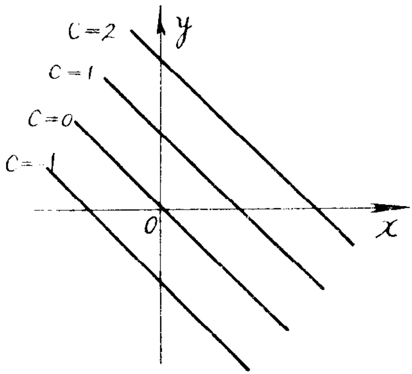


图 3151 题

3152. $z=x^2+y^2$。

解： 等位线为同心圆周族 $x^2+y^2=r^2$。

其图形如右。

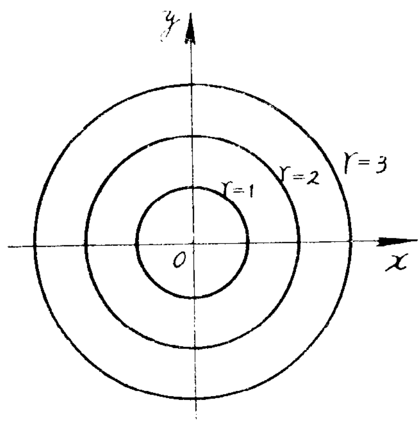


图 3152 题

3153. $z=x^2-y^2$。

解：等位线为 $x^2-y^2=c$。

当 $c>0$ 时是焦点在 x 轴上的双曲线。

当 $c=0$ 时是两相交直线 $y=\pm x$。

当 $c<0$ 时是焦点在 y 轴上的双曲线。

其图形如下。

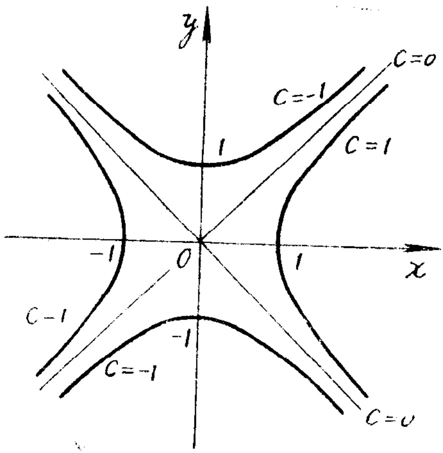


图 3153 题

3154. $z=(x+y)^2$。

解：等位线是$(x+y)^2=c^2$，即 $x+y=c$。这是平行直线族。

其图形见 3151 题。

3155. $z=\dfrac{y}{x}$。

解：等位线是 $\dfrac{y}{x}=k$，即 $y=kx$ （$x\neq 0$），其中 k 为任意实数

这是以坐标原点为顶点的直线束，但顶点除外。
其图形如下。

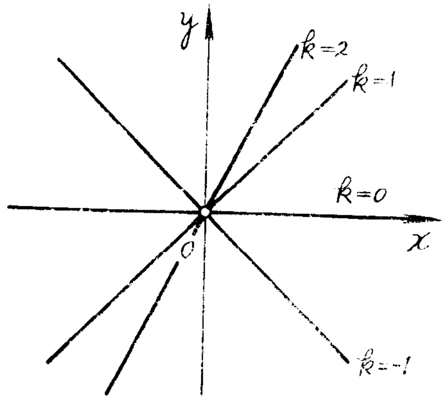


图 3155 题

3156. $z=\frac{1}{x^2+2y^2}$。

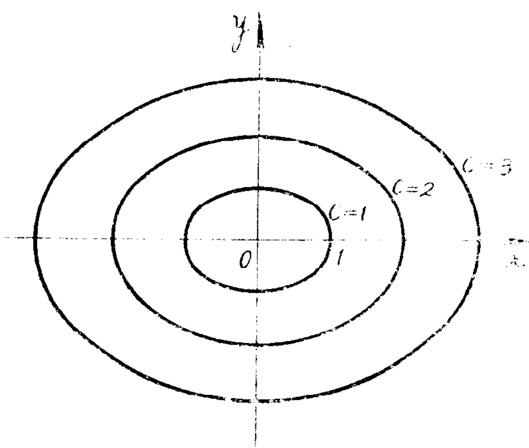


图 3156 题

解：等位线是 $x^2+2y^2=c^2$ $(c>0)$。

这是同心椭圆族。

其图形如上。

3157. $z=\sqrt{xy}$。

解：等位线是 $xy=c$ $(c>0)$。

这是位于第一第三象限内以坐标轴为渐近线的第边双曲线。其图形如下。

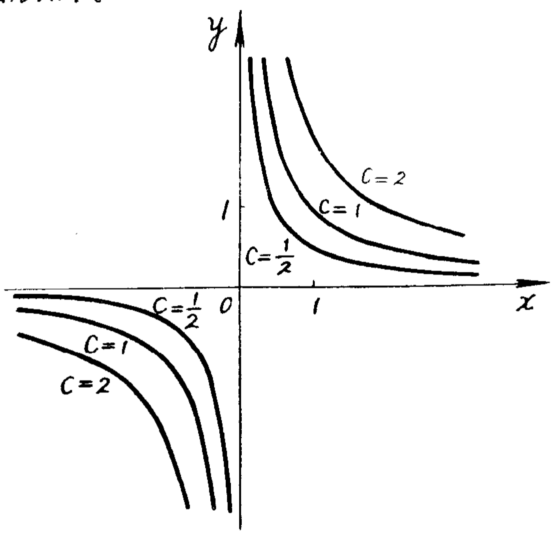


图 3157 题

3158. $z=|x|+y$。

解：第位线的方程是 $|x|+y=c$。

对于固定的 c，当 $x\geqslant 0$ 时为半直线 $y=c-x$，当 $x\leqslant 0$ 时为半直线 $y=c+x$。

其图形见下页。

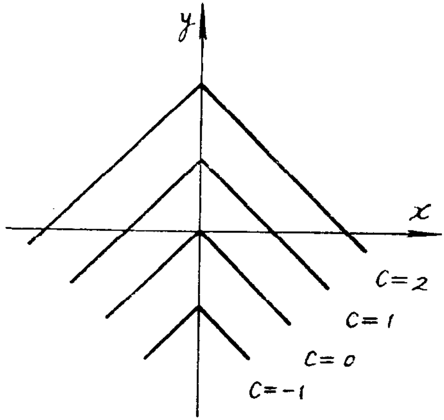


图 3158 题

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$。

解：等位线的方程是 $|x|+|y|-|x+y|=c$。故 $c\geqslant0$。

1°. 设 $c=0$，则得 $|x|+|y|=|x+y|$。当且仅当 x 与 y 同号时有 $|x|+|y|=|x+y|$。故在第一象限和第三象限（包括边界在内）的点，满足等位线 $|x|+|y|-|x+y|=0$。

2°. 设 $c>0$，则必 x，y 异号。

1′. 设 $x>0$，$y<0$ 且 $x+y>0$，则等位线的方程变为

$$x-y=x+y+c，即 \quad y=-\frac{c}{2}。$$

可见这时等位线是在第四象限内且在直线 $x+y=0$ 之右的半直线 $y=-\frac{c}{2}$。

同理可得

2′. 设 $x>0$，$y<0$ 且 $x+y<0$，则 $x=\frac{c}{2}$。

$3'$. 设 $x<0$, $y>0$ 且 $x+y>0$, 则 $y=\frac{c}{2}$。

$4'$. 设 $x<0$, $y>0$ 且 $x+y<0$, 则 $x=-\frac{c}{2}$。

等位线的图形如下。

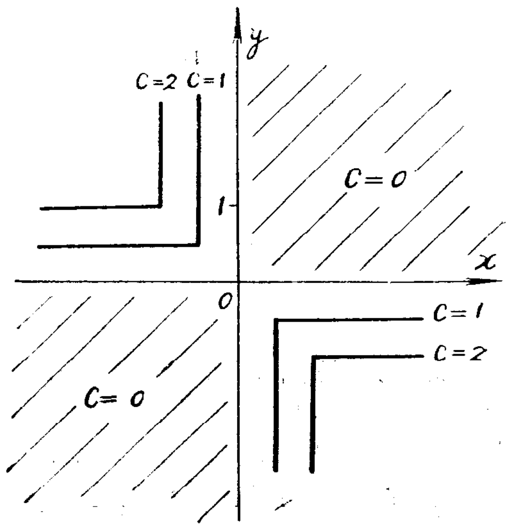


图 3159 题

3160. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$。

解: 等位线的方程是 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=c$ $(c>0)$, 即 $\frac{2x}{x^2+y^2}=\ln c=c_1$ $(x^2+y^2\neq 0)$。由此得 $x^2+y^2=\frac{2x}{c_1}=2c_2x$,

即
$$(x-c_2)^2+y^2=c_2^2,$$
这是中心在 x 轴上且与 y 轴相切的圆族, 但不包含原点在内。