CHUZHONG ZHONGNANDIAN TUPO BAODIAN

初中重难点突破宝典

# 初三数学重难点突破宝典

主　编　叶尧城
副主编　冯善庆
孙延洲

湖北教育出版社

初中重难点突破宝典

# 初三数学重难点突破宝典

主　编　叶尧城
副主编　冯善庆
　　　　孙延洲

许第二
谭崇坤　编著
陈士云

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

重难点突破宝典(初三数学)叶尧城主编. —武汉: 湖北教育出版社, 2000

ISBN 7-5351-2707-X

Ⅰ. 重…　Ⅱ. 冯…　Ⅲ. 数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 07931 号

| | |
|---|---|
| 出版发行: 湖北教育出版社 | 武汉市青年路 277 号<br>邮编: 430015　电话: 83625580 |
| 经　销: 新华书店 | |
| 印　刷: 湖北开元印刷有限公司 | (437100・湖北咸宁市温泉路41号) |
| 开　本: 850mm×1168mm　1/32 | 1 插页　8.75 印张 |
| 版　次: 2000 年 5 月第 1 版 | 2000 年 5 月第 1 次印刷 |
| 字　数: 236 千字 | 印数: 1-5 000 |
| ISBN 7-5351-2707-X/G・2201 | 定价: 9.00 元 |

# 前　言

《初中重难点突破宝典》(数、理、化)是依据九年义务教育初中各科最新教学大纲规定的任务和要求,为培养面向 21 世纪初中学生应具备的学科素质和能力而编写的。旨在密切配合初中各科教学,拓宽学生的知识面,提升学生的综合素质。本书将通过对精典例题的分析与说明,导出学习中的重难点,再对重难点知识进行消化、分解、综合,总结学习方法,归纳认知规律,拓展思维路径,使学生能掌握并运用知识解决问题,且能在应用能力与创新意识上有所突破。

根据当前初中数理化教学的实际需要及学生的知识结构,《初中重难点突破宝典》按教材中的顺序分章节进行编写,每章节由以下四部分组成:

**精典题解** Learn

精选典型例题进行精炼讲解,力求使每道例题都能对该章节的重点或难点有所反映。在分析中着重注意问题的解题思路,阐释思想方法,引导读者掌握分析问题、解决问题的方法(重点突出解决问题的通法),并给出较为详细规范的解答。

**重难点透析** Understand

重点剖析本章的重难点知识,说明重在何处,难在哪里,如何理解,怎样归纳、拓展,以知识为载体培养学生分析问题和解决问题的能力。同时,为进一步加强对重难点知识的理解和把握,也适当补充了一些例子加以阐述。

## 突破训练 Try

依据剖析的本章内容的重难点，有针对性地精选一些习题供学生练习。其中带★号的习题稍稍增加了一些思维强度和综合度。

## 创新与应用 Create

为积极贯彻国家教育部有关实施素质教育的文件精神，在本书中特选了一些与生产和生活实际相关的学科问题及创新题型，着意培养综合能力、创新意识和创新能力。

在每章学习结束后，我们均给出了一组单元训练题，其目的是使学生巩固所学的有关知识，同时也便于教师对学生反馈的情况进行评价与调控。书末附有 3 套综合测试题以及参考答案。

“精、实、新”是本书的主要特色，我们在编写过程中力求例题精、讲解精、习题精；用朴实的文笔，使内容较为充实，能为学生打下扎实的基础；同时在选编例习题时，注意了选用近两年出现的新颖问题和最新题型，培养学生的创新意识和创新能力，从而使得本书具有较强的针对性、启发性、实用性和指导性。

参加本丛书编写的均是湖北省一线优秀的特级教师和高级教师，他们不仅教学经验丰富，而且极富开拓精神，为奉献给读者真正实用的精品，在萃取和钻研最新资料上下了很深的功夫。相信读者在使用本书的过程中就有体会。

在编写和审校中，尽管我们力求避免失误，但疏漏之处仍恐在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

2000 年 4 月 21 日

# 目　录

## 代　数

# 第十二章　一元二次方程

## 12.1　一元二次方程

### 精典题解

*例 1　下列关于 $x$ 的一元二次方程中，一定是一元二次方程的是(　　).

(A)$(m-3)x^2-\sqrt{3}x-2=0$

(B)$k^2x+5k+6=0$

(C)$\sqrt{3}x^2-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{1}{2}=0$

(D)$3x^2+\frac{1}{x}-2=0$

分析　判断一个方程是否是一元二次方程应紧扣定义——只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程.

解　(A)方程中最高次项为$(m-3)x^2$，因无法判定$(m-3)$是否为零，从而不能确定该方程是否为一元二次方程.

(B)方程中关于未知数 $x$ 的最高次项是 $k^2x$，$k\neq0$ 时，$x$ 的最高次数为 1，所以该方程不是一元二次方程.

(C)是一元二次方程.

---

* 本书中选择题的 4 个选项中，仅有一项是正确的。

(D)方程中分母含未知数,所以不是整式方程,也一定不是一元二次方程.

说明　本题的关键在于正确理解一元二次方程的概念.应把握以下三点:1.方程必须是整式方程;2.只含有一个未知数;3.未知数的最高次数是2.

**例2**　把关于 $x$ 的方程 $ax^2-x-\sqrt{2}x+\sqrt{3}x^2+b=c$($a$ 为有理数)化成一般形式,并指出它的二次项系数、一次项系数及常数项.

分析　任何关于 $x$ 的一元二次方程经过整理,都可以化成 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的一般形式,方程的二次项系数、一次项系数及常数项是在方程为一般形式的前提下而言的.

解　移项,合并同类项,得方程的一般形式

$$(a+\sqrt{3})x^2-(1+\sqrt{2})x+b-c=0.$$

因为 $a$ 为有理数,所以 $a+\sqrt{3}\neq0$.

所以方程的二次项系数为$(a+\sqrt{3})$,一次项系数为 $-(1+\sqrt{2})$,常数项是$(b-c)$.

说明　本题重点考查对一元二次方程一般形式的认识.在指出二次项系数时,若二次项系数含字母,应对二次项系数是否为零加以分析.同时要密切注意各项系数及常数项的符号,尤其是负号,如本例中一次项的系数为 $-(1+\sqrt{2})$,不要写成$(1+\sqrt{2})$.

## 重难点透析

1.一元二次方程的概念为本节知识的重点,也是难点.是本章知识内容的基础.学习时应抓住概念的实质,即在例1说明中指出的三个要素进行理解.特别是“未知数的最高次数是2”这句话是在合并同类项之后而言的.如方程 $3x^2+2x-1=3x^2$ 就不是一元二次方程.

2.二次项系数含字母的方程,是考查一元二次方程概念的重点题型,学习时应予以高度重视.如例1中(A)方程若加上 $m\neq3$ 的条件,该方程就是关于 $x$ 的一元二次方程,例2中因为 $a$ 为有

理数，所以二次项系数 $a+\sqrt{3}\neq 0$ 等．还有一类方程如 $(a^2+1)x^2+bx+c=0$，不论 $a$ 为任何实数，$a^2+1>0$，所以该方程是关于 $x$ 的一元二次方程．

3．一元二次方程的一般形式是一元二次方程概念的延伸，又是继续学习一元二次方程问题的需要．要求会把一个一元二次方程化为一般形式，并能准确说出二次项系数、一次项系数和常数项．特别要注意系数所带的负号，在例 2 中，即使没有指出先把方程化为一般形式，只要求写出方程的二次项系数、一次项系数和常数项，在解题时，也要把方程先化成一般形式．这是因为方程各项系数和常数项是在方程为一般形式的前提下而言的．

## 突破训练

1．在下列关于 $x$ 的方程中，哪些是一元二次方程？哪些不是？为什么？

(1) $ax^2+bx+c=0$，　(2) $ax^2+bx+c=\frac{1}{a}x^2$，

(3) $a^2x^2+bx+c=-x^2$，(4) $x-\frac{1}{x}-1=0$，

(5) $3x^2+4x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$，(6) $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$．

2．填表

| 方程 | 二次项系数 | 一次项系数 | 常数项 |
|---|---|---|---|
| $x^2-x=0$ | | | |
| $-x^2+2x=-1$ | | | |
| $\sqrt{3}x^2=\sqrt{6}x+\pi-2$ | | | |
| | $\sqrt{2}$ | $-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ | $\sqrt{6}$ |

## 创新与应用

3．关于 $x$ 的方程 $(2m^2+m-3)x^{m+1}+5x=13$ 可能是一元二次方程吗？为什么？$(2m^2+m-3)x^{m-1}+5x=13$ 呢？

## 12.2 一元二次方程的解法

### 精典题解

例 1　解方程$(3x+1)^2-4=0$.

分析　移项后用直接开平方法解.

解　移项得$(3x+1)^2=4$.

解这个方程得

$3x+1=\pm 2$.

$\therefore\quad x_1=\frac{1}{3},x_2=-1$.

说明　本题所采用的直接开平方法是解一元二次方程最基本的方法.其题型特征是方程的一边是完全平方式,另一边是一个非负常数.

例 2　解方程 $x^2+6x-5=0$.

分析　方程经过移项、配方后变为形如$(ax+b)^2=c$ 的方程.

解　移项得　$x^2+6x=5$.

配方得　$x^2+6x+9=5+9$,

即　$(x+3)^2=14$,

$\therefore\quad x+3=\pm\sqrt{14}$.

$\therefore\quad x_1=-3+\sqrt{14},x_2=-3-\sqrt{14}$.

说明　配方法是解一元二次方程的重要方法,是导出求根公式的关键.熟练掌握完全平方式是用配方法解题的基础.对于二次项系数是 1 的方程,在方程两边同时加上一次项系数一半的平方即可完成配方.若二次项系数不为 1,一般应先将二次项系数变为 1,然后再配方较简便.熟练后,根据具体情况可灵活处理.如方程 $4x^2+4x=1$,可在方程两边直接加 1,即 $4x^2+4x+1=2$,得$(2x+1)^2=2$ 即可.

例 3　用配方法解方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

分析　先将二次项系数变为1，然后在方程两边同时加上一次项系数一半的平方.

解　$\because a\neq 0$，

$\therefore\quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$

移项得　$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$，

配方得　$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，

即　$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}.$

因为 $a\neq 0$，所以 $4a^2>0$.

当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无解. 当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

即　$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

说明　配方法既是解一元二次方程的重要方法，也是代数变形的常用方法.本题通过用配方法解一般形式的一元二次方程导出了一元二次方程的求根公式，从而揭示了一元二次方程的根由各项系数惟一决定这一本质规律，也为学习一元二次方程根的判别式作准备，要求同学们对本例的每一步变形切实弄懂弄通，它是贯穿本节内容的关键所在.

**例 4**　解方程$2x^2+2x=1$.

分析　用公式法求解.

**解**　移项得

$$2x^2+2x-1=0.$$

$\because\quad a=2,b=2,c=-1,$

$b^2-4ac=2^2-4\times 2\times(-1)=12>0,$

$\therefore \quad x=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2\times2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore \quad x_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, x_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$

说明　任何一个一元二次方程都能用公式法求解．求根公式是处理一元二次方程问题的主要工具之一．用公式法解一元二次方程时，应首先将方程化为一般形式，然后确定二次项系数、一次项系数及常数项，最后套用公式．正确确定各项系数和常数项，以及准确的运算，这是确保用公式法正确解题的关键．

例 5　解方程$3\left(\frac{1}{2}-x\right)^2-5\left(x-\frac{1}{2}\right)-2=0.$

分析　因$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$，故可把$\left(x-\frac{1}{2}\right)$看做一个整体，用因式分解法比较简便．

解　将方程左边分解因式得

$$\left[3\left(x-\frac{1}{2}\right)+1\right]\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)-2\right]=0.$$

$\therefore \quad 3\left(x-\frac{1}{2}\right)+1=0$ 或 $\left(x-\frac{1}{2}\right)-2=0.$

$\therefore \quad x_1=\frac{1}{6}, x_2=\frac{5}{2}.$

说明　用因式分解法解一元二次方程的特点是简便实用，但并非所有的一元二次方程都可以用因式分解法来解．只有具备方程的一边是零，另一边可分解为两个一次因式之积时，才可用此法．因式分解法的根据是：如果两个因式的积等于零，那么这两个因式中至少有一个因式等于零．

## 重难点透析

1．一元二次方程的解法是本章的重点，也是学好本章内容的基础．特别是公式法，它揭示了一元二次方程的根由方程的各项系数惟一确定这一本质规律．

2．配方法是本章教材的难点．是导出求根公式的关键，也是

代数变形中的一种重要方法，在以后的学习中会常用到，学好配方法有助于深刻理解本章所学内容.

3. 解一元二次方程的四种方法，应熟练掌握，并能灵活运用. 配方法和公式法对所有的一元二次方程都适用，直接开方法和因式分解法只对具备相应特征的方程才适用. 用公式法解一元二次方程是常用的方法之一，因习题类型较多，有有理系数的，有无理系数的，还有含字母系数的，学习时应适当加强训练，力争达到熟练的程度.

## 突破训练

1. 解下列方程：

(1) $(2x-3)^2-25=0$；　(2) $4x^2-4x+1=25$；

(3) $\frac{x^2}{0.3}+2\frac{2}{3}=\frac{3x-1.8}{0.2}$；(4) $4(x-3)^2-\frac{1}{9}(2x+4)^2=0$；

(5) $x^2-2x-1=0$；　(6) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})x^2+2\sqrt{3}x+\sqrt{3}-\sqrt{2}=0$；

(7) $3x^2-5x-2=0$.

2. 解下列关于 $x$ 的方程：

(1) $(x+a)(x-b)+(x-a)(x+b)=2a(ax-b)$；

(2) $(2x^2-3x-2)m^2=mn(1+x^2)-(1-x^2)n^2$；

(3) $ax^2+bx+c=bx^2+cx+a$.

## 创新与应用

3. 方程 $(1999x)^2-1998\times2000x-1=0$ 的较大的根是 $r$，方程 $1998x^2-1999x+1=0$ 较小的根为 $s$，求 $r-s$ 的值.

4. 某直角三角形的周长是 12cm，斜边上的中线是 2.5cm，求这个三角形的面积.

5. 首项不相等的两个二次方程 $(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$ 与 $(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$（其中 $a$、$b$ 为正整数）有一个公共根，求 $\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

## 12.3 一元二次方程的根的判别式

### 精典题解

**例 1** 填空

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的 $\Delta=$____. 当 $\Delta$____时,方程有两个不相等的实数根;当 $\Delta$____时,方程有两个相等的实数根;当 $\Delta$____时,方程没有实数根.

分析 将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$,用配方法变形为$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$,由 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号可判断方程根的情况.

解 $\Delta=b^2-4ac$;$\Delta>0$;$\Delta=0$;$\Delta<0$.

说明 一元二次方程根的判别式是本章中较重要的一个内容,有助于顺利地进行解一元二次方程.上例中的结论,实际上可看做定理,它的逆命题也成立.

**例 2** 不解方程,判断下列关于 $x$ 的方程的根的情况:

(1)$(x+1)(x-2)=k^2$;

(2)$(a+1)x^2-2a^2x+a^3=0$.

分析 不解方程,判断一个方程根的情况首先要将方程变形为一般形式,然后考查二次项的系数是否为零.只有在二次项系数不为零的情况下,才可用一元二次方程根的判别式进行判断,否则不可用.

解 (1)将方程变形为

$$x^2-x-2-k^2=0.$$

$\because \Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-2-k^2)=4k^2+9$,

不论 $k$ 为任何实数 $\Delta=4k^2+9>0$,

$\therefore$方程有两个不相等的实数根.

(2)①当 $a+1=0$ 时,即 $a=-1$ 时,

方程为 $-2x-1=0$,

$\therefore\quad x=-\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ 当 $a=-1$ 时,方程为一次方程,有一个实数根.

②当 $a+1\neq 0$ 时,即 $a\neq -1$ 时,

$$\Delta=(-2a^2)^2-4(a+1)a^3=-4a^3.$$

$\therefore$ $a>0$ 时 $\Delta<0$,方程没有实数根.

$a=0$ 时 $\Delta=0$,方程有两个相等的实数根.

$a<0$ 且 $a\neq -1$ 时 $\Delta>0$,方程有两个不相等的实数根.

综上所述,当 $a>0$ 时,方程没有实数根;当 $a=0$ 时,方程有两个相等的实数根;当 $a<0$ 且 $a\neq -1$ 时,方程有两个不相等的实数根;当 $a=-1$ 时,方程只有一个实数根.

说明 不解方程,判断方程实数根的情况,是一元二次方程根的判别式的一类典型运用.对于不含字母系数的一元二次方程,可直接通过计算判别式的值,来判断方程的实数根的情况.对于含字母系数的方程,首先应判断该方程是否为一元二次方程.如方程(1)是一元二次方程,方程(2)不一定是一元二次方程.方程(1)的判别式是恒大于零的,与字母系数的取值无关.方程(2)应对二次项系数是否为零进行分类讨论.若题目改为"判断下列关于 $x$ 的一元二次方程的根的情况",则隐含了二次项系数不为零的条件,无需对二次项系数是否为零进行讨论,只需加上二次项系数不为零($a+1\neq 0$)即可,然后对判别式的符号进行分类讨论.学习时请注意区分.

**例 3** 已知关于 $x$ 的方程 $(m+1)x^2+(m+3)x+2=0$ 有两个相等的实数根,求 $m$ 的值.

分析 本题虽然没有说明该方程是否为一元二次方程,但一元一次方程是不可能有两个相等的实数根的,所以,由此可以断定该方程一定为一元二次方程.然后结合判别式的情况求 $m$ 的值.

解 因为关于 $x$ 的方程 $(m+1)x^2+(m+3)x+2=0$ 有两个相等的实数根,所以该方程一定是一元二次方程.所以 $m+1\neq 0$,