计算数学讲义（一）

数值逼近方法

南京大学数学系计算数学专业 编

科学出版社

计算数学讲义（一）

数值逼近方法

南京大学数学系计算数学专业 编

科学出版社

内 容 简 介

本书共分七章：第一、二、五章分别介绍基本的插值方法、数值积分方法和样条插值方法，第三章介绍高斯型积分公式和直交多项式的基本性质，第四章介绍观测值的平滑和曲线拟合问题，第六章简单介绍一致逼近的基本理论，第七章介绍生成初等函数的基本方法．

本书可供综合性大学理科计算数学专业使用，也可供科技工作者参考．

计算数学讲义(一)

数 值 逼 近 方 法

南京大学数学系计算数学专业 编

*

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳門內大街 137 号

上海商务印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1978 年 11 月 第 一 版　开本：787×1092 1/32

1978 年 11 月第一次印刷　印张：8

印数：0001—134,300　字数：180,000

统一书号：13031・845

本社书号：1206・13—1

定价：0.82 元

说　明

1. 这一套《计算数学讲义》是在我专业过去所编教材的基础上修改补充而成的.

2. 这套讲义共分下列九册:

(一)数值逼近方法,

(二)线性代数计算方法,

(三)常微分方程数值解法,

(四)偏微分方程数值解法,

(五)最优化方法,

(六)概率统计基础和概率统计方法,

数学基础之一: 线性代数,

数学基础之二: 常微分方程,

数学基础之三: 偏微分方程.

由于篇幅的原因,我们把《概率统计基础》和《概率统计方法》合并为一册.

3. 这套讲义可作为综合性大学理科计算数学专业教材,也可供利用电子计算机从事科学计算的科技人员参考.

4. 这套《计算数学讲义》的主编是何旭初同志.

讲义各册由我专业有关同志分工负责.

这册《数值逼近方法》的编写者为沈祖和、林成森二同志,李明霞同志也参加了部分工作.

5. 由于理论水平和实践经验所限,讲义中的缺点和错误在所难免,我们衷心盼望读者提出宝贵意见.

南京大学数学系计算数学专业

1978年3月

目　录

第一章 插值方法

§1 引　　言

在许多实际问题以及科学研究中，所遇到的函数往往不便于计算或处理(例如求导或求积分)．有时候函数关系没有明显的解析表达式，需要根据实验观测或其它方法来确定与自变量的某些值相应的函数值；有时候，虽然所遇到的函数有明显的解析表达式，但是使用起来却费工费时．从实际需要来说，对于计算结果允许有一定程度的误差．这样我们就希望对问题中的函数建立一个简单的便于计算和处理的近似表达式．

插值法就是建立这种近似公式的一种基本方法．用这种方法所得的近似公式就叫做插值公式．下面我们介绍建立这种插值公式的原则．

假定已知函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个相异点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

处的函数值为

$$f(x_0)=f_0,\ f(x_1)=f_1,\ \cdots,\ f(x_n)=f_n.$$

我们取一个 m 次的多项式

$$p_m(x)=c_0x^m+c_1x^{m-1}+\cdots+c_{m-1}x+c_m \tag{1}$$

作为所求的近似表达式，使它满足条件

$$p_m(x_i)=f_i,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n. \tag{2}$$

多项式 (1) 中的未定系数有 $m+1$ 个，而它所应满足的条件 (2) 有 $n+1$ 个．由此可以设想，若取 $m=n$ 便可以希望根据

(2)中的 $n+1$ 个条件把近似公式中的 $n+1$ 个系数决定下来.这时,系数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 所应满足的方程为

$$\begin{cases} c_0x_0^n+c_1x_0^{n-1}+\cdots+c_n=f_0, \\ c_0x_1^n+c_1x_1^{n-1}+\cdots+c_n=f_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0x_n^n+c_1x_1^{n-1}+\cdots+c_n=f_n. \end{cases} \tag{3}$$

这是一个含 $n+1$ 个未知数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 的线性方程组,它的行列式

$$w(x_0, x_1, \cdots, x_n)=\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

称为 VanderMonde 行列式. 下面将证明, 当 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 互异时, $w(x_0, x_1, \cdots, x_n)$的值不等于零. 所以方程组(3)有唯一的一组解.

令

$$L_n(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n,$$

其中右端的系数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 为方程组(3)的解,因而多项式 $L_n(x)$应满足条件

$$L_n(x_i)=f_i, \ i=0, 1, \cdots, n.$$

我们称 $L_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为基点的插值多项式.

以后如无特别说明,插值基点总假定是互异的.

§2 VanderMonde 行列式

设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是区间$[a, b]$上的 $n+1$ 个插值基点.我们来计算并研究由数 x_i $(i=0, 1, \cdots, n)$ 组成的 VanderMonde 行列式(4):

$$w(x_0, x_1, \cdots, x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix},$$

它有下面的性质.

1. 当交换 x_i 与 $x_k(i\neq k)$ 两个数时，便改变了二列的位置，因而行列式改号.

2. 若有两个基点相同，即存在 $i, j, i\neq j, x_i=x_j$ 时，

$$w(x_0, x_1, \cdots, x_n)=0.$$

3. $w(x_0, x_1, \cdots, x_n)=A(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$，其中 A 与 x 无关，它等于多项式 $w(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x)$ 中 x^n 的系数.

证明　事实上，把行列式

$$w(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & x \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_{n-1}^n & x^n \end{vmatrix}$$

按最后一列展开时，便知它是一个关于 x 的 n 次多项式. 另一方面，当 $x=x_i(i=0, 1, \cdots, n-1)$ 时，它等于零. 因此可以写成恒等式

$$w(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x)\equiv A(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),$$

其中的 A 正好是由 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 所组成的 n 阶 Vander-Monde 行列式:

$$A=w(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

于是得

$$\begin{aligned} & w(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x) \\ = & w(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

4. $w(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)=\prod\limits_{p<q}(x_p-x_q)$.

证明　由3, 按同样的方式, 可以把计算行列式 $w(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 化为计算 $w(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$, …, 余类推. 我们便得到一串递推的等式, 其中最后的两个等式是

$$w(x_0, x_1, x_2)=w(x_0, x_1)(x_2-x_0)(x_2-x_1),$$

$$w(x_0, x_1)=(x_1-x_0).$$

把所得到的全部等式连乘起来, 便有

$$\begin{aligned} w(x_0, x_1, \cdots, x_n) &= (x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad \cdot(x_2-x_0)(x_2-x_1) \\ &\quad \cdot(x_1-x_0) \\ &= \prod_{p<q}(x_q-x_p). \end{aligned}$$

由此便知, 如果组成 VanderMonde 行列式的诸数 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 彼此互不相等的话, 那么 VanderMonde 行列式便不等于零.

§3　Lagrange 插值公式

3.1. Lagrange 插值多项式的构成　现在需要作出一个不高于 n 次的多项式 $p(x)$, 它在给定的 $n+1$ 个点

$$x_0, x_1, \cdots, x_n$$

处分别取给定的值

$$y_0, y_1, \cdots, y_n.$$

对这个问题可以给予几何解释: 多项式 $p(x)$ 的图形是经过 $n+1$ 个给定的点 $M_k(x_k, y_k)$, $k=0, 1, \cdots, n$ 的 n 次抛物线.

设此多项式 $p(x)$ 有如下的形式

$$p(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n,$$

因为 $p(x_k)=y_k$, $k=0, 1, \cdots, n$, 所以诸系数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 应满足线性方程组

$$\begin{cases} c_0+c_1x_0+\cdots+c_nx_0^n=f(x_0), \\ c_0+c_1x_1+\cdots+c_nx_1^n=f(x_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0+c_1x_n+\cdots+c_nx_n^n=f(x_n). \end{cases} \tag{5}$$

它的行列式显然便是 VanderMonde 行列式 $w(x_0, x_1, \cdots, x_n)$. 按照问题的假设，诸数 x_k 互异，所以这个行列式异于零，于是方程组 (5) 有唯一的一组解. 为了避免解 $n+1$ 阶线性方程组，可以把多项式 $p(x)$ 写成另一形式:

$$p(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x),$$

其中 $l_i(x)$ 满足关系

$$l_i(x_j)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

显然，此时

$$p(x_k)=y_k, \quad k=0, 1, \cdots, n.$$

由 VanderMonde 行列式的性质可知

$$\frac{w(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n)}{w(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)}=\begin{cases}0, & x=x_j, \ j\neq i,\\ 1, & x=x_j, \ j=i,\end{cases}$$

因此，可取

$$l_i(x)=\frac{w(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n)}{w(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)},$$

即

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

于是

$$\begin{aligned} p(x)&=\sum_{i=0}^{n} y_il_i(x)\\ &=\sum_{i=0}^{n} y_i\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}, \end{aligned}$$

这就是 Lagrange 插值多项式，通常记为 $L_n(x)$.

Lagrange 插值多项式可以写成较简练的形式. 事实上，令

$$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

则

$$\begin{aligned}w'_{n+1}(x)&=\lim_{x\to x_i}\frac{w_{n+1}(x)}{x-x_i}\\&=(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n),\end{aligned}$$

因此 $l_i(x)$ 以及 $L_n(x)$ 分别又可以写成

$$l_i(x)=\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)w'_{n+1}(x)}$$

和

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)w'_{n+1}(x)}. \tag{6}$$

例 1　已知函数 $y=f(x)$ 的观测数据为

x	1	2	3	4
y	0	-5	-6	3

于是在点 $x=1, 2, 3, 4$ 分别取值 $0, -5, -6, 3$ 的三次插值多项式为

$$\begin{aligned}L_3(x)=&-5\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}-6\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}\\&+3\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}=3-4x^2+x^3.\end{aligned}$$

3.2. 线性插值与二次(抛物线)插值公式　在公式(6)中取 $n=1$ 与 $n=2$ 就分别得到所谓线性插值与二次插值公式.

1. $n=1$. 函数 $y=f(x)$ 在 x_0, x_1 处的值分别为 y_0, y_1, 则插值公式为

$$\begin{aligned}L_1(x)&=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\\&=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0).\end{aligned}$$

这就是经过两点 (x_0, y_0)，(x_1, y_1) 的一直线. 这种插值公式叫线性插值公式. 在区间 $[x_0, x_1]$ 上用 $y(x)=L_1(x)$ 的值近似 $y=f(x)$ 的值，其余项为

$$R_1(x)=f(x)-L_1(x).$$

线性插值是经常用到的. 例如，当我们用普通的函数表计算函数值时，就常允许使用线性插值. 但是，线性插值只利用两对值 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 求得 $y=f(x)$ 的近似值，误差比较大.

2. $n=2$. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0, x_1, x_2 处的值为 y_0, y_1, y_2. 这时，插值公式为

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

这是一个二次函数. 若 (x_0, y_0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2) 三点不在一条直线上，通过三点的曲线就是抛物线. 因此，通过三点的插值问题称为**二次插值**或**抛物线插值**.

§4 插值公式的余项

4.1. 余项的表达式 我们来估计用插值多项式 $y=L_n(x)$ 近似表示函数 $y=f(x)$ 时所产生的误差 $R_n(x)$：

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x).$$

固定区间 $[a, b]$ 上的一点 x，令

$$K=\frac{R_n(x)}{w_{n+1}(x)}, \tag{7}$$

并作辅助函数

$$\phi(t)=f(t)-L_n(t)-Kw_{n+1}(t).$$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有 $n+1$ 阶有界导数. 因为 $L_n(x)$ 是次数低于 $n+1$ 的多项式，而 $w_{n+1}^{(n+1)}(x)=n+1!$，因此

$$\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-K(n+1)!. \tag{8}$$

此外，当 $t=x_0, x_1, \cdots, x_n, x$ 时，$\varphi(t)=0$. 根据罗尔定理，可知导数 $\phi'(t)$ 在 $n+2$ 个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n, x$ 之间的 $n+1$ 个区间内有 $n+1$ 个根，而且它们都是互异的.

重复应用罗尔定理，就证明二阶导数 $\phi''(t)$ 在 $\phi'(t)$ 的 $n+1$ 个根之间的 n 个区间内有 n 个互异的根. 继续这种推理便可证实，在诸数 $x_0, x_1, \cdots, x_n, x$ 的最大者与最小者之间，$n+1$ 阶导数 $\varphi^{(n+1)}(t)$ 必有一根. 我们用 ξ 来表示它. 由 (8) 便得

$$K=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}.$$

这时(7)就化为带余项的 Lagrange 插值公式：

$$f(x)=L_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}w_{n+1}(x). \quad a\leqslant\xi\leqslant b$$

而余项为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}w_{n+1}(x). \tag{9}$$

若记 $M_{n+1}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|$，则

$$|R_n(x)|\leqslant M_{n+1}\frac{|w_{n+1}(x)|}{n+1!}. \tag{10}$$

于特例，当 $n=1$ 时，

$$R_1(x)=\frac{1}{2}w_2(x)f''(\xi), \qquad a\leqslant\xi\leqslant b,$$

$$w_2(x)=(x-x_0)(x-x_1).$$

设 $x_1-x_0=h$, $x=x_0+\theta h$, $0<\theta<1$, 则

$$w_2(x)=\theta(\theta-1)h^2=-\theta(1-\theta)h^2,$$

当 $0<\theta<1$ 时，易证 $\theta(1-\theta)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$，所以在使用线性插值时，误差估计为

$$|R_1(x)|\leqslant\frac{1}{8}h^2|f''(\xi)|.$$

例 1　若正弦函数表的表距为 0.02 弧度，则使用线性插值时，误差为

$$|R_1(x)|\leqslant\frac{1}{8}(0.02)^2\cdot|\sin x|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}.$$

由此可知，这个表距为 0.02 的四位表可以用线性插值.

例 2　设已知

$$\sin 0.32=0.314567,\ \sin 0.34=0.333487,$$

使用线性插值求 $\sin 0.3367$ 得

$$\sin 0.3367=0.330365.$$

但 $\sin 0.3367$ 的精确六位值为 0.330374，所以计算结果中，只能取四位小数，即 0.3304.

4.2. 关于插值公式余项的进一步分析　在余项估计(10)中，因子

$$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

只与插值基点及 x 有关，而与 $f(x)$ 无关. 因此，当 $f(x)$ 给定时，$|w_{n+1}(x)|$ 直接影响到余项 $|R_n(x)|$ 的大小. 若 x 位于插值区间的中部，$w_{n+1}(x)$ 的绝对值较小. 若 x 位于区间两端，$w_{n+1}(x)$ 的绝对值较大. 因此，在插值区间中部使用插值公式比较两端精确. 今以 4 点插值公式为例说明于下. 取

$$w_4(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

并假定 x_0, x_1, x_2, x_3 等距，且

$$x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=h.$$

设 $x=x_1+th$，则

$$w_4(x)=w(x_1+th)=(t+1)t(t-1)(t-2)h^4.$$

函数 $(t+1)t(t-1)(t-2)$ 当 $t=-1, 0, 1, 2$ 时，其值为零. 在 $t=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 处有极小值 -1，在 $t=\frac{1}{2}$ 处有极大值

$\frac{9}{16}$. 若记 $M=|f^{(4)}(x)|$，则

$$|R_3(x)|\leqslant\frac{h^4}{4!}M|(t+1)t(t-1)(t-2)|.$$

因此

$$|R_3(x)|\leqslant\begin{cases}\frac{9}{16}\cdot\frac{h^4}{4}M, & \text{若 } 0\leqslant t\leqslant h,\\ \frac{h^4}{4!}M, & \text{若 } -h\leqslant t\leqslant 0,\ h\leqslant t\leqslant 2h.\end{cases}$$

这就说明在中间的区间 $0\leqslant t\leqslant h$ 上使用插值公式比在两端精确.

4.3. 高阶导数对余项的影响 余项公式(9)：

$$R_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{w_{n+1}(x)}{n+1!}\quad(a\leqslant\xi\leqslant b)$$

中的因子 $f^{(n+1)}(\xi)$ 对误差也有很大的影响，其中 ξ 为$[a,\ b]$内的某一点，它的具体位置比较难确定. 现设 $f^{(n+1)}(x)$ 在区间$[a,\ b]$上有界，并令

$$M_{n+1}=\max_{a<x<b}|f^{(n+1)}(x)|,$$

则 M_{n+1} 为有限数. 这时

$$|R_n(x)|\leqslant M_{n+1}\frac{|w_{n+1}(x)|}{n+1!}.$$

但是，除整函数外，一般说来，高阶导数增长甚快. 例如 $y=\ln x$,

$$y^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^n}.$$

对固定的 x，其绝对值和 $n!$ 增长得一样快！又如，即使象 $y=\frac{1}{1+x^2}$, $-5\leqslant x\leqslant 5$ 这样很光滑的函数，就是用等距插值，当基点个数增加时，插值多项式也不一定收敛于函数 $\frac{1}{1+x^2}$.

这就提示我们，在使用插值公式时，n 不能取得太大.

§5 Aitken逐步插值法

用插值公式(6)去算 $L_n(x)$ 在某一点 x 的值时，有它不方便的地方．因为，当插值基点增加时，原先算出来的插值多项式不能利用，要重新按公式(6)来计算 $L_n(x)$．为了解决这个问题，需要把 Lagrange 插值公式加以变形，使用 Aitken 的逐步插值法．

为方便起见，函数 $f(x)$ 关于插值基点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的插值多项式用 $I_{0,1,\cdots,n}(x)$ 表示，于是

$$I_{0,1,\cdots,n}(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)w'_{n+1}(x_i)}. \tag{11}$$

当只有一个插值基点时，记 $I_k(x)=y_k$，$k=0, 1, \cdots, n$．由(11)知，$I_{0,1,\cdots,n}(x)$ 与插值基点的顺序无关，即

$$I_{0,1,\cdots,n}(x)=I_{1,0,\cdots,n}(x)$$

等等．

现从 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 中选出 $k+1$ 个点作 k 次 Lagrange 插值多项式，例如，取 $x_0, x_1, \cdots, x_k$，则相应的插值多项式为

$$I_{0,1,\cdots,k}(x)=w_{k+1}(x)\sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{(x-x_i)w'_{n+1}(x_i)}. \tag{12}$$

又在点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 中除去一点 x_p，$0\leqslant p\leqslant k$，作 $k-1$ 次 Lagrange 插值多项式 $I_{0,1,\cdots,p-1,p+1,\cdots,k}(x)$，得

$$I_{0,1,\cdots,p-1,p+1,\cdots,k}(x)=w_{k+1}(x)\sum_{i=0}^{k} \frac{y_i(x_i-x_p)}{(x-x_p)(x-x_i)w'_{k+1}(x_i)}. \tag{13}$$

同理

$$I_{0,1,\cdots,q-1,q+1,\cdots,k}(x)=w_{k+1}(x)\sum_{i=0}^{k} \frac{y_i(x_i-x_q)}{(x-x_q)(x-x_i)w'_{k+1}(x_i)}. \tag{14}$$

于是，从(12)、(13)、(14)可得